

На правах рукописи

ГОССТРОЙ СССР

Научно-исследовательский институт бетона и железобетона  
НИИЖБ

Кандидат технических наук  
Соломин Виталий Иванович

ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ И МЕТОДЫ РАСЧЕТА  
ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ФУНДАМЕНТНЫХ ПЛИТ И БАЛОК

Специальность 05.23.01 – "Строительные конструкции"  
(железобетонные конструкции)

Автореферат  
диссертации на соискание ученой  
степени доктора технических наук

Москва – 1975

Работа выполнена в Челябинском политехническом институте им. Ленинского комсомола.

Официальные оппоненты: доктор технических наук, проф. М.И.ГОРБУНОВ-ПОСАДОВ, засл. деятель науки и техники РСФСР, доктор технических наук, проф. Б.Г.КОРЕНЕВ, доктор технических наук, проф. Г.К.ХАЙДУКОВ.

Ведущая организация – ВНИПИ Теплопроект, г.Москва.

Автореферат разослан 1975 г.

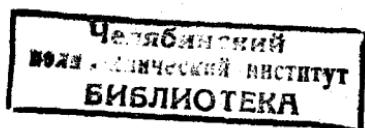
Защита диссертации состоится 1975 г. в час.  
на заседании Совета научно-исследовательского института бетона и железобетона по адресу: 109389, Москва, Ж-389,  
2-я Институтская ул., дом 8, НИИЖБ.

Просим присыпать Ваши замечания и отзывы на автореферат по указанному адресу.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Ученый секретарь Совета НИИЖБ  
Госстроя СССР  
кандидат технических наук

Д.С.КИСЕЛЕВИЧ



Конструкции, опирающиеся на грунтовое основание, занимают значительное место среди других типов строительных конструкций. Это фундаменты различных сооружений, покрытия дорог, аэродромов, полы промышленных зданий и т.д. Все они, как правило, изготавливаются из железобетона. Удельный вес расходов на сооружение таких конструкций в общем объеме затрат на строительство весьма высок. В докладе на УШ Международном Конгрессе по механике грунтов и фундаментостроению И.А.Ганичев привел следующие данные: при общих капиталовложениях в народное хозяйство за пятилетку (1971-1975 гг.) 500 млрд. рублей расходы на устройство оснований и фундаментов составят около 30 млрд.

Современные фундаменты это не массивы, как было в недавнем прошлом, а гибкие железобетонные конструкции, формы которых постоянно совершенствуются и усложняются. Широкое распространение получили, в частности, фундаменты в виде отдельных и перекрестных лент и плит.

Существующие методы определения усилий в фундаментах основаны на предпосылках, весьма приближенно отражающих работу железобетона. Чаще всего считают материал фундамента линейно упругим однородным и изотропным, что дает возможность сравнительно надежно прогнозировать распределение усилий, если в фундаменте не возникает трещин. В других случаях полагают, что железобетон жестко- или упруго-пластический материал, что позволяет оценить прочность фундамента, но оставляет вне рассмотрения стадии его нормальной эксплуатации. Но даже в рамках этих сравнительно простых предпосылок решены далеко не все задачи, встречающиеся в практике.

Диссертация посвящена разработке эффективных ме-

тодов расчета фундаментов на основе уравнений, более полно отражающих закономерности деформирования железобетона и грунта. Она состоит из введения, четырех глав и заключения.

Первая глава посвящена анализу проблемы, а также формулировке и обоснованию основных предпосылок, принятых в настоящей работе.

Существующие модели грунтовых оснований разделены на три группы: 1 - линейные модели; 2 - нелинейные модели, в которых устанавливается связь между давлением на поверхность основания и его осадками; 3 - модели, в которых грунтовое основание рассматривается как нелинейно деформируемая среда.

Анализ многочисленных экспериментов, проведенных в последние годы со штампами и моделями гибких конструкций, а также натурных наблюдений за осадками сооружений показал, что к выбору модели основания следует подходить с позиций метода расчетных предельных состояний. В стадии нормальной эксплуатации сооружения, когда среднее давление под его фундаментом не превышает нормативного, зависимости между давлениями на грунт и осадками по существу линейные. В этой стадии хорошие результаты могут быть получены на основе линейных моделей грунтового основания.

При расчете фундаментов на прочность нагрузки увеличиваются, а характеристики деформируемости основания уменьшаются до расчетных. Но и в этих случаях иногда допустимо применение линейных моделей основания. Это подтверждается сопоставлением результатов экспериментов, проведенных с плитами покрытий аэродромов (В.Д.Попов, И.Н.Толмачев, Б.С.Раев-Богословский), и расчетных данных, полученных Б.Г.Кореневым, Е.И.Черниговской, Р.В.Серебряным и автором работы.

