

## О СХОДИМОСТИ МАСШТАБИРУЕМОГО АЛГОРИТМА ПОСТРОЕНИЯ ПСЕВДОПРОЕКЦИИ НА ВЫПУКЛОЕ ЗАМКНУТОЕ МНОЖЕСТВО

*А.В. Ершова, И.М. Соколинская*

## ABOUT CONVERGENCE OF SCALABLE ALGORITHM OF CONSTRUCTION PSEUDOPROJECTION ON CONVEX CLOSED SET

*A.V. Ershova, I.M. Sokolinskaya*

Доказывается теорема сходимости для алгоритма построения псевдопроекции на выпуклое замкнутое множество. Данный алгоритм является основной частью итерационного метода решения задачи сильной отделимости и допускает эффективное распараллеливание на большом количестве процессоров.

*Ключевые слова:* Фейеровское отображение, задача сильной отделимости, итерационный метод, псевдопроекция точки.

The convergence theorem for the algorithm of construction pseudoprojection on convex closed set is proved. This algorithm is main part of the iterative method for solving strong separability problem, also it let effective paralleling for a lot of processors.

*Keywords:* Fejer's mapping, problem of strong separating, iterative method, pseudoprojection of point.

### Введение

В распознавании образов имеет большое значение задача сильной отделимости, которая состоит в нахождении слоя наибольшей толщины, разделяющего два выпуклых непересекающихся многогранника. Такая задача может быть решена с помощью итерационного метода, использующего операцию проектирования. Однако на практике применение этого метода существенно ограничивается тем, что далеко не всегда удается построить конструктивную формулу для вычисления проекции точки на выпуклое множество. Поэтому целесообразно заменить операцию проектирования последовательностью фейеровских отображений [1]. Указанный метод был описан в работе [2].

При решении практических задач экономико-математического моделирования часто встречаются задачи с большим количеством переменных и ограничений. Подобные задачи при решении требуют значительных вычислительных мощностей. В связи с этим актуальной является задача разработки параллельного алгоритма разделения выпуклых многогранников с помощью фейеровских отображений, допускающего эффективную реализацию на многопроцессорных системах с массовым параллелизмом. В методе решения задачи сильной отделимости на базе фейеровских отображений наиболее ресурсоемкой частью является алгоритм вычисления псевдопроекции на многогранник. В данной работе предлагается новый масштабируемый алгоритм построения псевдопроекции на выпуклое замкнутое множество и доказывается его сходимость.

Статья состоит из трех частей. В первой части описывается численный метод решения задачи сильной отделимости на базе фейеровских отображений. Во второй части приводится новый масштабируемый алгоритм построения псевдопроекции на многогранник. В третьей части доказывается сходимость предложенного алгоритма.

## 1. Численный метод решения задачи сильной отделимости на базе фейеровских отображений

Пусть даны два выпуклых непересекающихся многогранника  $M \subset \mathbb{R}^n$  и  $N \subset \mathbb{R}^n$ , заданные системами линейных неравенств:

$$\begin{aligned} M &= \{x | Ax \leq b\} \neq \emptyset; \\ N &= \{x | Bx \leq d\} \neq \emptyset; \\ M \cap N &= \emptyset. \end{aligned} \tag{1}$$

*Задача сильной отделимости* – это задача нахождения слоя наибольшей толщины ( $\pi$ -слоя), разделяющего  $M$  и  $N$ . Сильная отделимость, по существу, эквивалентна задаче отыскания расстояния между  $M$  и  $N$  в смысле метрики

$$\rho(M, N) = \min\{\|x - y\| \mid x \in M, y \in N\}. \tag{2}$$

Если  $\bar{x} \in M$  и  $\bar{y} \in N$  являются  $\arg$ -точками задачи (2), то есть  $\rho(M, N) = \|\bar{x} - \bar{y}\|$ , то слоем наибольшей толщины, разделяющим множества  $M$  и  $N$ , является  $P = \{x \mid x \in P_1 \cap P_2\}$ , где  $P_1$  и  $P_2$  – полупространства, задаваемые линейными неравенствами

$$(x - \bar{x}, \bar{x} - \bar{y}) \leq 0 \text{ и } (y - \bar{y}, \bar{x} - \bar{y}) \geq 0.$$

Задача сильной отделимости может быть решена с помощью известного итерационного метода *последовательного проектирования* [2].

