

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«ЮЖНО–УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»  
Институт естественных и точных наук  
Факультет математики, механики и компьютерных технологий  
Кафедра уравнений математической физики

**РАБОТА ПРОВЕРЕНА**

Рецензент, доцент кафедры  
математического и  
компьютерного моделирования  
кандидат физ.-мат. наук, доцент

\_\_\_\_\_/М.А. Сагадеева/

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2017 г.

**ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ**

Заведующий кафедрой уравнений  
математической физики,  
доктор физ.-мат. наук, профессор

\_\_\_\_\_/Г.А. Свиридюк/

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2017 г.

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА**

01.04.01.2017.140.00.МД

**Руководитель**, канд. физ.-мат. наук

\_\_\_\_\_/Е.В. Бычков/

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2017 г.

**Автор**, студент группы ЕТ-221

\_\_\_\_\_/К.Ю. Котлованов/

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2017 г.

**Нормоконтролер**, канд. физ.-мат. наук, доцент

\_\_\_\_\_/Д.Е. Шафранов/

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2017 г.

Челябинск  
2017

УДК 517.9

**Котлованов К.Ю.**

Численное решение одной математической модели соболевского типа / К.Ю. Котлованов.  
– Челябинск, 2017. – 18 с.

Работа посвящена изучению математической модели колебаний термоупругой пластины при некоторых допущениях. Исследуемая математическая модель в подходящем образом выбранных функциональных пространствах редуцируется к абстрактному уравнению соболевского типа третьего порядка с относительно  $(n, p)$ -секториальным оператором в правой части. Строится множество допустимых начальных значений. На основе абстрактных результатов разработан алгоритм численного решения задачи Коши для математической модели колебаний термоупругой пластины, который был реализован в среде Maple. Приведены результаты двух вычислительных экспериментов.

Библиография – 23 названия; 3 иллюстрации.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Обозначения и сокращения .....	4
Введение .....	5
1. Относительно $(n, p)$ -секториальные операторы .....	8
2. Задача Коши для уравнения математической модели колебаний термоупругой пластины .....	10
3. Задача Шоултера – Сидорова для уравнения математической модели колебаний термоупругой пластины .....	13
4. Алгоритм решения .....	14
5. Вычислительный эксперимент .....	16
Заключение .....	18
Список литературы .....	19

## Обозначения и сокращения

1. Множества, как правило, обозначаются заглавными буквами готического алфавита. Исключения составляют множества с уже устоявшимися названиями, например:

$\mathbb{N}$  – множество натуральных чисел,

$\mathbb{R}$  – множество действительных чисел,

$\mathbb{R}_+$  – множество  $\{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$ ,

$L_p(\Omega)$  – пространства Лебега,

$W_p^l(\Omega)$  – пространства Соболева и т.д.,

$\mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$  – множество линейных непрерывных операторов, действующих из пространства  $\mathfrak{U}$  в пространство  $\mathfrak{F}$ .

2. Элементы множеств и индексы обозначаются строчными буквами латинского или греческого алфавитов, кроме отображений множеств, называемых операторами и обозначаемых заглавными буквами латинского алфавита, например:

$L : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$  – оператор, действующий из пространства  $\mathfrak{U}$  в пространство  $\mathfrak{F}$ ,

$L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$  – обозначает, что  $L$  является линейным ограниченным оператором.

3. В начале доказательства пишем «Доказательство», а конец доказательства обозначаем символом  $\square$ .

# Введение

В наше время методы математического моделирования широко применяются в исследованиях динамического поведения пластин. Актуальной задачей в современном строительстве различных зданий, автомобильных дорог, мостов. Вместе с тем, элементы некоторых конструкций, таких как двигатели машин, самолётов, ракет, элементы различных ядерных и атомных станций в процессе эксплуатации подвергаются различным воздействиям температуры. При проектировании такого рода конструкций их динамическое поведение описывается теорией термоупругости.

В дальнейшем для рассмотрения модели колебаний термоупругой пластины, будем рассматривать уравнение вида:

$$u'''_{ttt} + 2 \Delta^2 u'_t - \gamma \Delta u'''_{ttt} - k \Delta^3 u + k\gamma \Delta^2 u''_{tt} - k \Delta u''_{tt} = f(x, y, t)$$

Функция  $u$  имеет смысл как отклонение термоупругой пластины от начала координат. Коэффициенты  $k$  и  $\gamma$  – положительные, характеризующие свойства материала термоупругой пластины.  $f(x, y, t)$  – это внешнее воздействие т.е. правая часть уравнения. Термоупругость – тепловое расширение полностью обратимо или термически упруго, т.е. эффекты деформации при нагревании и при охлаждении по абсолютной величине равны.