В случаях, когда необходимо учесть нелинейные деформации основания, можно использовать модели второй группы, на основе которых получаются наиболее простые решения. Но методы определения параметров этих моделей разработаны еще недостаточно. По мнению автора более перспективными являются модели третьей группы,

так как осадки поверхности основания являются интегральными характеристиками, зависящими от деформируемости грунтового массива во всех его точках.

При разработке методов расчета фундаментных конструкций необходимо принять гипотезы, относящиеся не только к основанию, но и к фундаментам. Важным направлением в совершенствовании методов их расчета является учет нелинейных деформаций в железобетоне. В последнее время достигнуты значительные успехи в изучении законов его деформирования. В работах В.И.Муршева, А.А.Гвоздева, С.А.Дмитриева, Я.М.Немировского и других были получены физические уравнения железобетонного бруса. С.М.Крыловым и А.И.Козачевским разработаны и экспериментально проверены методы расчета стержневых систем, основанные на этих уравнениях.

Физические уравнения железобетонных плит и других пространственных конструкций были созданы благодаря работам А.А.Гвоздева, С.М.Крылова, Я.Д.Лившица, В.Н.Байкова, В.М.Бондаренко, Л.С.Гильмана, Х.Х.Лауля, И.Е.Милейковского, Б.С.Василькова, Е.А.Палатникова, Ю.В.Чишенкова, Г.А.Гениева и многих других. Наиболее полно теория изгиба железобетонных тонкостенных конструкций и, в частности, плит разработана Н.И.Карленко.

В существующих методах расчета фундаментов в ряде случаев учитывается нелинейность деформирования железобетона. В частности, получил распространение метод предельного равновесия, основы которого разработаны А.А.Гвоздевым. Развитию этого метода способствовали исследования А.Р.Ржаницына, В.Н.Байкова, С.С.Давыдова, С.М.Крылова, А.М.Овечкина. Задача о расчете балки на податливом основании решена впервые А.А.Гвоздевым в 1934 году. Позднее С.М.Крыловым получено решение для круглых плит. Однако, метод предельного равновесия позволяет оценить степень достижения лишь одного из предельных состояний — по прочности. Он не дает возможности найти распределение усилий в фундаменте в стадии нормальной эксплуатации.

Важную роль в разработке методов расчета конструкций на упругом основании сыграли работы Б.Г.Коренева,

предложившего модель железобетонный фундамент-основание, построенную на более строгих гипотезах: железобетон является идеальным упруго-пластическим материалом, основание линейно деформируемое (вinkelево или полупространство). Им разработаны эффективные методы расчета на прочность железобетонных фундаментных балок и круглых осесимметрично деформируемых плит. Предельной по прочности считается такая нагрузка, при которой благодаря развитию пластических шарниров несущая способность плиты или балки исчерпана, и дальнейшее увеличение нагрузки возможно лишь за счет возрастания отпора со стороны основания.

Аналогичные предпосылки положены в основу методов определения предельных нагрузок на фундаменты, разработанных С.С.Давыдовым, А.П.Синицыным и другими авторами. Однако, эти предпосылки также не в полной мере отражают законы деформирования железобетона и позволяют, хотя и более строго, чем в методе предельного равновесия, оценить лишь прочность фундамента.

Для определения напряженно-деформированного состояния фундамента в эксплуатационной стадии необходимо учитывать нелинейные деформации в железобетоне, появляющиеся в связи с образованием трещин, то есть задолго до образования пластических шарниров. Метод решения этой задачи предложен Я.М.Немировским, который полагает, что жесткость фундамента уменьшается по мере увеличения в нем изгибающих моментов, но остается постоянной по площади. Модель Я.М.Немировского и модели близкие к ней использованы в работах Г.Ф.Пеньковского и Н.С.Метелюка. Исследования этих авторов показали, что перераспределение усилий в фундаментах вследствие трещинообразования весьма велико. Однако, усреднение жесткости по площади фундамента может приводить к существенным погрешностям, поскольку жесткости участков с трещинами и без трещин значительно отличаются.

Таким образом, методы расчета фундаментов с учетом нелинейности деформирования железобетона особенно в стадиях, предшествующих образованию пластических шарниров разработаны еще недостаточно.

Целью диссертации является разработка эффективных методов определения усилий в фундаментных конструкциях в виде балок и плит различной конфигурации с учетом особенностей деформирования железобетона на всех стадиях нагружения.

В работе приняты следующие допущения.

1. Основание является линейно упругим. Выбор его модели определяется конкретными условиями и может зависеть от типа грунта, неоднородности в плане и по глубине, величины консолей фундамента, характера приложения нагрузки и т.п.