Если множества  $M$  и  $N$  достаточно просты в смысле простоты реализации операции проектирования точек на них, то такой метод решения задачи сильной отделимости может быть использован на практике. Но если  $M$  и  $N$  – произвольные многогранники, то такой подход не может быть признан эффективным, так как не известен универсальный конструктивный метод построения проекции точки на многогранник. Ситуацию можно исправить, если вместо операции проектирования использовать фейеровские отображения.

Рассмотрим итерационный метод решения задачи сильной отделимости *на базе фейеровских отображений*.

Дадим определение фейеровского отображения. Пусть  $\varphi \in \{\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ . Отображение называется  $M$ -фейеровским, если выполняются следующие два условия:

$$\varphi(y) = y, \quad \forall y \in M;$$

$$\|\varphi(x) - y\| < \|x - y\|, \quad \forall y \in M, \quad \forall x \notin M.$$

Сконструируем  $M$ -фейеровское отображение, следуя работе [3]. Представим систему линейных неравенств, задающих многогранник  $M$ , в следующем виде:

$$Ax \leq b : l_j(x) = (a_j, x) - b_j, \quad j = 1, \dots, m, \tag{3}$$

где  $a_j \neq 0$  для любого  $j$ . Определим  $l_j^+(x)$  следующим образом:

$$l_j^+(x) = \max\{l_j(x), 0\}, \quad j = 1, \dots, m. \tag{4}$$

Тогда отображение вида

$$\varphi(x) = x - \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda_j \frac{l_j^+(x)}{\|a_j\|^2} a_j \quad (5)$$

будет  $M$ -фейеровским для любой системы положительных коэффициентов  $\{\alpha_j > 0\}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , таких, что  $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$  и коэффициентов релаксации  $0 < \lambda_j < 2$ . Аналогичным образом сконструируем  $N$ -фейеровское отображение  $\psi$ . Используя отображения  $\varphi$  и  $\psi$ , мы можем построить следующий алгоритм  $\mathfrak{F}$ , решающий задачу сильной отделимости с использованием фейеровских отображений.

**Алгоритм  $\mathfrak{F}$ .** Пусть задано произвольное начальное приближение  $z_0 \in \mathbb{R}^n$ . Зафиксируем положительное вещественное число  $\varepsilon$ . Алгоритм состоит из следующих шагов:

Шаг 0.  $k := 0$ .

Шаг 1.  $x_{k+1} := \lim_{u \rightarrow \infty} \varphi^u(z_k)$ .

Шаг 2.  $y_{k+1} := \lim_{u \rightarrow \infty} \psi^u(z_k)$ .

Шаг 3.  $z_{k+1} := \frac{x_{k+1} + y_{k+1}}{2}$ .

Шаг 4.  $k := k + 1$ .

Шаг 5. Если  $\min\{\|x_{k+1} - x_k\|, \|y_{k+1} - y_k\|\} \geq \varepsilon$ , перейти на шаг 1.

Шаг 6. Стоп.

Алгоритм  $\mathfrak{F}$  был исследован в работе [4]. Проведенные вычислительные эксперименты на модельных и случайных задачах подтвердили его эффективность. Однако, для больших размерностей работа алгоритма  $\mathfrak{F}$  требовала значительного времени. Например, при размерности задачи  $n = 512$  время счета на одном процессорном ядре составило 16 часов. В связи с этим возникла необходимость разработки параллельной версии этого алгоритма для многопроцессорных систем с массовым параллелизмом. Очевидно, что в алгоритме  $\mathfrak{F}$  ресурсоемкими являются шаги 1 и 2. На каждом из этих шагов реализуется *последовательный* фейеровский процесс, в результате которого мы получаем *псевдопроекцию* точки на многогранник. Многогранник, задаваемый системой линейных неравенств, всегда является выпуклым замкнутым множеством. В следующем разделе мы предложим новый *масштабируемый* алгоритм построения псевдопроекции точки на выпуклое замкнутое множество с использованием фейеровских отображений, который допускает эффективное распараллеливание на большом количестве процессоров.

## 2. Масштабируемый алгоритм $\mathfrak{S}$ построения псевдопроекции

В основе масштабируемого алгоритма построения псевдопроекции на выпуклое замкнутое множество лежит метод разбиения вектора на подвекторы. Для каждого подвектора организуется независимый фейеровский процесс. Через каждые  $s$  шагов результаты, полученные на подвекторах, соединяются в один вектор, для которого считается *невязка*. Если значение невязки меньше заданного положительного числа  $\varepsilon$ , то полученный вектор принимается в качестве псевдопроекции. В противном случае вычисления продолжаются.

