Математика

УДК 517.946

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НЕИЗВЕСТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В КВАЗИЛИНЕЙНОМ ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

Р.А. Алиев[1]

Обратные задачи по определению коэффициентов дифференциальных уравнений с частными производными представляют интерес во многих прикладных исследованиях. Эти задачи приводят к необходимости приближенного решения обратных задач математической физики, которые некорректны в классическом смысле. В работе рассматриваются обратные задачи в определении неизвестных коэффициентов в квазилинейном эллиптическом уравнении. Доказаны теоремы существования, единственности и устойчивости решения обратных задач для квазилинейного уравнения эллиптического типа.

Ключевые слова: обратная задача, квазилинейное уравнение эллиптического типа.

1. Постановка задачи

Обратные задачи для дифференциальных уравнений состоят в отыскании коэффициентов и правых частей по некоторой дополнительной информации о решении [1, 2]. Единственность решения обратных задач для линейных и нелинейных уравнений эллиптического типа рассмотрены в работах [3–10]. В работе также рассмотрена некорректная обратная задача в определении неизвестных коэффициентов в квазилинейном эллиптическом уравнении.

Пусть D – ограниченная область n-мерного евклидова пространства E^n, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ – произвольная точка области D, Γ – граница области D, предполагаемая достаточно гладкой и p_0, p_1 – заданные числа, $Q\equiv[p_0,p_1]$. Пусть $I=\{1,2,...,n\}$, $i_0\in I$.

Рассмотрим задачу об определении $\{k_1(u),k_2(u),...,k_n(u),\ q(u),\ u(x,p)\}$ из следующих условий:

$$-\sum_{i=1}^{n} k_i(u)u_{x_ix_i}+q(u)u=h(x,p),\ x\in D,\ p\in Q, \tag{1}$$

$$u(x,p)\big|_{\Gamma}=f(\xi,p),\ \ \xi\in\Gamma,\ \ p\in Q, \tag{2}$$

$$k_i(F_i)u_\nu(\xi_i,p)=g_i(p),\ \xi_i\in\Gamma,\ i=1,2,...n,\ p\in Q, \tag{3}$$

$$k_{i_0}(F_{n+1})u_\nu(\xi_{n+1},p)=q(F_{n+1})\phi(p)+g_{n+1}(p),\ \xi_{n+1}\in\Gamma,\ p\in Q, \tag{4}$$

где $\xi_i, i=1,2,...,n+1$ – фиксированные точки границы Γ, $F_i\equiv F_i(p)=f(\xi_i,p),\ i=1,2,...,n,\ h(x,p)$, $\phi(p),\ f(\xi,p), g_i(p),\ i=1,2,...,n+1$ – заданные функции, $g_i(p)\in Lip(Q),\ i=1,2,...,n+1,\ \ \phi(p)\in$ $\in Lip(Q),\ h(x,p),\ f(\xi,p)$ при любом $p\in Q$ принадлежат соответственно пространствам $C^\alpha(\overline{D}),\ C^{2+\alpha}(\Gamma)$, $0<\alpha<1$, ν – направление внешней нормали к границе Γ, в точке $\xi_i, i=1,2,...,n+1,\ u_\nu(\xi_i,p)\equiv\dfrac{\partial u}{\partial\nu}(\xi_i,p),\ \ i=1,2,...,n+1,\ Lip$ – пространство функций, удовлетворяющих условию Липшица, R_1, R_2 – некоторые числа.

Заметим, что условия (3) в теплофизических задачах являются выражением теплового потока через достаточно малую окрестность точки $\xi_i, i=1,2,...,n$. В этих же задачах условие (4) означает, что в окрестности точки ξ_{n+1} происходит теплообмен по закону Ньютона. По этой же

[1] Алиев Рамиз Аташ оглы – доцент, кафедра информатики, Азербайджанский университет кооперации, г. Баку.
e-mail: ramizaliyev3@rambler.ru

причине в уравнении (1) присутствует слагаемое $q(u)u(x,p)$. Если известны коэффициенты $k_i(u),\ i=1,2,...,n$, то отпадает условие (3), в противном случае, при известном $q(u)$, условие (4).

При совпадении коэффициентов $k_i(u),\ i=1,2,...,n$ постановка задачи совпадает с постановкой задачи работы $[3]$.

Определение 1. Функции $\{k_1(u),\ k_2(u),...,k_n(u),\ q(u),\ u(x,p)\}$ назовем решением задачи (1)–(4), если $0<k_i(u)\in C[R_1,R_2], i=1,2,...,n,\ 0<q(u)\in C\ [R_1,R_2]$, $u(x,p)\in C(\overline{D}xQ)$, $u(x,p)$ при любом p принадлежит $C^2(D)$, существуют пределы $u_{x_i}(x,p), i=1,2,...,n$ при $x\to\xi_i\in\Gamma$, $i=1,2,...,n+1$, $R_1\le u(x,p)\le R_2$ и удовлетворяются соотношения (1)–(4).