2. Железобетон является нелинейно деформирующимся материалом. Нелинейные деформации в нем появляются до образования пластических шарниров. Физические уравнения бруса принятые по СНиП П-В. 1-62, а для плит - по теории А.А.Гвоздева, Н.И.Карпенко, С.М.Крылова.

3. Внутренние усилия и деформации (в частности, трещины) возникают в фундаменте лишь вследствие приложения к нему нагрузок от сооружения.

Вторая глава посвящена построению разностных схем расчета фундаментных балок, круглых и прямоугольных плит, а также плит сложной конфигурации.

Приняты следующие предпосылки:

- 1) деформации балок, плит и основания описываются уравнениями линейной теории упругости;
- 2) к плитам применимы гипотезы Кирхгоффа;
- 3) связи между фундаментом и основанием вертикальные, двусторонние;
- 4) жесткость балок, а также жесткости и анизотропия плит являются произвольными функциями координат;
- 5) нагрузки вертикальные, произвольные.

Все разностные схемы построены так, что могут быть использованы для решений в линейной и нелинейной (методом упругих решений) постановках.

Рассмотрены следующие методы построения разностных схем: конечных разностей, вариационно-разностный, конечных элементов, Б.Н.Жемочкина, Я.Б.Львина. Для оценки эффективности перечисленных методов были со-

ставлены программы расчета на ЭЦВМ "Минск-22" балок и круглых осесимметрично деформируемых плит.

Машинные эксперименты, поставленные с помощью этих программ, показали, что метод конечных разностей не позволяет добиться сходящегося решения в нелинейной постановке. Причиной этого является наличие в уравнениях изгиба балки и плиты производных от жесткости. К аналогичному выводу пришел Н.И.Карпенко, предпринявший попытку рассчитать этим методом квадратную плиту на жестких опорах. Поэтому при построении схем расчета плит отдано предпочтение вариационно-разностному методу, который не имеет отмеченных недостатков.

Программы для ЭЦВМ, основанных на методе конечного элемента, не составлялось, так как было установлено, что в рассмотренных задачах он не имеет преимуществ перед вариационно-разностным.

Метод Я.Б.Львина оказался более эффективным, чем другие (в частности, метод Б.Н.Жемочкина) при расчете балок. Преимущество его состоит в том, что вычисление коэффициентов матриц разрешающих уравнений требует значительно меньше времени.

На основе проведенного анализа было решено при построении разностных схем расчета плит использовать вариационно-разностный метод, а при расчете балок – метод Я.Б.Львина.

Подробно рассмотрено построение вариационно-разностным методом разностных схем расчета плит, поскольку соответствующих решений в литературе не имеется.

Полная потенциальная энергия плиты

$$I = V + V_o + U,$$

где  $V$  – потенциал внутренних сил плиты;  $V_o$  – потенциал реактивных сил, действующих на плиту со стороны основания;  $U$  – работа нагрузок.

Формулы для моментов в плите имеют вид

$$M_x = -(Ax + Bx + 2Fw); \quad M_\xi = -(Bx + Cx + 2Fw);$$

$$M_{\xi\xi} = -(Ex + Fx + 2Dw), \quad (1)$$

где  $\zeta, \xi$  – ортогональные направления;  $\kappa, \chi$  – кривизны;  
 $\psi$  – кручение;  $A, B, C, D, E, F$  – жесткости.  
 Тогда

$$V = \frac{1}{2} \iint [A\kappa^2 + C\chi^2 + 2B\kappa\chi + 4\psi(E\kappa + F\chi + DW)] d\Omega ;$$

$$V_o = \frac{1}{2} \iint p w d\Omega ; \quad U = - \iint q w d\Omega , \quad (2)$$

где  $p$  – реактивное давление;  $q$  – внешняя нагрузка;  
 $w$  – вертикальное перемещение;  $\Omega$  – площадь плиты.

На плиту наносится ортогональная сетка и в соответствие (2) ставятся следующие уравнения:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\zeta\xi} [A\kappa^2 + C\chi^2 + 2B\kappa\chi + 4\psi(E\kappa + F\chi)] \Delta\Omega + 2 \sum_{\alpha\beta} (DW)_{\alpha\beta}^2 \Delta\Omega_{\alpha\beta} ;$$

$$V_o = \frac{1}{2} \sum_{\zeta\xi} (pw\Delta\Omega)_{\zeta\xi} ; \quad U = - \sum_{\zeta\xi} (qw\Delta\Omega)_{\zeta\xi} . \quad (3)$$

Далее  $\zeta\xi$  рассматриваются как номера линий сетки, пересекающихся в узле  $\zeta\xi$ . В (3) обозначено:  $\alpha\beta$  – номера центров ячеек;  $\Delta\Omega_{\alpha\beta}$  – площадь сеточной области, примыкающей к узлу  $\zeta\xi$ ;  $\Delta\Omega_{\alpha\beta}$  – площадь ячейки сетки, имеющей центр с номером  $\alpha\beta$ .