Ранее данное уравнение рассматривалось несколькими авторами, пренебрегающими коэффициентом  $\gamma$  и также другими авторами при учете  $\gamma > 0$ . Когда  $\gamma = 0$  автор работы [13] доказал, что решение соответствующей линейной модели экспоненциально убывает с течением времени к бесконечности. В работе [13] показано, что с учетом рассеивания тепловая разница достаточно сильна для получения экспоненциальной оценки разрушения решения. Используя подходящие граничные условия, в работах [18] показаны свойства эффекта сглаживания, а также экспоненциальной оценки разрушения решения для одного класса нелинейных уравнений термоупругих пластин. Позже в работе [14] доказали, что полугруппа, связанная с эллиптической частью термоупругой системы пластины является аналитической, при условии, что граничное условие типа Дирихле. Рассмотренные выше результаты свидетельствуют о том, что уравнение термоупругой пластины параболического типа, когда  $\gamma = 0$ . С другой стороны, когда  $\gamma > 0$ , ситуация более сложная и есть только несколько результатов, касающихся асимптотического поведения и периодичности. Что касается равномерной оценки разрушения в работах [17] и [15]. В первой работе, доказано существование экспоненциального разрушения слабых решений с течением времени. Во второй работе автор вводит дополнительное ограничение на начально-краевые условия, индуцированные под действием изгибающих и крутящих моментов и поперечных сил для достижения равномерной оценки разрушения то есть в результате стабильности для уравнения термоупругих пластин была доказана. Кроме того, исследованию задач оптимального управления посвящены работы [16, 20].

В основе данной модели лежит неклассическое уравнение математической физики высокого порядка. Кроме того данное уравнение является неразрешимым относительно старшей производной по времени. Исследуемая математическая модель в подходящем образом выбранных функциональных пространствах может быть редуцирована к абстрактному уравнению соболевского типа третьего порядка с относительно  $(n, p)$ -секториальным оператором в правой части. Как известно уравнения соболевского типа не является разрешимым при произвольных начальных значениях. Поэтому сначала строится множество допустимых начальных значений. Основным методом к аналитическому исследованию является метод построения разрешающих групп операторов. Основным методом численного исследования является метод Галеркина.

Целью данной работы является аналитическое исследование математической модели колебаний термоупругой пластины. Для достижения поставленной цели необходимо реализовать следующие задачи:

- 1) Исследование существования и единственности решения задачи Коши для математической модели колебаний термоупругой пластины;
- 2) Исследование существования и единственности решения задачи Шоултера – Сидорова для математической модели колебаний термоупругой пластины;
- 3) Разработать и реализовать алгоритм численного исследования поставленных задач;
- 4) Реализовать алгоритм в среде Maple 15;

Для аналитического исследования математической модели мы воспользуемся теорией относительно секториальных операторов.

В русскоязычной литературе первое упоминание наблюдается в работах Г.А. Свиридюка и Т.А. Бокаревой в 1993 г. [1, 11]. Данное направление стало дальше развиваться Г.А. Свиридюком и его учениками, в особенности В.Е. Фёдоровым [7, 8].

# 1. Относительно $(n, p)$ -секториальные операторы

Пусть  $\mathfrak{U}, \mathfrak{F}$  – банаховы пространства,  $\mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$  – пространство линейных и ограниченных операторов),  $\mathcal{Cl}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$  – пространство линейных операторов с плотной областью определения,  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ ,  $M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ . Множество  $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})\}$  называется  $L$ -резольвентным множеством оператора  $M$ ,  $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$  называется  $L$ -спектром оператора  $M$ . Обозначим  $\sigma_n^L(M) = \{\mu^n : \mu \in \sigma^L(M)\}$ ,  $\rho_n^L(M) = \mathbb{C} \setminus \sigma_n^L(M)$  [4].

**Определение 1.1.** Оператор  $M$  назовем  $(n, p)$ -секториальным относительно оператора  $L$  (или, коротко,  $(L, n, p)$ -секториальным), если существуют константы  $K > 0$ ,  $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  такие, что сектор

$$S_{\theta, n}^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu^n)| < \theta, \mu \neq 0\} \subset \rho_n^L(M)$$

причем для всех  $\mu_k \in S_{\theta, n}^A(B)$ ,  $k = \overline{0, p}$ ,

$$\max\{\|R_{(\mu, p)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|L_{(\mu, p)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\} \leq \frac{K}{\prod_{k=0}^p |\mu_k^n|}$$

где,

$$R_{(\mu, p)}^L(M) = \prod_{k=0}^p R_{\mu_k}^L(M), \quad L_{(\mu, p)}^L(M) = \prod_{k=0}^p L_{\mu_k}^L(M)$$