Дадим формальное описание алгоритма построения псевдопроекции на выпуклое замкнутое множество с помощью фейеровских отображений, допускающего эффективное распараллеливание на большом количестве процессорных узлов.

Введем следующие обозначения. Для произвольного линейного подпространства  $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}^n$  через  $\pi_{\mathbb{P}}(x)$  будем обозначать ортогональную проекцию  $x \in \mathbb{R}^n$  на линейное подпространство  $\mathbb{P}$ . Везде далее линейное подпространство мы будем называть просто подпространством.

Через  $\rho(\mathbb{P}, x) := \min_{p \in \mathbb{P}} \|p - x\|$  будем обозначать расстояние от точки  $x$  до подпространства  $\mathbb{P}$ .

Пусть линейное многообразие  $\mathbb{L}$  получается из  $\mathbb{P}$  сдвигом на некоторый вектор  $z$ :  $\mathbb{L} = \mathbb{P} + z$ . Через  $\pi_{\mathbb{L}}(x)$  будем обозначать ортогональную проекцию  $x \in \mathbb{R}^n$  на линейное многообразие  $\mathbb{L}$ :

$$\pi_{\mathbb{L}}(x) = \pi_{\mathbb{P}}(x) + z. \quad (6)$$

Теперь мы готовы к формальному описанию алгоритма.

**Алгоритм  $\mathfrak{S}$ .** Пусть задано однозначное  $M$ -фейеровское отображение  $\varphi \in \{\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ ,  $M$ -выпукло и замкнуто. Зададим разбиение пространства  $\mathbb{R}^n$  в прямую сумму ортогональных подпространств:  $\mathbb{R}^n = \mathbb{P}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{P}_r$ ,  $\mathbb{P}_i \perp \mathbb{P}_j$  при  $i \neq j$ . Для каждого подпространства  $\mathbb{P}_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) построим линейное многообразие  $\mathbb{L}_i$  следующим образом. Пусть  $\bar{x}^i \in \text{Arg min}_{x \in M} \rho(\mathbb{P}_i, x)$ . Положим  $\bar{z}^i = \pi_{\mathbb{P}_i^\perp}(\bar{x}^i) \in \mathbb{P}_i^\perp$ . Здесь  $\mathbb{P}_i^\perp$  обозначает ортогональное дополнение к подпространству  $\mathbb{P}_i$ . Построим линейное многообразие  $\mathbb{L}_i$  путем сдвига подпространства  $\mathbb{P}_i$  на вектор  $\bar{z}^i$ :

$$\mathbb{L}_i = \mathbb{P}_i + \bar{z}^i. \quad (7)$$

Для каждого  $i \in \{1, \dots, r\}$  определим отображение

$$\varphi_i(x) = \pi_{\mathbb{L}_i}(\varphi(\pi_{\mathbb{L}_i}(x))). \quad (8)$$

Зафиксируем некоторое натуральное число  $s$  и положительное вещественное число  $\varepsilon$ . Зададим произвольное начальное приближение  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Алгоритм состоит из следующих шагов:

Шаг 0.  $k := 0$ .

Шаг 1.  $x_{k+1} := \sum_{i=1}^r (\varphi_i^s(x_k) - \bar{z}^i)$ .

Шаг 2.  $d := \sum_{j=1}^m l_j^+(x_{k+1})$ .

Шаг 3.  $k := k + 1$ .

Шаг 4. Если  $d \geq \varepsilon$  и  $\|x_{k+1} - x_k\| \neq 0$ , перейти на шаг 1.

Шаг 5. Стоп.

На шаге 2 вычисляется невязка  $d$ , которая определяет степень близости точки  $x_{k+1}$  к выпуклому замкнутому множеству  $M$ .

### 3. Сходимость алгоритма $\mathfrak{S}$

Для доказательства сходимости нам понадобится следующая теорема, показывающая, что каждое отображение  $\varphi_i \in \{\mathbb{L}_i \rightarrow \mathbb{L}_i\}$ , строящееся в алгоритме  $\mathfrak{S}$ , является фейеровским относительно множества  $\mathbb{L}_i \cap M$ .