Предположим, что $f(\xi,p)=f_1(\xi)f_2(p)$. Обозначим $\min\limits_{\xi\in\Gamma} f_1(\xi)=r_1, \max\limits_{\xi\in\Gamma} f_2(\xi)=r_2$. Предположим, что функции $F_i(p),\ i=1,2,...,n+1$ имеют обратную функции $\Phi_i(F_i),\ \ i=1,2,...,n+1$ определенные на $[r_1,r_2]$ области значения обозначенной Q и принадлежащие $Lip(Q)$. Предположим, что коэффициенты $k_i(u)\in Lip[R_1,R_2], i=1,2,...,n$ и $q(u)\in Lip[R_1,R_2]$ в области $[R_1,R_2]/[r_1,r_2]$ являются заданными функциями, принадлежащими пространству Липшица.

Нетрудно проверить, что если решение задачи (1)–(4) существует, то при принятых предположениях о гладкости данных задачи $k_i(u)\in Lip[R_1,R_2],\ i=1,2,...,n,$ $q(u)\in Lip[R_1,R_2]$, $u(x,p)\in C^{2+\alpha}(\overline{D})$ при $\forall p\in Q$ и $u(x,p)$ по p удовлетворяет условию Липшица. Действительно, при принятых предположениях из общей теории эллиптических уравнений следует, что $u(x,p)\in W_{p_1}{}^2(D)\subset C^{1+\alpha}(\overline{D})$ при $p_1>n,\ \ \forall p\in Q$. Поэтому из дополнительных условий (3) и (4) следует, что $k_i(u)\in Lip[R_1R_2],\ i=1,2,...,n,$ $q(u)\in Lip[R_1,R_2]$. Тогда $u(x,p)\in C^{2+\alpha}(\overline{D})$ при $\forall p\in Q$ и удовлетворяет условию Липшица по p $[11]$.

2. Единственность и устойчивость решения

Пусть, кроме задачи (1)–(4), задана еще задача $(\overline{1})-(\overline{4})$, где все функции, входящие в (1)–(4) заменены соответствующими функциями с чертой. Положим

$$Z(x,p)=\overline{u}(x,p)-u(x,p), \lambda_i(\overline{u},u)=\overline{k}_i(\overline{u})-k_i(u),\ i=1,2,...,n, \mu(\overline{u},u)=\overline{q}(\overline{u})-q(u),$$
$$\delta_1(x,p)=\overline{h}(x,p)-h(x,p),\ \delta_2(\xi,p)=\overline{f}(\xi,p)-f(\xi,p),\ \delta_3(p)=\overline{\phi}(p)-\phi(x),\ \delta_{1i}(p)=\overline{g}_i(p)-g_i(p),$$
$$i=1,2,...,n+1.$$

Через $\tilde{\delta}_2(x,p)$ обозначим функцию на границе Γ, совпадающую соответственно с $\delta_2(\xi,p)$ и при любом p принадлежащую $C^{2+\alpha}(\overline{D})$. Функция $\tilde{f}(x,p)$ на Γ совпадает соответственно с $f(\xi,p)$ и принадлежит $C^{2+\alpha}(\overline{D})$.

Определение 2. Если для произвольного $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что при выполнении условий

$$\max_p \left\|\delta_1(x,p)\right\|_{C(\overline{D})}<\delta,\ \max_p \left\|\tilde{\delta}_2(x,p)\right\|_{C^2(\overline{D})}<\delta,\ \max_p\left|\delta_3(p)\right|<\delta,\ \max_p\left|\delta_{1i}(p)\right|<\delta, i=1,2,...,n+1 \quad (5)$$

выполняются неравенства $\left|Z(x,p)\right|<\varepsilon, \left|\lambda_i(\overline{u},u)\right|<\varepsilon,\ i=1,2,...,n,\ \left|\mu(\overline{u},u)\right|<\varepsilon$ при $x\in\overline{D},\ \ p\in Q$, тогда скажем, что решение задачи (1)–(4) устойчиво.

Единственность решения обратной задачи (1)–(4) в предположении его существования доказывает теорема 1.

Теорема 1. Пусть $g_1(p)\ne 0$, $\phi(p)\ne 0$, $N\cdot mesD<1$. Тогда решение задачи (1)–(4) единственно и устойчиво. N – положительная постоянная, зависящая от данных и решений задачи.

Доказательство. Из $(\overline{1})-(\overline{4})$ соответственно вычтем (1)–(4) и положим $Z_1(x,p)=$ $=Z(x,p)-\tilde{\delta}_2(x,p)$. Тогда получим

$$-\sum_{i=1}^{n}\bar{k}_i(\bar{u})Z_{1x_ix_i}+\bar{q}(\bar{u})Z_1=\delta_4(x,p)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x,p)\lambda_i(\bar{u},u)+\beta(x,p)\mu(\bar{u},u), \quad (6)$$

$$Z_1(x,p)\big|_{\Gamma}=0, \quad (7)$$

$$\lambda_i(\bar{F}_i,F_i)=\delta_5(p)+\gamma_i(p)Z_{1\nu}(\xi_i,p),\ i=1,2,...,n, \quad (8)$$

$$\mu(\bar{F}_{n+1},F_{n+1})=\delta_6(p)+\gamma_{n+1}(p)Z_{1\nu}(\xi_{n+1},p)+\ \gamma_{n+2}(p)\lambda_{i_0}(\bar{F}_{n+1},F_{n+1}), \quad (9)$$