В выражении для  $V$  сумма разбита на две части в целях уменьшения погрешностей разностной аппроксимации входящих в нее кривизн.

На основании принципа Лагранжа составляется система уравнений, линейных относительно  $w_{ij}$ :  $\partial P / \partial w_{ij}$ . Для узлов, удаленных от края плиты не менее, чем на два шага, это уравнение содержит 21 неизвестное перемещение. В уравнениях для других узлов неизвестных будет меньше, так как перемещения в законтурных узлах в них не входят. Произвольный номер  $ij$  принадлежит тому же множеству, что и  $\zeta\xi$ . Из (3) получаем:

$$\frac{\partial V}{\partial w_{ij}} = \sum_{\zeta\xi} \kappa (Ax' + Bx' + 2Ew') + \chi (Bx' + Cx' + 2Fw') + 2\psi (Ex' + Fx') \Delta\Omega_{\zeta\xi} + 4 \sum_{\alpha\beta} (Bw\omega') \Delta\Omega_{\alpha\beta} ; \quad (4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial w_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{\zeta\zeta} (pw)_{\zeta\zeta}^{\prime} \Delta \Omega_{\zeta\zeta}; \quad \frac{\partial U}{\partial w_{ij}} = -q_{ij} \Delta \Omega_{ij} \quad (5)$$

Штрихами обозначено дифференцирование по

Рассмотрены особенности построения разностных схем для двух распространенных типов плит.

а) Плита с прямыми ортогональными краями. В данном случае удобна квадратная сетка и следующие формулы для кривизн:

$$x_{ij} = (w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j})h^{-2}; \quad x_{ij} = (w_{i,j+1} - 2w_{ij} + w_{i,j-1})h^{-2};$$

$$\omega_{ij} = (w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j-1} - w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1})(2h)^{-2} \quad (6)$$

Кривизна, входящая в последний член формулы (4), для центра ячейки  $\alpha\beta$ , левый нижний узел которой  $ij$ , запишется так:

$$\omega_{ij} = (w_{i+1,j+1} + w_{ij} - w_{i,j+1} - w_{i+1,j})h^{-2}, \quad \text{в этом случае}$$

$$D_{\alpha\beta} = 1/4(D_{i+1,j+1} + D_{ij} + D_{i+1,j+1} + D_{i+1,j}).$$

Уравнения (4) содержат один ряд законтурных перемещений. Это вызывает затруднения, когда края плиты свободны или свободно опираются. Дело в том, что, приравнивая нулю моменты, нормальные к контуру, нельзя определить законтурные перемещения в углах. Поэтому вместо последней из формул (6) целесообразно (например, для края  $i = m$ ) записать

$$\omega_{mj} = (w_{m,j+1} + w_{m-1,j-1} - w_{m,j-1} - w_{m-1,j+1})(2h)^{-2}$$

Переход к этой формуле связан с потерей точности, что может оказаться оправданным, так как порядок разрешающей системы уравнений при этом снижается. В узлах, где плита изотропна, эта погрешность исчезает.

Составлены таблицы операторов для всех типов узлов, которые могут встретиться при расчете плит с прямыми ортогональными краями.

б) Круглая плита. В этом случае удобна радиально-коаксиальная сетка. Принято, что шаги по радиусу ( $\Delta r$ )

и углу ( $\Delta\theta$ ) постоянны, поэтому можно воспользоваться следующими формулами для кривизн:

$$\begin{aligned} x_{ij} = & (W_{i+1,j} - 2W_{ij} + W_{i-1,j}) \Delta r^{-2}; \quad x_{ij} = (W_{i+1,j} - W_{i-1,j}) (2i \Delta r^2)^{-1} + \\ & + (W_{i,j+1} - 2W_{ij} + W_{i,j-1}) (i \Delta r \Delta \theta)^{-2}; \quad \omega_{ij} = (W_{i+1,j+1} + W_{i-1,j-1} - W_{i-1,j+1} - \\ & - W_{i+1,j-1}) (4i \Delta \theta \Delta r^2)^{-1} - (W_{i,j+1} - W_{i,j-1}) (2i^2 \Delta \theta \Delta r)^{-1}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $i$  — координата узла в направлении радиуса (в центре плиты  $i = 0$ ).