#### Теорема 1.

Пусть задано выпуклое замкнутое множество  $M \subset \mathbb{R}^n$  и однозначное  $M$ -фейеровское отображение  $\varphi \in \{\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ . Пусть  $\mathbb{P}$  – некоторое собственное линейное подпространство в пространстве  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{T} = \mathbb{P}^\perp$  – ортогональное дополнение к подпространству  $\mathbb{P}$ . Пусть  $\bar{x} \in \text{Arg min}_{x \in M} \rho(\mathbb{P}, x)$ . Представим  $\bar{x}$  в виде суммы ортогональных векторов из подпространств  $\mathbb{P}$  и  $\mathbb{T}$ :  $\bar{x} = \pi_{\mathbb{P}}(\bar{x}) + \pi_{\mathbb{T}}(\bar{x})$ . Обозначим  $\bar{z} = \pi_{\mathbb{T}}(\bar{x}) \in \mathbb{T}$ . Построим линейное многообразие  $\mathbb{L}$  путем сдвига подпространства  $\mathbb{P}$  на вектор  $\bar{z}$ :  $\mathbb{L} = \mathbb{P} + \bar{z}$ . Определим отображение  $\varphi_{\mathbb{L}} \in \{\mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}\}$  следующим образом:

$$\varphi_{\mathbb{L}}(x) = \pi_{\mathbb{L}}(\varphi(\pi_{\mathbb{L}}(x))). \quad (9)$$

Положим

$$M_{\mathbb{L}} = \mathbb{L} \cap M. \quad (10)$$

Тогда отображение  $\varphi_{\mathbb{L}}$  является  $M_{\mathbb{L}}$ -фейеровским.

Доказательство. Сначала покажем, что

$$\varphi_{\mathbb{L}}(y) = y, \quad \forall y \in M_{\mathbb{L}}. \quad (11)$$

Пусть  $y \in M_{\mathbb{L}}$ . Тогда, в силу (10),  $y \in M$ . Так как отображение  $\varphi$  является  $M$ -фейеровским, то  $\varphi(y) = y$ . Учитывая, что  $y \in \mathbb{L}$ , отсюда получаем  $\varphi_{\mathbb{L}}(y) = \pi_{\mathbb{L}}(\varphi(\pi_{\mathbb{L}}(y))) = \pi_{\mathbb{L}}(\varphi(y)) = \pi_{\mathbb{L}}(y) = y$ . Таким образом, условие (11) имеет место.

Теперь покажем, что

$$\|\varphi_{\mathbb{L}}(x) - y\| < \|x - y\|, \quad \forall y \in M_{\mathbb{L}}, \quad \forall x \notin M_{\mathbb{L}}. \quad (12)$$

Пусть  $y \in M_{\mathbb{L}}$ ,  $x \in \mathbb{L}$ ,  $x \notin M_{\mathbb{L}}$ . Из (10) следует, что в этом случае  $x \notin M$ . Так как отображение  $\varphi$  является  $M$ -фейеровским, то

$$\|\varphi(x) - y\| < \|x - y\|. \quad (13)$$

Построим для  $\varphi(x)$  и  $y$  их разложение в виде суммы двух ортогональных векторов, принадлежащих  $\mathbb{P}$  и  $\mathbb{T}$  соответственно:

$$\varphi(x) = \pi_{\mathbb{P}}(\varphi(x)) + \pi_{\mathbb{T}}(\varphi(x)), \quad (14)$$

$$y = \pi_{\mathbb{P}}(y) + \bar{z}. \quad (15)$$

Подставляя эти разложения в (13), получаем

$$\|\pi_{\mathbb{P}}(\varphi(x)) + \pi_{\mathbb{T}}(\varphi(x)) - (\pi_{\mathbb{P}}(y) + \bar{z})\| < \|x - y\|. \quad (16)$$

Сделав перекомпоновку, будем иметь

$$\|(\pi_{\mathbb{P}}(\varphi(x)) - \pi_{\mathbb{P}}(y)) + (\pi_{\mathbb{T}}(\varphi(x)) - \bar{z})\| < \|x - y\|. \quad (17)$$