где $\alpha_i(x,p)=u_{x_ix_i}, i=1,2,...,n,\ \beta(x,p)=-u$, $\delta_4(x,p)=\delta_1(x,p)+\sum_{i=1}^{n}\bar{k}_i(\bar{u})\tilde{\delta}_{2x_ix_i}(x,p)-\bar{q}(\bar{u})\tilde{\delta}_2(x,p)$,

$$\gamma_i(p)=-\bar{k}_i(\bar{F}_i)[u_\nu(\xi_i,p)]^{-1},\ i=1,2,...,n,\ \delta_5(p)=[\delta_{1i}(p)-\bar{k}_i(\bar{F}_1)\tilde{\delta}_{2\nu}(\xi_i,p)]\times[u_\nu(\xi_i,p)]^{-1},\ i=1,2,...,n,$$

$$\delta_6(p)=[-\delta_{1,n+1}(p)-\bar{q}(\bar{F}_{n+1})\delta_3(p)+\bar{k}_{i_0}(\bar{F}_2)\tilde{\delta}_{2\nu}(\xi_{n+1},p)]\times[\phi(p)]^{-1},\ \gamma_{n+1}(p)=-\bar{k}_{i_0}(\bar{F}_{n+1})[\phi(p)]^{-1},$$

$$\gamma_{n+2}(p)=u_\nu(\xi_{n+1},p)[\phi(p)]^{-1}.$$

При помощи функции Грина [12] из (6)–(7) определим функцию $Z_1(x,p)$ через правую часть равенства и это выражение подставим в условие (8) и (9). Тогда получим

$$\lambda_i(\bar{F}_i,F_i)=\delta_5(p)+\gamma_1(p)\int_D\frac{\partial}{\partial\nu}G(\xi_i,\theta)\Big\{\delta_4(\theta,p)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\theta,p)\lambda_i(\bar{u},u)+\beta(\theta,p)\mu(\bar{u},u)\Big\}d\theta, i=1,2,...,n,$$

$$\mu(\bar{F}_{n+1},F_{n+1})=\delta_6(p)+\gamma_{n+1}(p)\int_D\frac{\partial}{\partial\nu}G(\xi_1,\theta)\Big\{\delta_4(\theta,p)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\theta,p)\lambda_i(\bar{u},u)+\beta(\theta,p)\mu(\bar{u},u)\Big\}d\theta+$$
$$+\gamma_{n+2}(p)\lambda_{i_0}(\bar{F}_{n+1},F_{n+1}). \quad (10)$$

Теперь в системе (10) положим $\chi=\max_u\sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i(\bar{u},u)\right|+\max_u\left|\mu(\bar{u},u)\right|$.

Тогда из системы (10) следует, что

$$\begin{aligned}&\left|\lambda_i(\bar{F}_i,F_i)\right|\le\delta_7(p)+\chi\int_D K_1(\xi_i,\theta)d\theta, i=1,2,...,n,\\&\left|\mu(\bar{F}_{n+1},F_{n+1})\right|\le\delta_8(p)+\chi\int_D K_2(\xi_{n+1},\theta)d\theta+\left|\gamma_2(p)\right|\left|\lambda_{i_0}(\bar{F}_{n+1},F_{n+1})\right|.\end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $\delta_i(p)$, $i=7,8$ – функции, стремящиеся к нулю при условиях (5).

Функция Грина и полученные из оценок производных функций Грина функции $K_i(\xi_i,\theta)$ $,i=1,2$ имеют следующую оценку $[12]$:

$$\left|G(x,\theta)\right|\le M_1\left|x-\theta\right|^{2-n},\ M_1>0,\ \left|K_i(\xi_i,\theta)\right|\le M_{i+1}\left|\xi_i-\theta\right|^{1-n}>0, M_{i+1}>0, i=1,2,...,n. \quad (12)$$

При достаточно малой мере D для указанных интегралов в (11) существуют оценки $M[mesD]^{1/n}$, $M>0$. Из системы (11) получим

$$\chi\le\delta_9(p)+\chi NmesD.$$

По условию теоремы $\beta=NmesD<1$. Тогда для χ имеем

$$\chi\le(1-\beta)^{-1}\delta_9(p).$$

Следовательно, χ стремится к нулю при $\delta\to0$ в условиях (5). Теорема доказана.

3. Метод последовательных приближений

Метод последовательных приближений для решения задачи (1)–(4) применялся по следующей схеме:

$$-\sum_{i=1}^{n}k_i^{(S)}(u^{(S)})u_{x_ix_i}^{(S+1)}+q^{(S)}(u^{(S)})u^{(S+1)}=h(x,p),\ x\in D,\ p\in Q, \quad (13)$$

$$u^{(S+1)}(x,p)\big|_{\Gamma}=f(\xi,p),\ \xi\in\Gamma,\ \ p\in Q, \quad (14)$$

$$k_i^{(S+1)}(u^{(S+1)})u_\nu^{(S+1)}(\xi_i,\Phi_i(u^{(S+1)}))=g_i(\Phi_i(u^{(S+1)}))\,,\xi_i\in\Gamma,\qquad i=1,2,...,n, \tag{15}$$

$$k_{i_0}^{(S+1)}(u^{(S+1)})u_\nu^{(S+1)}(\xi_{n+1},\Phi_{n+1}(u^{(S+1)}))=q^{(S+1)}(u^{(S+1)})\ \phi(\Phi_{n+1}(u^{(S+1)}))+g_2(\Phi_{n+1}(u^{(S+1)}))\,,\xi_{n+1}\in\Gamma, \tag{16}$$