Пусть  $\alpha \in \rho^L(M)$ . Редуцируем уравнение

$$Lu^{(n)} = Mu \tag{1.0.1}$$

к двум эквивалентным уравнениям, определенным на различных пространствах

$$R_{\alpha}^L(M)u^{(n)} = (\alpha L - M)^{-1}Mu, \tag{1.0.2}$$

$$L_{\alpha}^L(M)f^{(n)} = M(\alpha L - M)^{-1}f. \tag{1.0.3}$$

Операторы в правой части можно отождествить с непрерывными операторами, определенными на пространствах  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$  соответственно. Поэтому эти уравнения удобно рассматривать как конкретные интерпретации уравнения

$$Av^{(n)} = Bv, \tag{1.0.4}$$

определенного на некотором банаховом пространстве  $\mathfrak{V}$ , причем операторы  $A$  и  $B$  линейные и непрерывные. Вектор-функцию  $v \in C^n(\mathbb{R}_+; \mathfrak{V})$  удовлетворяющую уравнению (1.0.4) будем называть решением этого уравнения.

**Определение 1.2.** Оператор-функцию  $V \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}_+; L(\mathfrak{Y}))$  будем называть пропагатором уравнения (1.0.4), если для любого  $v \in \mathfrak{Y}$  вектор-функция  $v(t) = V^t v$  будет решением этого уравнения.

**Лемма 1.1.** Пусть оператор  $M$   $(L, n, p)$ -секториален. Тогда длины всех цепочек  $M$ -присоединенных векторов ограничены числом  $p$ .

**Лемма 1.2.** Пусть оператор  $M$   $(L, n, p)$ -секториален. Тогда интегралы типа Данфорда – Шварца

$$U_m^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \mu^{n-m-1} (\mu^n L - M)^{-1} L e^{\mu t} d\mu,$$

$$F_m^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \mu^{n-m-1} L (\mu^n L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu,$$

где  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $m = 0, 1, \dots, n-1$ , а  $\gamma \subset \rho_2^L(M)$  – контур, образованный лучами, выходящими из начала координат под углами  $\theta$  и  $-\theta$ , определяют пропагаторы однородных уравнений (1.0.2), (1.0.3) соответственно [19].

Выделим в пространствах  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$  подпространства

$$\mathfrak{U}^0 = \bigcap_{m=0}^{n-1} \ker U_m^t, \quad \mathfrak{F}^0 = \bigcap_{m=0}^{n-1} \ker F_m^t.$$

Обозначим, через  $L_0$  ( $M_0$ ) сужения операторов  $L$  ( $M$ ) на  $\mathfrak{U}^0$  ( $\mathfrak{U}^0 \cap \text{dom} M$ ), соответственно. Положим

$$\mathfrak{U}^1 = \text{im} U_0^t = \{u \in \mathfrak{U} : \lim_{t \rightarrow 0^+} U_0^t u = u\}, \quad \mathfrak{F}^1 = \text{im} F_0^t = \{f \in \mathfrak{F} : \lim_{t \rightarrow 0^+} F_0^t f = f\}$$

и обозначим через  $L_1$  ( $M_1$ ) сужения операторов  $L$  ( $M$ ) на  $\mathfrak{U}^1$  ( $\mathfrak{U}^1 \cap \text{dom} M$ ).

Очевидно, что  $\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 \subset \mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1 \subset \mathfrak{F}$ . Введем условия:

$$\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U} \quad (\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}) \tag{1.0.5}$$

$$\exists L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1). \tag{1.0.6}$$

Условие (1.0.5) выполняется, например, если пространства  $\mathfrak{U}$  ( $\mathfrak{F}$ ) рефлексивны (теорема Яги – Федорова). Условие (1.0.6) выполняется в случае, когда имеет место (1.0.5) и  $\text{im} L_1 = \mathfrak{F}^1$  (теорема Банаха). Заметим еще, что из (1.0.5) вытекает существование проекторов  $P = s - \lim_{t \rightarrow 0^+} U_0^t$  и  $Q = s - \lim_{t \rightarrow 0^+} F_0^t$  в пространствах  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$  соответственно.