Замечаем, что  $(\pi_{\mathbb{P}}(\varphi(x)) - \pi_{\mathbb{P}}(y)) \in \mathbb{P}$  и  $(\pi_{\mathbb{T}}(\varphi(x)) - \bar{z}) \in \mathbb{T}$  – взаимно ортогональные векторы. В силу того, что квадрат нормы суммы ортогональных векторов равен сумме квадратов их норм, из (17) следует

$$\|\pi_{\mathbb{P}}(\varphi(x)) - \pi_{\mathbb{P}}(y)\|^2 + \|\pi_{\mathbb{T}}(\varphi(x)) - \bar{z}\|^2 < \|x - y\|^2. \quad (18)$$

В левой части неравенства стоит сумма двух неотрицательных слагаемых. Удалив второе из них, мы снова получим справедливое неравенство:

$$\|\pi_{\mathbb{P}}(\varphi(x)) - \pi_{\mathbb{P}}(y)\|^2 < \|x - y\|^2,$$

откуда, в свою очередь, получаем

$$\|\pi_{\mathbb{P}}(\varphi(x)) - \pi_{\mathbb{P}}(y)\| < \|x - y\|. \quad (19)$$

По построению  $\mathbb{L}$  имеем  $\pi_{\mathbb{P}}(\varphi(x)) = \pi_{\mathbb{L}}(\varphi(x)) - \bar{z}$ . Подставляя это выражение в (19), получаем

$$\|\pi_{\mathbb{L}}(\varphi(x)) - \bar{z} - \pi_{\mathbb{P}}(y)\| < \|x - y\|,$$

или

$$\|\pi_{\mathbb{L}}(\varphi(x)) - (\pi_{\mathbb{P}}(y) + \bar{z})\| < \|x - y\|. \quad (20)$$

Так как  $x \in \mathbb{L}$ , то  $x = \pi_{\mathbb{L}}(x)$ . Подставив в левой части неравенства (20) выражение  $\pi_{\mathbb{L}}(x)$  вместо  $x$ , получим

$$\|\pi_{\mathbb{L}}(\varphi(\pi_{\mathbb{L}}(x))) - (\pi_{\mathbb{P}}(y) + \bar{z})\| < \|x - y\|.$$

С учетом (9) и (15), отсюда

$$\|\varphi_{\mathbb{L}}(x) - y\| < \|x - y\|,$$

то есть условие (12) справедливо. Теорема доказана.  $\square$

Прежде чем приступить к доказательству сходимости алгоритма  $\mathfrak{S}$ , докажем следующую лемму.

**Лемма 1.**

*Пусть  $\{x_k\}$  – последовательность точек, порождаемых алгоритмом  $\mathfrak{S}$  на шаге 1:*

$$x_{k+1} := \sum_{i=1}^r \left( \varphi_i^s(x_k) - \bar{z}^i \right); \quad k = 0, 1, \dots \quad (21)$$

*В условиях алгоритма  $\mathfrak{S}$  определим  $M_{\mathbb{L}_i} = \mathbb{L}_i \cap M$ . Положим*

$$x_0^i = \pi_{\mathbb{L}_i}(x_0), \quad x_{k+1}^i = \varphi_i(x_k^i). \quad (22)$$

*Тогда*

$$\varphi_i^s(x_k) = x_{s \cdot (k+1)}^i, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (23)$$

*Доказательство.* Доказательство проведем индукцией по  $k$ . Пусть  $k = 0$ . В силу (8) имеем

$$\varphi_i^s(x_0) = \varphi_i^{s-1} \left( \pi_{\mathbb{L}_i} \left( \varphi \left( \pi_{\mathbb{L}_i}(x_0) \right) \right) \right).$$

Используя первое равенство из (22), получаем

$$\varphi_i^s(x_0) = \varphi_i^{s-1} \left( \pi_{\mathbb{L}_i} \left( \varphi(x_0^i) \right) \right). \quad (24)$$

Так как  $x_0^i \in \mathbb{L}_i$ , то  $x_0^i = \pi_{\mathbb{L}_i}(x_0^i)$ . Подставляя  $\pi_{\mathbb{L}_i}(x_0^i)$  вместо  $x_0^i$  в (24), получаем

$$\varphi_i^s(x_0) = \varphi_i^{s-1} \left( \pi_{\mathbb{L}_i} \left( \varphi \left( \pi_{\mathbb{L}_i}(x_0^i) \right) \right) \right).$$