где $\Phi_i(F_i)$, $i=1,2,...,n+1$ являются обратными соответственно к функциям $F_i(p)=$ $=f(\xi_i,p)$, $i=1,2,...,n+1$. По схеме (13)–(16) последовательные итерации проводятся следующим образом: сперва выбираются некоторые $k_i^{(0)}(u^{(0)})>0, i=1,2,...,n,$ $q^{(0)}(u^{(0)})>0$, принадлежащие $Lip[R_1,R_2]$, и подставляются в уравнение (13). Далее решается задача (13)–(14) и находится $u^{(1)}(x,p)$. По функциям $u_\nu^{(1)}(\xi_i,\Phi_i(u^{(1)}))$, $i=1,2,...,n+1$ из условий (15), (16) находятся $k_i^{(1)}(u^{(1)}), i=1,2,...,n$ $q^{(1)}(u^{(1)})$ и эти функции используются для проведения следующего шага итерации.

Теорема 2. Пусть решение задачи (1)–(4) существует и при всех $s=0,1,...,$ $u^{(S)}(x,p)\in C(\bar{D}xQ), u^{(S)}(x,p)$ при любом p принадлежит $C^2(D)$, $k_i^{(S)}(u^{(S)})\in Lip[R_1,R_2]$, $i=1,2,...,n,$ $q^{(S)}(u^{(S)})\in Lip[R_1,R_2]$, $g_i(p)u_\nu^{(S)}(\xi_i,p)>0$, $i=1,2,...,n,$ $\phi(p)u_\nu^{(S)}(\xi_i,p)>0$, $g_{n+1}(p)u_\nu^{(S)}(\xi_{n+1},p)<0$, $NmesD<1$, производные функции $u^{(S)}(x,p)$ по x до второго порядка равномерно ограничены. Тогда функции $\{k_1^{(S)}(u^{(S)}),\ k_2^{(S)}(u^{(S)}),...,\ k_n^{(S)}(u^{(S)}),$ $q^{(S)}(u^{(S)}), u^{(S)}(x,p)\}$, полученные методом последовательных приближений (13)–(16), при $s\to+\infty$ равномерно сходятся к решению задачи (1)–(4) со скоростью геометрической прогрессии. N – положительное постоянное, зависящее от данных задачи.

Доказательство. Положим

$$Z^{(S)}(x,p)=u(x,p)-u^{(S)}(x,p)\,,$$

$$\lambda_i^{(S)}(u,u^{(S)})=k_i(u)-k_i^{(S)}(u^{(S)}), i=1,2,...,n,\ \mu^{(S)}(u,u^{(S)})=q(u)-q^{(S)}(u^{(S)}).$$

Легко проверить, что эти функции удовлетворяют системе

$$-\sum_{i=1}^n k_i(u)Z_{x_ix_i}^{(S+1)}+q(u)Z^{(S+1)}=\sum_{i=1}^n\alpha_i^{(S)}(x,p)\lambda_i^{(S)}(u,u^{(S)})+\beta^{(S)}(x,p)\mu^{(S)}(u,u^{(S)}), \tag{17}$$

$$Z^{(S+1)}(x,p)\big|_\Gamma=0, \tag{18}$$

$$\lambda^{(S+1)}(F_i,F_i^{(S)})=\gamma_1^{(S)}(p)Z_\nu^{(S+1)}(\xi_1,p),\ i=1,2,...,n, \tag{19}$$

$$\mu^{(S+1)}(F_{n+1},F_{n+1}{}^{(S+1)})=\gamma_{n+1}(p)Z_\nu^{(S+1)}(\xi_{n+1},p)+\gamma_{n+2}^{(S)}(p)\lambda^{(S+1)}(F_{n+1},F_{n+1}{}^{(S+1)}), \tag{20}$$

где

$$\alpha_i^{(S)}(x,p)=u_{x_ix_i}^{(S+1)}, i=1,2,...,n\,,\ \beta^{(S)}(x,p)=-u^{(S+1)},\ \gamma_i^{(S)}(p)=-\bar{k}_i(\bar{F}_i)[u_\nu{}^{(S+1)}(\xi_i,p)]^{-1},$$

$$\gamma_{n+1}(p)=-\bar{k}_{i_0}(\bar{F}_{n+1})[\phi(p)]^{-1},\ \gamma_{n+2}^{(S)}(p)=u_\nu^{(S+1)}(\xi_{n+1},p)[\phi(p)]^{-1}.$$

Функцией Грина из (17)–(18) определим $Z^{(S+1)}(x,p)$ через правую часть равенства (17) и подставим это выражение в условия (19) и (20). Тогда получим

$$\lambda_i^{(S+1)}(F_i,F_i^{(S+1)})=\gamma_1^{(S)}(p)\int_D G_\nu(\xi_i,\theta)\{\ \sum_{i=1}^n\alpha_i^{(S)}(\theta,p)\lambda_i{}^{(S)}(u,u^{(S)})+\beta^{(s)}(\theta,p)\mu^{(s)}(u,u^{(s)})\ \}d\theta,$$

$$\mu^{(S+1)}(F_{n+1},F_{n+1}{}^{(S+1)})=\gamma_{n+1}(p)\int_D G_\nu(\xi_2,\theta)\left\{\sum_{i=1}^n\alpha_i^{(S)}(\theta,p)\lambda_i{}^{(S)}(u,u^{(S)})+\beta^{(s)}(\theta,p)\mu^{(s)}(u,u^{(s)})\right\}d\theta+$$

$$+\gamma_{n+2}^{(S)}(p)\lambda_{i_0}^{(S+1)}(F_{n+1},F_{n+1}{}^{(S+1)})\,. \tag{21}$$