Последний член формулы (4) запишем для центра ячейки  $a\beta$ . Если ее левый нижний узел  $j$ , то

$$\omega_{a\beta} = 4[iW_{i+1,j+1} + (i+1)W_{ij} - (i-1)W_{i,j+1} - iW_{i+1,j}] (\Delta \theta \Delta r r^2 (2i+1)^2)^{-1} \quad (8)$$

Жесткость для центра ячейки должна вычисляться по формуле для  $\Pi_{a\beta}$ .

В круглой плите, когда край ее свободен или свободно опирается, для определения всех законтурных перемещений достаточно условия равенства нулю моментов, нормальных к контуру. При этом количество неизвестных, естественно, становится больше количества узлов, нанесенных на плиту, а структура матрицы уравнений (4) усложняется. Все это делает предпочтительным вариант, предложенный для плит с прямыми краями. Тогда вместо последней из формул (7) надо написать (на крае  $i=m$ )

$$\begin{aligned} \omega_{mj} = & (W_{mj+1} + W_{m-1,j-1} - W_{m,j-1} - W_{m-1,j+1}) (2i \Delta \theta \Delta r^2)^{-1} - \\ & - (W_{m,j+1} - W_{m,j-1}) (2i^2 \Delta \theta \Delta r^2)^{-1} \end{aligned}$$

Представляет интерес выражение для потенциальной энергии внутренних сил в центральном узле. Если кривизны в нем вычислять по формулам

$$x_{0\lambda} = (W_{1,j+\lambda} - 2W_0 + W_{1,j+\lambda+n/2}) \Delta r^{-2};$$

$$x_{0\lambda} = (W_{1,j+\lambda+n/4} - 2W_0 + W_{1,j+\lambda+3n/4}) \Delta r^{-2};$$

$$\omega_{\alpha} = (W_{1,j+\lambda+1} + W_{1,j+\lambda+1+n/2} - W_{1,j+n/2} - W_{1,j+\lambda-1}) (4 \Delta \theta \Delta r^2)^{-1}, \quad (9)$$

то получаем

$$\Delta V_0 = \pi \Delta r^2 (4n)^{-1} \sum_{\lambda=0}^{n/2-1} [A \chi^2 + C x^2 + 2B \chi x + 10 \omega (E \chi + F x) + 16 D \omega^2]_{\alpha}, \quad (10)$$

где  $n$  - число шагов по углу. Для удобствастыковки с другими узлами в (10) записана потенциальная энергия изгибающих моментов в круге с радиусом  $0,5 \Delta r$ , а крутящих моментов в круге радиусом  $\Delta r$ .

Покажем, что  $\partial V_0 / \partial W_{ij}$  имеет простой физический смысл. Существующие решения для моделей связного основания (слой, полупространство) дают возможность составить систему уравнений

$$W = Ap, \quad (11)$$

где  $W$  - вектор осадок;  $A$  - матрица единичных осадок;  $p$  - вектор реактивных давлений. Строго говоря, в (11) должны быть величины осадок, осредненные по окрестности каждого узла. Вычисление их, в частности, для слоя чрезвычайно трудоемко. Эксперименты, поставленные на ЭЦВМ, показали, что при достаточно густой сетке допустимо вместо средних подставлять в (11) узловые значения  $W$ . При этом элементы  $a_{zz,ij}$  следует вычислять от единичных сосредоточенных сил, а  $a_{ij,ij}$  - от нагрузки, равномерно распределенной в окрестности узла  $ij$ . Тогда элементы  $p$  можно рассматривать как узловые значения реактивных сил, а матрица  $A$  становится симметричной. Разрешим (11) относительно  $p$  и с учетом того, что  $\partial W_{zz} / \partial W_{ij}$  равно 1, если  $z=i$ ,  $z=j$  и равно нулю во всех других случаях. Из (5) получим

$$\partial V_0 / \partial W_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{zz} (W p' + W' p)_{zz} = \sum_{zz} b_{ij,zz} W_{zz} = P_{ij}, \quad (12)$$

где  $P_{ij}$  и  $P_{ij}^T$  - узловые значения реактивных сил;  $b_{ij}$  - элементы матрицы  $A^{-1}$ .

Составлены операторы для всех типов узлов, осесимметрично и произвольно нагруженных круглых силоизменяющих и кольцевых плит.

Далее описывается общий способ вычисления осадок слоя (этот задача решена совместно с В.Н.Широковым, Г.В.Марковым и Э.А.Комаровым), использованный при разработке ряда программ расчета фундаментных плит.