С учетом (8), отсюда

$$\varphi_i^s(x_0) = \varphi_i^s(x_0^i).$$

Применяя правое равенство из (22), отсюда получаем

$$\varphi_i^s(x_0) = \varphi_i^{s-1}(x_1^i).$$

Повторив эту подстановку еще  $(s - 1)$  раз, получим

$$\varphi_i^s(x_0) = x_s^i,$$

то есть база индукции имеет место. Пусть теперь  $k > 0$ . Рассмотрим тривиальное тождество

$$\varphi_i^s(x_k) = \varphi_i^s(x_k). \quad (25)$$

В силу (21)  $x_k := \sum_{j=1}^r (\varphi_j^s(x_{k-1}) - \bar{z}^j)$ . Подставляя это значение в правую часть тождества (25), получаем

$$\varphi_i^s(x_k) = \varphi_i^s \left( \sum_{j=1}^r (\varphi_j^s(x_{k-1}) - \bar{z}^j) \right).$$

Отсюда по предположению индукции

$$\varphi_i^s(x_k) = \varphi_i^s \left( \sum_{j=1}^r (\varphi_j^s(x_{s \cdot (k-1)}^j) - \bar{z}^j) \right).$$

Это равносильно

$$\varphi_i^s(x_k) = \varphi_i^{s-1} \left( \varphi_i^s \left( \sum_{j=1}^r (\varphi_j^s(x_{s \cdot (k-1)}^j) - \bar{z}^j) \right) \right).$$

Используя (8), получаем

$$\varphi_i^s(x_k) = \varphi_i^{s-1} \left( \pi_{\mathbb{L}_i} \left( \varphi \left( \pi_{\mathbb{L}_i} \left( \sum_{j=1}^r (\varphi_j^s(x_{s \cdot (k-1)}^j) - \bar{z}^j) \right) \right) \right) \right).$$

В силу (6) и (7) отсюда следует

$$\varphi_i^s(x_k) = \varphi_i^{s-1} \left( \pi_{\mathbb{L}_i} \left( \varphi \left( \pi_{\mathbb{P}_i} \left( \sum_{j=1}^r (\varphi_j^s(x_{s \cdot (k-1)}^j) - \bar{z}^j) \right) + \bar{z}^i \right) \right) \right).$$

Так как  $\varphi_j^s(x_{s \cdot (k-1)}^j) - \bar{z}^j \in \mathbb{P}_j$  ( $j = 1, \dots, r$ ) и  $\mathbb{P}_i \perp \mathbb{P}_j$  при  $i \neq j$ , то из предыдущего получаем

$$\varphi_i^s(x_k) = \varphi_i^{s-1} \left( \pi_{\mathbb{L}_i} \left( \varphi \left( \varphi_i^s(x_{s \cdot (k-1)}^i) - \bar{z}^i + \bar{z}^i \right) \right) \right),$$

то есть

$$\varphi_i^s(x_k) = \varphi_i^{s-1} \left( \pi_{\mathbb{L}_i} \left( \varphi \left( \varphi_i^s(x_{s \cdot (k-1)}^i) \right) \right) \right). \tag{26}$$

Из (8) следует  $\varphi_i^s(x_{s \cdot (k-1)}^i) \in \mathbb{L}_i$ , поэтому  $\varphi_i^s(x_{s \cdot (k-1)}^i) = \pi_{\mathbb{L}_i}(\varphi_i^s(x_{s \cdot (k-1)}^i))$ . Подставляя  $\pi_{\mathbb{L}_i}(\varphi_i^s(x_{s \cdot (k-1)}^i))$  вместо  $\varphi_i^s(x_{s \cdot (k-1)}^i)$  в (26), получаем

$$\varphi_i^s(x_k) = \varphi_i^{s-1} \left( \pi_{\mathbb{L}_i} \left( \varphi \left( \pi_{\mathbb{L}_i} \left( \varphi_i^s(x_{s \cdot (k-1)}^i) \right) \right) \right) \right).$$

В силу (8) отсюда получаем

$$\varphi_i^s(x_k) = \varphi_i^{s-1} \left( \varphi_i \left( \varphi_i^s(x_{s \cdot (k-1)}^i) \right) \right),$$

или, что – то же самое

$$\varphi_i^s(x_k) = \varphi_i^{2s}(x_{s \cdot (k-1)}^i).$$

Применяя правое равенство из (22), отсюда получаем

$$\varphi_i^s(x_k) = \varphi_i^{2s-1}(x_{s \cdot (k-1)+1}^i).$$

Повторив эту подстановку еще  $(2s - 1)$  раз, получим

$$\varphi_i^s(x_k) = x_{s \cdot (k-1) + 2s}^i,$$

то есть

$$\varphi_i^s(x_k) = x_{s \cdot (k+1)}^i,$$

что и требовалось доказать.  $\square$

Сходимость алгоритма  $\mathfrak{S}$  обеспечивается следующей теоремой.