Положим

$$\chi^{(S)}=\max_u\sum_{i=1}^n\left|\lambda_i{}^{(S)}(\bar{u},u)\right|+\max_u\left|\mu^{(S)}(\bar{u},u)\right|.$$

Прежним путем из системы (21) следует, что $\chi^{(S+1)} \le \chi^{(S)} NmesD$. Таким образом теорема доказана.

4. Существование решения

Существование решения задачи (1)–(4) доказывается для частных случаев.

1. Пусть $k_i(u) > 0, i = 1, 2, ..., n$ – заданная функция, из условий (1)–(2), (4) требуется определить функции $\{q(u), u(x, p)\}$.

Теорема 3. Пусть $h(x, p) = 0,\ f(\xi, p) \ge 0,\ g_2(p) = 0,\ \phi(p) < 0$, $NmesD < 1$. Тогда задача (1)–(2), (4) имеет хотя бы одно решение. N – положительная постоянная, зависящая от данных задачи.

Доказательство. Нетрудно проверить, что при всех приближениях $q(u)$ положительно. В силу принципа максимума [11] для решения задачи (12)–(13) справедлива оценка $\left\|u^{(S+1)}\right\|_{C(\bar{D})} \le \|f\|_{C(\Gamma)}$, т.е. последовательность $\left\{u^{(S)}(x, p)\right\}$ равномерно ограничена. Докажем равномерную ограниченность последовательности $\left\{q^{(S)}(u^{(S)})\right\}$. Переносим слагаемое $q^{(S)}(u^{(S)})u^{(S+1)}$ в правую часть уравнения (12) и с помощью функции Грина найдем выражение для $u^{(S+1)}(x, p)$:

$$u^{(S+1)}(x, p) = \int_D G(x, \theta)\left[\sum_{i=1}^{n} k_i(u^{(S)})\,\tilde{f}_{\theta_i\theta_i}(\theta, p) - q^{(S)}(u^{(S)})u^{(S+1)}\right] d\theta + \tilde{f}(x, p).$$

Подставив это выражение в условие (16) при $x = \xi_{n+1}$, получим

$$q^{(S+1)}(F_{n+1}) = F^{(S)}(p) - \int_D K^{(S)}(\xi_{n+1}, \theta) q^{(S)}(u^{(S+1)}) u^{(S+1)}(\theta, p) d\theta, \tag{22}$$

где

$$F^{(S)}(p) = k_{i_0}(F_{n+1})[\phi(p)]^{-1}\left[\tilde{f}_\nu(\xi_{n+1}, p) + \int_D G_\nu(\xi_{n+1}, \theta)\right]\left[\sum_{i=1}^{n} k_i(u^{(S)})\,\tilde{f}_{\theta_i\theta_i}(\theta, p)\right] d\theta,$$

$$K^{(S)}(\xi_{n+1}, \theta) = \left[\phi(p)\right]^{-1} k_{i_0}(F_{n+1}) G_\nu(\xi_{n+1}, \theta).$$

Для $K^{(S)}(\xi_{n+1}, \theta)$ имеет место оценка (12). Положим

$$q_1^{(S)} = max\left|q^{(S)}(u^{(S)})\right|,\ R_1 \le u^{(S)} \le R_2.$$

Тогда из (22) при достаточно малой мере D имеем

$$q_1^{(S+1)} \le N_1 + NmesDq_1^{(S)}.$$

Здесь $N_1 > 0$ и не зависит от s. Обозначим $\beta = NmesD$. Учитывая, что $0 < \beta < 1$, имеем

$$q_1^{(S+1)} \le \frac{1}{1-\beta} N_1 + q_1^{(0)}.$$

Тогда из этого неравенства вытекает равномерная ограниченность последовательности $\left\{q^{(S)}(u^{(S)})\right\}$. Таким образом, при всех приближениях $q^{(S)}(u^{(S)})$ – непрерывная и равномерно ограниченная функция. Тогда из общей теории эллиптических уравнений следует, что при условиях теоремы последовательность $\left\{u^{(S)}(x, p)\right\}$ равномерно ограничена по норме $W_{p_1}^2(D)$, $p_1 > n, \forall p \in Q$. Поэтому $u^{(S)}(x, p)$ компактна в $C^1(\bar{D})$. При этом из условия (16) следует, что последовательность $\left\{q^{(S)}(u^{(S)})\right\}$ будет компактна в $C[R_1, R_2]$. Отсюда и из (13)–(14) вытекает компактность $\left\{u^{(S)}(x, p)\right\}$ в $C^2(\bar{D})$. В системе (13)–(14), (16) переходя к пределу при $s \to +\infty$ получим, что существует пара функций $\{q(u), u(x, p)\}$, удовлетворяющая условиям задачи (1)–(2), (4). Теорема доказана.