Осадка поверхности слоя под действием нагрузки  $p$ , равномерно распределенной по площади круга радиуса  $R$ , как показал К.Е.Егоров, равна

$$W = \frac{2R(1-\mu_0^2)}{E_0} p \int_0^\infty f(\alpha, \mu_0) J_0\left(\frac{r}{H}\alpha\right) J_1\left(\frac{R}{H}\alpha\right) d\alpha, \quad (13)$$

где  $E_0, \mu_0$  - характеристики упругости слоя,  $J_0, J_1$  - Бесселевы функции первого рода,  $f(\alpha, \mu_0)$  - функция, зависящая от условий на границе между слоем и недеформируемым основанием.

Если на этой границе нет препятствий для перемещений в горизонтальной плоскости, а вертикальные перемещения равны нулю

$$f(\alpha, \mu_0) = \frac{sh^2 \alpha}{\alpha (\alpha + sh \alpha ch \alpha)}.$$

Если на границе отсутствуют все перемещения

$$f(\alpha, \mu_0) = \frac{(3-4\mu_0) sh \alpha ch \alpha - \alpha}{\alpha [(3-4\mu_0) ch^2 \alpha + \alpha - (1-2\mu)^2]}.$$

В первом случае К.Е.Егоровым получено решение в элементарных функциях. Во втором - несобственный интеграл не выражается через известные функции, и как показали попытки его численного решения, сходится весьма медленно.

Предложен общий метод вычисления (13), охватывающий оба случая граничных условий. Чтобы изложить его, введем следующие обозначения

$$T_1 = \int_0^\infty [f(\alpha, \mu_0) - \frac{1}{\alpha}] J_0\left(\frac{r}{H}\alpha\right) J_1\left(\frac{R}{H}\alpha\right) d\alpha,$$

$$T_2 = \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} J_0\left(\frac{r}{H}\alpha\right) J_1\left(\frac{R}{H}\alpha\right) d\alpha.$$

Интеграл  $T_1$  сходится быстро и может быть вычислен по формуле Симпсона. Для раскрытия неопределенности  $0:0$ , которая имеет место при  $\alpha=0$ , можно воспользоваться разложением

$$J_1\left(\frac{R}{H}\alpha\right) = \frac{R}{2H}\alpha \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K \left(\frac{R}{H}\alpha\right)^{2K}}{2^{2K} K!(K+1)!}$$

Учитывая, что  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} J_1\left(\frac{R}{H}\alpha\right) = 1$ , получаем

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ [af(\alpha, \mu_0) - 1] J_0\left(\frac{r}{H}\alpha\right) \frac{R}{2H} \left[ 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{R}{H}\alpha\right)^2 + \frac{1}{192} \left(\frac{R}{H}\alpha\right)^4 - \dots \right] \right\} = -\frac{R}{H}.$$

Во избежание разветвления процесса вычислений, нижний предел примем равным некоторому малому числу  $N_0$ . Поскольку при малых  $\alpha > 0$  подынтегральная функция по величине убывает, погрешность от такой замены очевидно имеет оценку  $\epsilon_{N_0} < RN_0/2H$ .

Верхний предел, как установлено К.Е. Егоровым, а также нашими расчетами, следует принимать  $\leq 10$ , поскольку в другом случае практически уже не достигается уточнения.

Интеграл  $T_2$  может быть вычислен по формуле

$$\int_0^\infty J_\nu(dt) J_\mu(\beta t) t^{-\lambda} dt = \frac{\alpha^\nu \Gamma[(\nu+\mu-\lambda+1)/2]}{2^\nu \beta^{\nu-\lambda+1} \Gamma[-(\nu+\mu-\lambda+1)/2 \Gamma(\nu+1)]} \times \\ \times F\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}, \frac{\nu-\mu-\lambda-1}{2}, \nu+1; \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)$$

из которой после подстановок получим

$$T_2 = \begin{cases} 1 & \text{при } r \leq 0, \\ F_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1; \frac{r^2}{R^2}\right) & \text{при } r \leq R, \\ F_2\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 2; \frac{r^2}{R^2}\right) & \text{при } r \geq R, \end{cases}$$

где  $\Gamma$  — гамма функция;  $F$  — гипергеометрический ряд.

Алгоритм, построенный на этих уравнениях, позволил быстро вычислять осадки слоя при различных условиях закрепления его нижней поверхности. По той же программе вычисляются и осадки полупространства - для этого надо принять толщину слоя достаточно большой.

Третья глава содержит решения уравнений, полученных во второй главе. Излагаются методы, алгоритмы и программы расчета фундаментов в виде линейно упругих плит и балок.