**Следствие 1.1.** В условиях предыдущей леммы операторы  $L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$ ,  $L_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$ ,  $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$ ,  $M_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$ , причем существует оператор  $(M_0^0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$



## 2. Задача Коши для уравнения математической модели колебаний термоупругой пластины

Рассмотрим задачу Коши

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u^{(m)}(t) = u_m, \quad m = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.0.7)$$

для уравнения

$$Lu^{(n)} = Mu + f. \quad (2.0.8)$$

Уравнение (2.0.8) редуцируется к системе

$$Hu^{0(n)} = u^0 + M_0^{-1}f^0, \quad (2.0.9)$$

для уравнения

$$u^{1(n)} = Su^1 + L_1^{-1}f^0, \quad (2.0.10)$$

В работе [5] получено, что оператор  $H = (M_0)^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$  нильпотентен степени  $p$  и доказаны следующие леммы.

**Лемма 2.1.** Пусть оператор  $M$   $(L, n, p)$ -секториален и выполнены условия:  $\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}$  ( $\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}$ ),  $\exists L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$ . Тогда для любой вектор-функции

$$f^0 \in C^{n(p+1)}([0, T]; \mathfrak{F}^0)$$

существует единственное решение уравнения (2.0.9), которое имеет вид

$$u^0(t) = - \sum_{q=0}^p H^q M_0^{-1} f^{0(nq)}(t).$$

**Лемма 2.2.** В условиях предыдущей леммы для любых  $u_m \in \mathfrak{U}^1, m = 0, \dots, n-1$  и  $f^1 \in C([0, T]; \mathfrak{F}^1)$  существует единственное решение задачи Коши (2.0.7) для уравнения (2.0.9), которое имеет вид

$$u^1(t) = \sum_{m=0}^{n-1} U_m^t u_m + \int_0^t U_{n-1}^{t-s} L_1^{-1} f^1(s) ds.$$

Построим множество допустимых начальных значений

$$M_f^k = \{u \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I} - P)u = - \sum_{q=0}^p H^q M_0^{-1} f^{0(nq+k)}(0), \quad m = 0, \dots, n-1\}.$$

**Теорема 2.1.** Пусть оператор  $M(L, n, p)$  - секториален и выполнены условия  $\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}$  ( $\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}$ ), существует  $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$ . Тогда для любых  $u_m \in M_f^m, m = 0, \dots, n-1$ , и вектор-функции  $f = f(t), t \in [0, T]$ , удовлетворяющей условиям лемм 2.1 и 2.2 существует единственное решение задачи (2.0.7), (2.0.8), которое имеет вид  $u(t) = u^0(t) + u^1(t)$ .

Математическую модель колебаний термоупругой пластины

$$(\Delta - \lambda)u_{tt} = \gamma^2 \Delta^2 u + f. \quad (2.0.11)$$

$$u(x, y, t) = \Delta u(x, y, t) = 0, \quad (x, y, t) \in \partial D \times R, \quad (2.0.12)$$

$$u^{(m)}(x, y, 0) = u_m(x, y), \quad m = 0, 1. \quad (2.0.13)$$

в подходящим образом выбранных пространствах может быть представлена в виде начальной задачи для операторно-дифференциального уравнения. Пусть  $D \subset \mathbb{R}^2$  ограниченная область с гладкой границей  $\partial D$ . Введем пространства  $\mathfrak{U} = \{u \in W_2^{m+2}(D) : u(x, y) = 0 \forall (x, y) \in \partial D\}$ ,  $\mathfrak{F} = W_2^m(D)$  и зададим операторы

$$L = \Delta - \lambda \mathbb{I}, \quad M = \gamma^2 \Delta^2.$$

Тогда  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ ,  $M \in \mathcal{CL}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ , причем  $\text{dom } M = \{u \in W_2^{m+4}(D) : u(x, y) = \Delta u(x, y) = 0 \forall (x, y) \in \partial D\}$ . Таким образом математическая модель (2.0.11)–(2.0.13) принимает вид

$$\dot{u}(0) = u_1, \quad u(0) = u_0. \quad (2.0.14)$$

$$L\ddot{u} = Mu + f \quad (2.0.15)$$

**Лемма 2.3.** *Для любых значений  $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0$  оператор  $M$   $(L, 2, 0)$ -секториален.*

**Доказательство.** Найдем  $L$ -спектр оператора  $M$ . Обозначим через  $\lambda_k$  - собственные значения однородной задачи оператора Лапласа  $\Delta$ . Известно, что  $\lambda_k$  конечнократное и сгущается к точке  $\infty$ .

$$\sigma^L(M) = \{\mu_k = \frac{\gamma^2 \lambda_k^2}{\lambda_k - \lambda}; k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda_l = \lambda\}\}$$

Очевидно, что  $\mu_k \sim k$ , следовательно существует угол  $\theta$ .

$$S_{\theta, 2}^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : \|\arg(\mu^2)\| < \theta, \mu \neq 0\} \subset \rho^L(M)$$

И иммет место

$$\max\{\|R_{\mu^2}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|L_{\mu^2}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}\} \leq \text{const}|\mu|^{-2}, \quad \mu \in S_{\theta, 2}^L(M).$$

□

$$M_0^{-1} = \sum_{\phi_k} -\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{(\mu^n L - M)^{-1}}{-\mu} e^{\mu t} d\mu$$

$$L_1^{-1} = \sum_k \frac{\langle \cdot, \phi_k \rangle \phi_k}{(\lambda_k - \lambda)}$$

Штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемых, для которых  $\lambda_k = \lambda$ .