2. Пусть $q(u)$ – заданная функция. Обозначая $y = x_2$ из условий (1)–(3) при $n = 2$ требуется определить функции $\{k_1(u), k_2(u), u(x, y, p)\}$. В частном случае рассмотрим определение функции $\{k_1(u), k_2(u), u(x, y)\}$ в прямоугольной области:

$$-k_1(u)u_{xx} - k_2(u)u_{yy} + q(u)u = h(x, y), \quad (x, y) \in D, \tag{23}$$

$$u(x,0) = \varphi_1(x), u(x, l_2) = \varphi_2(x), \quad 0 \le x \le l_1, \tag{24}$$

$$u(0,y) = \phi_1(y), u(l_1, y) = \phi_2(y), \quad 0 \le y \le l_2, \tag{25}$$

$$k_1(\phi_1(y))u_x(0, y) = g_1(y), \qquad 0 \le y \le l_2, \tag{26}$$

$$k_2(\varphi_1(x))u_y(x,0) = g_2(x), \qquad 0 \le x \le l_1, \tag{27}$$

удовлетворяющее условиям $\varphi_1(0) = \phi_1(0), \varphi_1(l_1) = \phi_2(0), \varphi_2(l_1) = \phi_2(l_2), \phi_1(l_2) = \varphi_2(0)$. Здесь

$$D = \{(x, y) | 0 < x < l_1, 0 < y < l_2\}.$$

Метод последовательных приближений к задаче (23)–(27) применяется аналогично схеме (13)–(16). Сперва докажем одну лемму.

Лемма. Пусть задача

$$-a(x, y)u_{xx} - b(x, y)u_{yy} + u = 0, \; (x, y) \in D,$$

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), u(x, l_2) = \varphi_2(x), \; 0 \le x \le l_1,$$

$$u(0, y) = \phi_1(y), u(l_1, y) = \phi_2(y), \; 0 \le y \le l_2,$$

удовлетворяющая условиям $\varphi_1(0) = \phi_1(0), \varphi_1(l_1) = \phi_2(0), \varphi_2(l_1) = \phi_2(l_2), \phi_1(l_2) = \varphi_2(0)$ при заданном $a(x, y) \ge \mu_0$, $b(x, y) \ge \mu_0$, $\mu_0 > 0$, имеет решение, принадлежащее $C^2(D) \cap C(\overline{D})$ и $n(x) \le \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \le Ml_2$, $m(y) \le \phi_1(y) - \phi_2(y) \le Ml_1$, $\varphi_2(x) \ge 0, \phi_2(y) \ge 0$, $\varphi_1(0) \ge \varphi_1(x) + m(0)xl_1^{-1}$,

$$\varphi_2(0) \ge \varphi_2(x) + m(l_2)xl_1^{-1}, \; \phi_1(0) \ge \phi_1(y) + n(0)yl_2^{-1}, \; \phi_2(0) - \phi_2(y) \ge n(l_1)yl_2^{-1}, \; \varphi_{ix}(x) \ge -M, i = 1,2,$$

$$\phi_{iy}(y) \ge -M, i = 1,2, \; \varphi_{ixx}(x) = 0, \phi_{iyy}(y) = 0,$$

тогда

$$-M - \phi_1(y)(2\mu_0)^{-1}l_1 \le u_x(0, y) \le -m(y)l_1^{-1}, \tag{28}$$

$$-M - \varphi_1(x)(2\mu_0)^{-1}l_2 \le u_y(x,0) \le -n(x)l_2^{-1}, \tag{29}$$

где $m(y) \in C^2[0, l_2], n(x) \in C^2[0, l_1], m''(y) \ge 0, n''(x) \ge 0, M = \max\{\max\limits_{i=1,2} \max\limits_{x} |\varphi_{ix}(x)|, \; \max\limits_{i=1,2} \max\limits_{y} |\phi_{iy}(y)|,$

$$\max_x l_2^{-1}[\varphi_1(x) - \varphi_2(x)], \max_x l_1^{-1}[\phi_1(y) - \phi_2(y)]\}.$$

Доказательство. Положим

$$\upsilon(x,y) = u(x,y) + mxl_1^{-1} - \phi_1(y), V(x,y) = -u(x,y) + \phi_1(y) - Mx - \phi_1(y)(2\mu_0)^{-1}x(l_1 - x),$$

$$\upsilon_1(x,y) = u(x,y) + nyl_2^{-1} - \varphi_1(y), V_1(x,y) = -u(x,y) + \varphi_1(x) - My - \varphi_1(x)(2\mu_0)^{-1}y(l_2 - y).$$