Для расчета осесимметрично деформируемых круглых и кольцевых плит разработано два алгоритма. Один из них основан на методе Б.Н.Жемочкина и предназначен для расчета плит постоянной толщины. В другом алгоритме используется вариационно-разностный метод и рассматриваются плиты, жесткость которых является произвольной функцией радиуса. В обоих случаях в качестве основания приняты слой, полупространство или основание с переменным по радиусу коэффициентом жесткости. Эти алгоритмы были использованы в нескольких программах, составленных при участии автора Г.В.Третьяковым и И.И.Шишовым, в основном, для ЭЦВМ "Минск-22".

Разработаны также алгоритмы и программы расчета балок, в которых использовались методы конечных разностей, вариационно-разностный, Б.Н.Жемочкина, Я.Б.Львина.

С помощью этих программ методом машинного эксперимента установлено минимальное число узлов сетки (или стержней, соединяющих конструкцию и основание), необходимое для достижения достаточной точности расчетов. Если основание связное, то на величине погрешностей сильно оказывается наличие разрыва в реактивных давлениях у края фундамента. Показано, что при определенных схемах расположения связей между фундаментом и основанием (или при определенных схемах расположения узлов сетки) можно добиться монотонного приближения к точному решению сверху и снизу.

Расчеты большого количества балок и плит позволили установить, что при числе узлов на радиусе плиты или

полупролете балки 22 могут быть получены весьма точные результаты. Многочисленные сопоставления с имеющимися точными решениями для балок и плит как на упругом основании, так и на жестких опорах, подтвердили этот вывод.

По программам для определения усилий в круглых плитах на слое исследовано влияние различных параметров этой модели на результаты расчета. Установлено, в частности, что осадка определяется в основном величиной модуля упругости слоя, а изгибающие моменты — его толщиной. Отсюда следует, что при определении параметров модели по результатам натурных наблюдений, величину модуля упругости следует находить по данным о средних осадках, а толщину слоя — по данным о прогибах фундамента.

С помощью описанных программ составлены таблицы для расчета круглых сплошных и кольцевых плит на слое, загруженных различными нагрузками. Эти таблицы нашли применение при расчете фундаментов ряда дымовых труб, в частности, труб Запорожской ГРЭС и Ново-Стерлитамакской ТЭЦ.

Для расчета фундаментов в виде прямоугольных плит больших размеров, получивших большое распространение в последнее время, разработаны алгоритмы и программы для ЭЦВМ — РПС-1 и РПС-2. Эти программы составлены при участии автора Э.А.Комаровым и В.И.Широковым и позволяют рассчитывать плиты зданий каркасного типа в случаях, когда основание моделируется слоем.

Программы РПС-1 и РПС-2 нашли применение в исследовательской работе, проведенной под руководством НИИ оснований по определению модели грунтового основания, которую следует рекомендовать при расчете зданий повышенной этажности. Сопоставление результатов расчетов с натурными данными показало, что модель слоя лучше других описывает деформированное состояние фундаментов, а результаты, наиболее близкие к натурным, получены по программам РПС-1 и РПС-2. Это исследование имело важное значение для дальнейшего совершенствования методов расчета фундаментов в виде плит больших размеров.

Другое исследование было посвящено оценке влияния верхнего строения силосных коринусов на распределение усилий в фундаментной плите. Оно проводилось совместно с НИИ оснований и Ленпромстройпроектом. Учет взаимодействия верхнего строения и фундамента привел к результатам, которые сильно отличались от полученных для изолированной плиты.

По программам РПС-1 и РПС-2 рассчитано большое количество фундаментов сооружений, в том числе гостиниц "Националь" и "Интурист", жилого дома в Н. Кузьминках в Москве, административного здания Облпрофсовета и двух жилых домов в Челябинске, административного здания в Оренбурге.

Программа РПС-2 рекомендована НИИ оснований для использования в проектных организациях и издана в виде брошюры - приложения к Рекомендациям по методам расчета фундаментных плит на сжимаемом основании конечной толщины (НИИ оснований, М., 1988).

При расчете фундаментов в виде плит больших размеров часто возникает необходимость учесть неоднородность основания в плане, наличие жестких пилонов, переменность толщины плиты и т.д. С учетом этих факторов составлена совместно с А.С.Сытником программа РПС-3. Принято, что плита имеет произвольно (в том числе и скачкообразно) меняющуюся жесткость и является конструктивно ортотропной. Основанием её служит набор пружин, обладающих различными коэффициентами жесткости. На закон их изменения не накладывается ограничений, поэтому по программе РПС-3 можно рассчитать плиты, свободно опирающиеся в любых узлах сетки на жесткие или податливые опоры, высокие и низкие ростверки свайных оснований и т.п. Ребристые плиты и плиты с диафрагмами жесткости могут рассчитываться приближенно как конструктивно анизотропные.