В силу того, что условие предыдущей теоремы выполняется, справедлива

**Теорема 2.2.** Пусть  $u_2^0 \in \ker L$ ,  $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$  ( $\gamma \neq 0$ ) и  $u_k \in M_f^m$ . Тогда существует единственное решение задачи (2.0.11) – (2.0.13).

**Доказательство.** В силу того что выполняется условие абстрактной теоремы 2.1 и в силу лемм 2.1, 2.2 Решение имеет вид

$$u(t) = \sum_{m=0}^{n-1} U_m^t u_m + \int_0^t U_{n-1}^{t-s} L_1^{-1} f^1(s) ds - \sum_{q=0}^p H^q M_0^{-1} f^{0(nq)}(t)$$

где

$$M_0^{-1} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{(\mu^n L - M)^{-1}}{-\mu} e^{\mu t} d\mu, \quad L_1^{-1} = \sum_k \frac{\langle \cdot, \phi_k \rangle \phi_k}{(\lambda_k - \lambda)}$$

Штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемых, для которых  $\lambda_k = \lambda$ .

□

### 3. Задача Шоултера – Сидорова для уравнения математической модели колебаний термоупругой пластины

Пусть  $D \subset \mathbb{R}^n$  - ограниченная область с границей  $\partial D$  класса  $C^\infty$  В цилиндре  $D \times \mathbb{R}_+$  рассмотрим уравнение

$$P(\dot{u}(0) - u_1) = 0, \quad P(u(0) - u_0) = 0 \quad (3.0.16)$$

начальными условиями Шоултера – Сидорова

$$u(x, 0, t) = u(x, \pi, t) = u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = 0 \quad (3.0.17)$$

с краевыми условиями Дирихле

$$(\Delta - \lambda)u_{tt} = \gamma^2 \Delta^2 u + f. \quad (3.0.18)$$

где  $u \in C^\infty(D \times \mathbb{R}_+)$ ,  $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $f$  - класса  $C^\infty$ .

Математическую модель колебаний термоупругой пластины

$$(\Delta - \lambda)u_{tt} = \gamma^2 \Delta^2 u + f. \quad (3.0.19)$$

$$u(x, y, t) = \Delta u(x, y, t) = 0, \quad (x, y, t) \in \partial D \times \mathbb{R}, \quad (3.0.20)$$

$$P(\dot{u}(0) - u_1) = 0, \quad P(u(0) - u_0) = 0 \quad (3.0.21)$$

в подходящим образом выбранных пространствах может быть представлена в виде начальной задачи для операторно-дифференциального уравнения. Пусть  $D \subset \mathbb{R}^2$  ограниченная область с гладкой границей  $\partial D$ .

Математическая модель вида (3.0.18) редуцирована к задаче Шоултера – Сидорова для уравнения соболевского типа

$$L\ddot{u} = Mu + f \quad (3.0.22)$$

**Теорема 3.1.** Пусть  $M(n, p)$ -ограничен.  $f$  из пересечения образов  $L, M$ . Тогда для  $\forall u_0, u_1 \in \mathfrak{U}$  при выполнении условия

$$\{u \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I} - P)u = -\sum_{q=0}^p H^q M_0^{-1} f^{0(nq+k)}(0)\}, k = 0, \dots, n-1.$$

$\exists$  единственное локальное решение для (3.0.16) - (3.0.17).

## 4. Алгоритм решения

Блок - схему алгоритма численного метода решения задачи (2.0.11) - (2.0.13) можно изобразить следующим образом (см. рис. 1.)