Нетрудно проверить, что $\upsilon(x, y)$ удовлетворяет условиям задачи

$$-a(x, y)\upsilon_{xx} - b(x, y)\upsilon_{yy} + \upsilon = -\phi_1(y) + xm(y)l_1^{-1},$$

$$\upsilon(x,0) = \varphi_1(x) - \varphi_1(0) + xm(0)l_1^{-1}, \; \upsilon(x, l_2) = \varphi_2(x) - \varphi_2(0) + xm(l_2)l_1^{-1}, \; \upsilon(0, y) = 0,$$

$$\upsilon(l_1, y) = -\phi_1(y) + m(y) + \phi_2(y).$$

Поэтому, по условию леммы, наибольшее положительное значение функции $\upsilon(x,y)$ достигается при $x = 0$. Тогда $\upsilon_x(0, y) \le 0$, другими словами

$$u_x(0, y) \le -m(y)l_1^{-1}. \tag{30}$$

Аналогично прежнему, после подстановки $V(x, y)$ и учитывая условия леммы, получаем, что наибольшее положительное значение функции $V(x, y)$ достигается при $x = 0$. Поэтому $V_x(0, y) \le 0$ или

$$-M - \phi_1(y)(2\mu_0)^{-1}l_1 \le u_x(0, y). \tag{31}$$

Объединяя оценки (30) и (31), получим оценку (28). Аналогично прежним путем получим (29). Лемма доказана.

Теорема 4. Пусть $\varphi_i(x)\in C^{2+\alpha}(0,l_1)\cap C[0,l_1], \phi_i(y)\in C^{2+\alpha}(0,l_2)\cap C[0,l_2]$, $i=1,2$, $h(x,p)=0,\ q(u)=1,\ n(x)\le\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\le Ml_2,\ m(y)\le\phi_1(y)-\phi_2(y)\le Ml_1,\ \varphi_2(x)\ge 0, \phi_2(y)\ge 0$, $\varphi_1(0)\ge\varphi_1(x)+m(0)xl_1^{-1},\ \varphi_2(0)\ge\varphi_2(x)+m(l_2)xl_1^{-1},\ \phi_1(0)\ge\phi_1(y)+n(0)yl_2^{-1},\ \phi_2(0)-\phi_2(y)\ge$ $\ge n(l_1)yl_2^{-1},\ \varphi_{ix}(0)<0, \phi_{iy}(y)<0, i=1,2,\ \varphi_{ix}(x)\ge -M, i=1,2, \phi_{iy}(y)\ge -M, i=1,2, \varphi_{1xx}(x)=0$, $\phi_{1yy}(y)=0,\ g'_0\le -g_1(y)-\frac{1}{2}\phi_1(y)l_1, g''_0\le -g_2(x)-\frac{1}{2}\phi_1(x)l_2,\ g_1(y)<0,\ g_2(x)<0,\ n(x), m(y)$ – такие неотрицательные функции, что $g_1(y)[m(y)]^{-1}$ и $g_1(x)[n(x)]^{-1}$ – ограничены, $g'_0,\ g''_0$ – положительные числа. Тогда задача (23)–(27) имеет хотя бы одно решение.

Доказательство. Доказательство проводится методом последовательных приближений. Из утверждения леммы следует, что

$$-M[1+\phi_1(y)(2g'_0)^{-1}l_1]\le u_x^{(S+1)}(0,y)\le -m(y)\cdot l_1^{-1},\qquad 0<y<l_2,$$
$$-M[1+\varphi_1(x)(2g''_0)^{-1}l_2]\le u_y^{(S+1)}(x,0)\le -n(x)\cdot l_2^{-1},\qquad 0<x<l_1,$$

тогда

$$g'_0\,M^{-1}\le k_1^{(S+1)}(u^{(S+1)})\le \max_y\left\{[-g_1(y)]\cdot[m(y)]^{-1}\right\}\cdot l_1,$$
$$g''_0\,M^{-1}\le k_2^{(S+1)}(u^{(S+1)})\le \max_x\left\{[-g_2(x)]\cdot[n(x)]^{-1}\right\}\cdot l_2.$$

Таким образом, при всех приближениях $k_1^{(S)}(u^{(S)}),\ k_2^{(S)}(u^{(S)})$ – строго положительные, непрерывные и равномерно ограниченные функции. Тогда из общей теории эллиптических уравнений следует, что при условиях теоремы последовательность $\left\{u^{(S)}(x,y)\right\}$ равномерно ограничена по норме $W_{p_1}{}^2(D), \forall p_1>2$. Поэтому $\left\{u^{(S)}(x,y)\right\}$ компактна в $C_1(\overline{D})$. При этом из условий (15) следует, что для прямоугольной области последовательности $\left\{k_1^{(S)}(u^{(S)}),\ k_2^{(S)}(u^{(S)})\right\}$ будет компактна в $C^1[R_1,R_2]$. Отсюда и из (13)–(14) вытекает компактность $\left\{u^{(S)}(x,y)\right\}$ в $C^2(\overline{D})$ для прямоугольной области. В системе (13)–(15) переходят к пределу, при $s\to+\infty$ получим, что существует пара функции $\left\{k_1(u), k_2(u), u(x,y)\right\}$, удовлетворяющая условиям (23)–(27).Теорема доказана.

Для задачи (23)–(27) $\tilde f(x,y)$ надо взять в следующем виде:

$$\tilde f(x,y)=\frac{l_1-x}{l_1}\phi_1(y)+\frac{l_2-y}{l_2}[\varphi_1(x)-\varphi_1(0)+\frac{x}{l_1}\varphi_1(0)]+\frac{x}{l_1}[\phi_2(y)-\phi_2(0)+\frac{y}{l_2}\phi_2(0)]+$$
$$+\frac{y}{l_2}[\varphi_2(x)-\varphi_2(0)+\frac{x}{l_1}\varphi_2(0)]-\frac{xy}{l_1l_2}\phi_2(l_2)\,.$$

Литература

1. Лаврентьев, М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. – М.: Наука, 1980. – 288 с.

2. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. – М.: Наука, 2009. – 458 с.

3. Искендеров, А.Д. Обратная задача об определении коэффициентов квазилинейного эллиптического уравнения / А.Д. Искендеров // Изв. АН Аз.ССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1978. – № 2. – С. 80–85.

4. Искендеров, А.Д. Обратная задача об определении коэффициентов эллиптического уравнения / А.Д. Искендеров // Диф. уравнения. – 1979. – Т. 20, № 11. – С. 858–867.

5. Клибанов, М.В. Обратные задачи в целом и Карлемановские оценки / М.В. Клибанов // Диф. уравнения. – 1984. – Т. 20, № 6. – С. 1035–1041.

6. Клибанов, М.В. Единственность в целом обратных задач для одного класса дифференциальных уравнений / М.В. Клибанов // Диф. уравнения. – 1984. – Т. 20, № 11. – С. 1947– 1953.

7. Хайдаров, А. Об одной обратной задаче для эллиптических уравнений //Некорректные задачи математической физики и анализа / А. Хайдаров; под. ред. С.А. Алексева. – Новосибирск, 1984. – С. 245–249.

8. Вабищевич, П.Н. О единственности некоторых обратных задач для эллиптических уравнений / П.Н. Вабищевич // Диф. уравнения. – 1988. – Т. 24, № 12. – С. 2125–2129.

9. Соловьев, В.В. Обратные задачи определения источника и коэффициента в эллиптическом уравнении в прямоугольнике / В.В. Соловьев // Журнал выч. мат. и мат.физики. – 2007. – Т. 47, № 8. – С. 1365–1377.

10. Вахитов, И.С. Обратная задача идентификации старшего коэффициента в уравнении диффузии–реакции / И.С. Вахитов // Дальневосточный матем. жур. – 2010. – Т. 10, № 2. – С. 93–105.

11. Лажыженская, О.Г. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.Г. Лажыженская, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1973. – 576 с.

12. Ивасишен, С.Д. Оценки матрицы Грина однородной параболической граничной задачи / С.Д. Ивасишен, С.В. Эйдельман // ДАН СССР. – 1967. – Т. 172, № 6. – С. 1262–1265.

Поступила в редакцию 17 февраля 2011 г.

ABOUT EVALUATION OF UNKNOWN COEFFICIENTS IN A QUASILINEAR ELLIPTIC EQUATION

R.A. Aliyev[1]

Inverse problems on restoration of coefficients of the partial differential equation are of interest in many applied researches. These problems lead to necessity of the approached decision of inverse problems for the equations of mathematical physics, which are incorrect in classical sense. Inverse problems in definition of unknown coefficients in a quasilinear eliptic equation are studied in the article. Theorems of existence, uniqueness and stability of inversion problems solution for the quailinear elliptic equations are proved.

Keywords: inverse problem, quasilinear eliptic equation.

References

1. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskij S.P. *Nekorrektnye zadachi matematicheskoj fiziki i analiza* (Incorrect problems of mathematical physics and analysis). Moscow, Nauka, 1980. 288 p. (in Russ.).

2. Kabanikhin S.I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* (Inverse and incorrect problems). Moscow, Nauka, 2009. 458 p. (in Russ.).

3. Iskenderov A.D. *Izv. AN. Az. SSR. Ser. fiz.-tehn. i mat. nauk.* 1978. no. 2. pp. 80–85. (in Russ.).

4. Iskenderov A.D. *Dif. uravnenija*. 1979. Vol. 20, no. 11. pp. 858–867. (in Russ.).

5. Klibanov M.V. *Dif. uravnenija*. 1984. Vol. 20, no. 6. pp. 1035–1041. (in Russ.).

6. Klibanov M.V. *Dif. uravnenija*. 1984. Vol. 20, no. 11. pp. 1947–1953. (in Russ.).

7. Khaidarov A. *Nekorrektnye zadachi matematicheskoj fiziki i analiza.* (Incorrect problems of mathematical physics and analysis). Novosibirsk, 1984. pp. 245–249. (in Russ.).

8. Vabishchevich P.N. *Dif. uravnenija.* 1988. Vol. 24, no. 12. pp. 2125–2129.

9. Solov'ev V.V. *Zhurnal vych. mat. i mat. fiziki*. 2007. Vol. 47, no. 8. pp. 1365–1377. (in Russ.).

10. Vakhitov I.S. *Dal'nevostochnyj matem.zhurn*. 2010. Vol. 10, no. 2. pp. 93–105. (in Russ.).

11. Lazhyzhenskaya O.G., Ural'tseva N.N. *Linejnye i kvazilinenye uravnenija jellipticheskogo tipa* (Linear and quasilinear equation of elliptic type). Moscow, Nauka, 1973. 576 p. (in Russ.).

12. Ivasishen S.D., Jejdel'man S.V. *DAN SSSR.* 1967. Vol. 172, no. 6. pp. 1262–1265. (in Russ.).

[1] Aliyev Ramiz Atash oqlı is Assistant Professor, Department of Computer Science, the Azerbaijan University of Cooperation, Baku.
e-mail: ramizaliyev3@rambler.ru