**Теорема 2.**

*Пусть  $\{x_k\}$  – последовательность точек, порождаемых алгоритмом  $\mathfrak{S}$  на шаге 1:*

$$x_{k+1} := \sum_{i=1}^r \left( \varphi_i^s(x_k) - \bar{z}^i \right); \quad k = 0, 1, \dots \quad (27)$$

Тогда

$$\{x_k\}_{k=0}^{+\infty} \rightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n.$$

*Доказательство.* В условиях алгоритма  $\mathfrak{S}$  определим

$$M_{\mathbb{L}_i} = \mathbb{L}_i \cap M \quad (i = 1, \dots, r).$$

По теореме 1 отображение  $\varphi_i$  является  $M_{\mathbb{L}_i}$ -фейеровским. Положим

$$x_0^i = \pi_{\mathbb{L}_i}(x_0), \quad x_{k+1}^i = \varphi_i(x_k^i). \quad (28)$$

В силу непрерывности отображений  $\pi_{\mathbb{L}_i}$  и  $\varphi$  [3] отображение  $\varphi_i$  – также непрерывно. Отсюда по лемме 39.1 [3] имеем

$$\{x_k^i\}_{k=0}^{+\infty} \rightarrow \bar{x}^i \in M_{\mathbb{L}_i}, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\}. \quad (29)$$

Определим

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^r (\bar{x}^i - \bar{z}^i). \quad (30)$$

Зададим произвольное вещественное число  $\varepsilon$ . В силу (29) существует  $K_i$  такой, что

$$\|x_k^i - \bar{x}^i\| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{r}}, \quad \forall k > K_i. \quad (31)$$

Положим  $K = \max_{1 \leq i \leq r} K_i$ . Покажем, что  $\forall k > K$  справедливо  $\|x_k - \bar{x}\| < \varepsilon$ . Зафиксируем произвольное  $k > K$ . В силу (27) имеем

$$\|x_k - \bar{x}\| = \left\| \left( \sum_{i=1}^r (\varphi_i^s(x_{k-1}) - \bar{z}^i) \right) - \bar{x} \right\|.$$

Используя (30), получаем

$$\|x_k - \bar{x}\| = \left\| \sum_{i=1}^r (\varphi_i^s(x_{k-1}) - \bar{z}^i) - \sum_{i=1}^r (\bar{x}^i - \bar{z}^i) \right\|.$$



Сгруппировав, получим

$$\|x_k - \bar{x}\| = \left\| \sum_{i=1}^r (\varphi_i^s(x_{k-1}) - \bar{z}^i - \bar{x}^i + \bar{z}^i) \right\|,$$

или, что то же самое

$$\|x_k - \bar{x}\| = \left\| \sum_{i=1}^r (\varphi_i^s(x_{k-1}) - \bar{x}^i) \right\|. \quad (32)$$

По лемме 1 отсюда следует

$$\|x_k - \bar{x}\| = \left\| \sum_{i=1}^r (x_{s,k}^i - \bar{x}^i) \right\|. \quad (33)$$

Так как  $x_{s,k}^i = \pi_{\mathbb{P}_i}(x_{s,k}^i) + \bar{z}^i$  и  $\bar{x}^i = \pi_{\mathbb{P}_i}(\bar{x}^i) + \bar{z}^i$ , то, подставляя указанные выражения в (33), получим

$$\|x_k - \bar{x}\| = \left\| \sum_{i=1}^r (\pi_{\mathbb{P}_i}(x_{s,k}^i) + \bar{z}^i - \pi_{\mathbb{P}_i}(\bar{x}^i) - \bar{z}^i) \right\|,$$

то есть

$$\|x_k - \bar{x}\| = \left\| \sum_{i=1}^r (\pi_{\mathbb{P}_i}(x_{s,k}^i) - \pi_{\mathbb{P}_i}(\bar{x}^i)) \right\|. \quad (34)$$