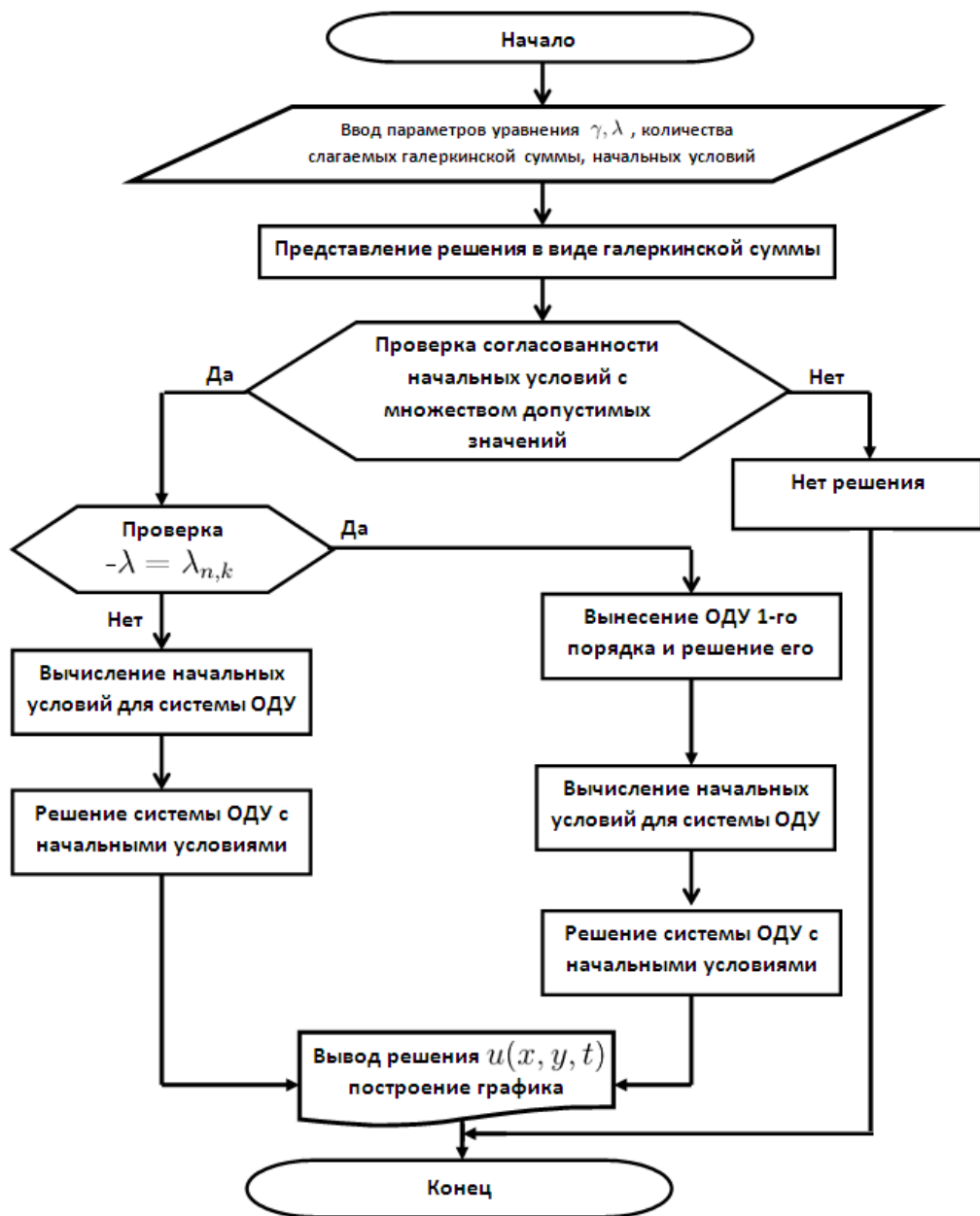


Рис. 1. Блок - схема алгоритма численного метода

**Описание алгоритма** численного метода решения задачи (2.0.11) - (2.0.13) по шагам, соответствующим блокам, схемы алгоритма.

Начало программы.

Шаг 1. Ввод начальных данных: количество слагаемых галеркинской суммы, параметров уравнения  $\gamma$ ,  $\lambda$  и начальных условий.

Шаг 2. Представление решения в виде галеркинской суммы.

Шаг 3. Проверка согласования начальных условий с помощью оператора выбора (if). Если не выполняется, то решения нет. Если выполняется, то переход к следующему шагу.

Шаг 4. Проверка вырожденности уравнения т.е. условия  $-\lambda = \lambda_{n,k}$  с помощью оператора выбора (if). Если условие не выполняется, то переходим к шагу 6. Если условие выполняется, то переходим к следующему шагу.

Шаг 5. Вынесение обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка из системы уравнений и решение его с начальными условиями.

Шаг 6. Вычисление начальных условий для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Шаг 7. Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями.

Шаг 8. Вывод полученного решения и построение графика.

Конец программы.

## 5. Вычислительный эксперимент

**Пример 1.** Для проведения численного решения воспользуемся следующими начальными условиями и параметрами:

$$\lambda = -3, N = 2, \gamma = 0.0064, \lambda_{n,k} = -k^2 - n^2,$$

$$u(x, 0) = xy, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \cos(x) \cos(y),$$

$$\frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial t^2} = \cos(2x) \cos(y) + \cos(2y) \cos(x).$$

Результат вычислений выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} u^2(x, y, t) = & \cos(x) \cos(y) \left( 4 + \frac{\sqrt{15828977298413789961}\pi^2}{25660971444} \times \right. \\ & \left. \times \sin \left( \frac{\sqrt{15828977298413789961}t}{2467401101} \right) \right) + \cos(2y) \cos(x) \times \\ & \times \left( \frac{-5\pi^2}{221} + \frac{5\pi^2}{442} \exp \left( \frac{\sqrt{1105}t}{10} \right) + \frac{5\pi^2}{442} \exp \left( \frac{-\sqrt{1105}t}{10} \right) \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cos(2x) \cos(y) \left( \frac{-4934802201\pi^2}{218118257240} + \frac{4934802201\pi^2}{436236514480} \exp\left(\frac{\sqrt{5491685999521613190t}}{704971743}\right) + \right. \\
& \left. + \frac{4934802201\pi^2}{436236514480} \exp\left(\frac{-\sqrt{5491685999521613190t}}{704971743}\right) \right)
\end{aligned}$$

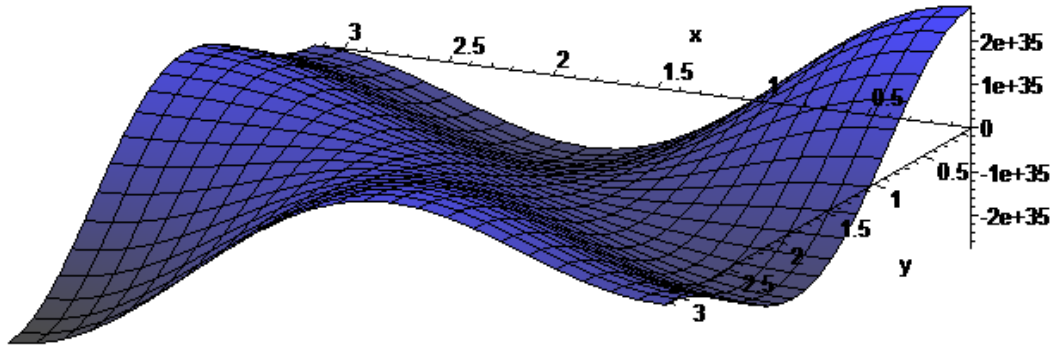


Рис. 2. График решения  $u(x, y, t)$  при  $t=25$

**Пример 2.**

$$\lambda = -2, N = 2, \gamma = 0.7, \lambda_{n,k} = -k^2 - n^2,$$

$$u(x, 0) = xy, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \cos(x) \sin(y),$$

$$\frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial t^2} = \cos(2x) \sin(y) + \sin(2y) \cos(x).$$

Результат вычислений выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
u^2(x, y, t) = & \sin(x) \sin(y) \pi^2 - \frac{1}{2} \sin(2y) \sin(x) \pi^2 + \sin(2x) \sin(y) \left( -\frac{\pi^2}{2} + \frac{\sqrt{2414933715507347}\pi}{293620731} \times \right. \\
& \times \exp\left(\frac{\sqrt{2414933715507347}t}{24674011}\right) - \frac{\sqrt{2414933715507347}\pi}{293620731} \exp\left(\frac{\sqrt{2414933715507347}t}{24674011}\right) \Bigg) + \\
& + \sin(2x) \sin(2y) \left( \frac{\pi^2}{4} - \frac{197392088\pi}{1105395693} + \frac{98696044\pi}{1105395693} \times \right. \\
& \times \exp\left(\frac{\sqrt{9091515162811541}t}{49348022}\right) + \frac{98696044\pi}{1105395693} \exp\left(\frac{-\sqrt{9091515162811541}t}{49348022}\right) \Bigg)
\end{aligned}$$