Замечаем, что в (34) под знаком суммы стоят взаимно ортогональные векторы. Квадрат нормы суммы ортогональных векторов равен сумме квадратов их норм. Поэтому из (34) следует

$$\|x_k - \bar{x}\|^2 = \sum_{i=1}^r \left\| \pi_{\mathbb{P}_i}(x_{s,k}^i) - \pi_{\mathbb{P}_i}(\bar{x}^i) \right\|^2.$$

Это равносильно

$$\|x_k - \bar{x}\|^2 = \sum_{i=1}^r \left\| \pi_{\mathbb{P}_i}(x_{s,k}^i) + \bar{z}^i - \pi_{\mathbb{P}_i}(\bar{x}^i) - \bar{z}^i \right\|^2.$$

Так как  $x_{s,k}^i = \pi_{\mathbb{P}_i}(x_{s,k}^i) + \bar{z}^i$  и  $\bar{x}^i = \pi_{\mathbb{P}_i}(\bar{x}^i) + \bar{z}^i$ , отсюда получаем

$$\|x_k - \bar{x}\|^2 = \sum_{i=1}^r \left\| (x_{s,k}^i - \bar{x}^i) \right\|^2.$$

С учетом (31), отсюда следует

$$\|x_k - \bar{x}\|^2 < \sum_{i=1}^r \left( \frac{\varepsilon}{\sqrt{r}} \right)^2 = r \left( \frac{\varepsilon}{\sqrt{r}} \right)^2 = \varepsilon^2,$$

то есть

$$\|x_k - \bar{x}\| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. □

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09-01-00546а.*

## Литература

1. Еремин, И.И. Нестационарные процессы математического программирования / И.И. Еремин, В.Д. Мазуров. – М.: Наука, 1979. – 228 с.
2. Еремин, И.И. Фейеровские методы сильной отделимости выпуклых полиэдральных множеств / И.И. Еремин // Известия вузов. Сер. математика. – 2006. – № 12. – С. 33 – 43.
3. Еремин, И.И. Теория линейной оптимизации / И.И. Еремин. – Екатеринбург: «Екатеринбург», 1999. – 312 с.
4. Ершова, А.В. Алгоритм разделения двух выпуклых непересекающихся многогранников с использованием фейеровских отображений / А.В. Ершова // Системы управления и информационные технологии. – 2009. – № 1(35). – С. 53 – 56.

## References

1. Eremin I.I., Mazurov V.D. *Nestatsionarnye protsessy matematicheskogo programmirovaniya* [Nonstationary processes of mathematical programming]. Moscow, Nauka, 1979. 288 p.
2. Eremin I.I. Fejerovskie metody sil'noy otdelimosti vypuklykh poliedral'nykh mnozhestv [Fejer methods for the strong separability of convex polyhedral sets]. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 2006, no. 12, pp. 33 – 43.
3. Eremin I.I. *Teoriya lineynoy optimizatsii* [Theory of linear optimization]. Ekaterinburg, «Ekaterinburg», 1999. 312 p.
4. Ershova A.V. Algoritm razdeleniya dvukh vypuklykh neperesekayushchikhsya mnogogrannikov s ispolzovaniem feyerovskikh otobrazheniy [The algorithm of separation of two convex not intersect polyhedral using Fejer's mappings]. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii* [Controlling system and information technology], 2009, № 1(35), pp. 53 – 56.

Арина Владимировна Ершова, аспирант, кафедра дифференциальных уравнений и динамических систем, Южно-Уральский государственный университет (Россия, г. Челябинск), [ershovaav@gmail.com](mailto:ershovaav@gmail.com).

Arina Vladimirovna Ershova, Postgraduate Student, Department of Differential Equations and Dynamic Systems, South Ural State University, [ershovaav@gmail.com](mailto:ershovaav@gmail.com).

Ирина Михайловна Соколинская, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра дифференциальных уравнений и динамических систем, Южно-Уральский государственный университет (Россия, г. Челябинск), [irinasokolinsky@gmail.com](mailto:irinasokolinsky@gmail.com).

Irina Mikhailovna Sokolinskaya, Candidate of Physico-mathematical Sciences, Assistant Professor, Department of Differential Equations and Dynamic Systems, South Ural State University, [irinasokolinsky@gmail.com](mailto:irinasokolinsky@gmail.com).

*Поступила в редакцию 20 июля 2011 г.*