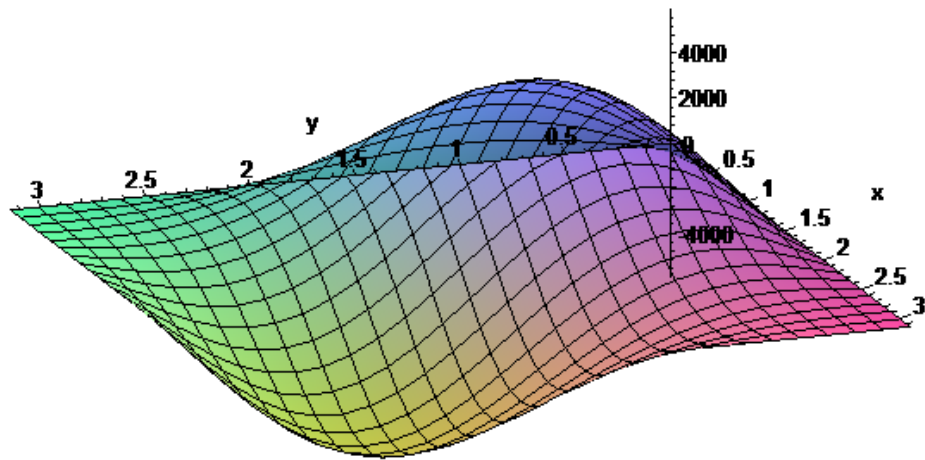


Рис. 3. График решения  $u(x, y, t)$  при  $t=25$

## Заключение

Проведено аналитическое исследование математической модели колебаний термоупругой пластины в двумерном случае. Доказаны теоремы о существовании единственного решения задачи Коши для математической модели колебаний термоупругой пластины и задачи Шо-уолотера – Сидорова. Был разработан алгоритм численного метода для решения задачи Коши для уравнения математической модели колебаний термоупругой пластины и реализован в среде Maple 15. Таким образом можно считать поставленные задачи выполненными и цель достигнутой.



## Список литературы

- [1] Бокарева, Т.А. Исследование фазовых пространств уравнений типа Соболева с относительно секториальными операторами: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 / Бокарева Татьяна Александровна – Санкт-Петербург, 1993. – 18с.
- [2] Замышляева, А.А. Голоморфные вырожденные полугруппы операторов и эволюционные уравнения соболевского типа в квазисоболевых пространствах последовательностей / А.А. Замышляева, Д.К.Т. Аль-Исави // Вестник Южно-Уральского университета. Серия Математика. Механика. Физика. – 2015 – № 7. – С. 27–36.
- [3] Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012. – 116 с.
- [4] Замышляева, А.А. Об аналитическом исследовании математической модели Бенни – Люка / А.А. Замышляева // Математические заметки СВФУ. – 2013. – № 2. – С. 57–65.
- [5] Замышляева, А.А. Фазовое пространство уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева // Известия Иркутского государственного университета. – 2011. – № 4. – С. 45–57
- [6] Келдыш, М.В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений / М.В. Келдыш // Докл. АН СССР. – 1951. – № 1. – С. 11-14.
- [7] Свиридюк, Г.А. Аналитические полугруппы с ядрами и линейные уравнения типа Соболева / Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров // Сибирский математический журнал. – 1995. – № 5. – С. 142.
- [8] Свиридюк, Г.А. Относительно сильно радиальные операторы и сильно непрерывные полугруппы операторов с ядрами / Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров // Успехи математических наук. – 1995. – Т. 50. – С. 142.
- [9] Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. – 1994. – № 4. – С. 47–74.
- [10] Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором / Г.А. Свиридюк // Алгебра и анализ. – 1994. – № 5. – С. 252–272.
- [11] Свиридюк, Г. А. Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно секториальным оператором / Г.А. Свиридюк // ДАН. – 1993. – Т. 329, № 3. – С. 274–277.
- [12] Фалалеев, М.В. Вырожденные дифференциальные уравнения высоких порядков специального вида в банаховых пространствах и их приложения / Фалалеев М.В., Красник А.В., Орлов С.С. // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2010. – № 3. – С. 126–139.

- [13] Kim, J. U. On the energy decay of a linear thermoelastic bar and plate / J. U. Kim // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 1992.
- [14] Liu, Z. Y. A note on the equation of a thermoelastic plate / Z. Y. Liu, M. Renardy // Appl. Math. – 1995.
- [15] Lagnese J. E. Boundary stabilization of thin plate / J. E. Lagnese // SIAM Studies in Appl. Math. – 1989. – № 10.
- [16] Lagnese J. E. The reachability problem for thermoelastic plates / J. E. Lagnese // Arch. Rational Mech. Anal. – 1990.
- [17] Rivera, J. E. A linear thermoelastic plate equation with dirichlet boundary condition / J. E. Rivera, Y. Shibata // Math. Meth. – 1997.
- [18] Rivera, J. E. Smoothing properties, decay and global existence of solutions to nonlinear coupled systems of thermoelastic type / J. E. Rivera, R. Racke // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 1995. – № 26. – T. 6.
- [19] Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operator / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht, Boston, Koln: VSP, 2003. – 216 pp.
- [20] Teresa L. Controllability of the linear system of thermoelastic plates / L. Teresa, E. Zuazua // Appl. Mathematical – 1996.