Программа РПС-3 обладает хорошо разработанной сервисной частью и в настоящее время внедряется в институтах Моспроект-1 и НИИ оснований. Она составлена в рамках подготовки нового издания Рекомендаций по расчету фундаментных плит, проект которого выпущен в настоящее время НИИ оснований.

С помощью этой программы рассчитаны многие реальные объекты, проектирующиеся или строящиеся в Москве, Челябинске и Оренбурге. Среди них – плита здания главного вычислительного центра Госбанка СССР, проект которого разработан Управлением Моспроект-2.

Четвертая глава посвящена вопросу расчета железобетонных фундаментов в нелинейной постановке. В ней, в частности, дается анализ особенностей физических уравнений железобетона, представляющих интерес с вычислительной точки зрения.

Вначале рассматриваются физические уравнения бруса, заимствованные из СНиП П-В. 1-62 и устанавливающие зависимость жесткости балки ( $B$ ) от изгибающего момента ( $M$ ).

До появления трещин жесткость балки постоянна

$$B = 0,85 E_a J_{np} \quad (14)$$

После появления трещин она зависит от изгибающего момента и определяется по формуле

$$B = h_0 \bar{x}_1 \left[ \frac{\psi_a}{E_a F_a} + \frac{\psi_\sigma}{(\gamma' + \xi) b h_0 \gamma} \right]^{-1} \quad (15)$$

Отмечается, что  $\xi$ ,  $\psi_a$  – суть функции изгибающего момента.

Выражение (15) справедливо, когда изгибающий момент меньше предельного и составляет примерно  $M < 0,7 M_c$ .

Физические уравнения круглых осесимметрично деформируемых плит получены автором из общих уравнений, предложенных Н.И.Карпенко. Выражения для изгибающих моментов в таких плитах имеют вид

$$M_r = -(A\chi + Bx), \quad M_\theta = -(B\chi + Cx). \quad (16)$$

Обратив матрицу этих уравнений, можно получить

$$-\chi = B_{11} M_r + B_{12} M_\theta; \quad -x = B_{12} M_r + B_{22} M_\theta. \quad (17)$$

В стадии линейно упругого деформирования, когда изгибающие моменты не превышают  $0,5 M_{cr}$ , получаем

$$A = D_r = \frac{E_\sigma J_{rp}}{1 - \mu_\sigma^2}, \quad C = D_\theta = \frac{E_\sigma J_{rp}}{1 - \mu_\theta^2}. \quad (18)$$

Когда  $0,5M_{\delta Tr} < M_r \leq M_{\delta T\theta}$ ,  $M_\theta \leq 0,5M_{\delta T\theta}$ ,

$$A = D_r \left(1 - \frac{M_r - 0,5M_{\delta Tr}}{2,5M_{\delta Tr}}\right), \quad C = D_\theta. \quad (19)$$

Если  $0,5M_{\delta T\theta} < M_\theta \leq M_{\delta Tr}$ ,  $M_r \leq 0,5M_{\delta Tr}$

$$A = D_r, \quad C = D_\theta \left(1 - \frac{M_\theta - 0,5M_{\delta T\theta}}{2,5M_{\delta T\theta}}\right). \quad (20)$$

И наконец, если  $0,5M_{\delta Tr} < M_r \leq M_{\delta T\theta}$ ;  $0,5M_{\delta T\theta} < M_\theta \leq M_{\delta Tr}$ .

$$A = D_r \left(1 - \frac{M_r - 0,5M_{\delta Tr}}{2,5M_{\delta Tr}}\right), \quad C = D_\theta \left(1 - \frac{M_\theta - 0,5M_{\delta T\theta}}{2,5M_{\delta T\theta}}\right). \quad (21)$$

Во всех случаях  $B = \frac{1}{2}(A+C)\mu_\delta$ . (22)

Рассматривалась радиально-кольцевая арматура, при которой трещины могут быть двух направлений: окружные и радиальные.

Если в пределах данного элемента имеется только окружная трещина

$$M_r > M_{\delta Tr}, \quad M_\theta \leq M_{\delta T\theta},$$

то для такого элемента

$$A = \frac{h_{or}^3 \mu_r \xi_r (1 - 0,5\xi_r) \nu_r E_\delta E_a}{(\xi_r \nu_r E_\delta / \psi_\delta + M_r E_a / \psi_a) \psi_\delta \psi_a}, \quad (23)$$

$$C = \frac{h^3 (\omega_1 \omega_2 E_B E_H)_\theta}{6 (\omega_1 E_B + \omega_2 E_H)_\theta}, \quad B = 0.$$

В этих формулах использовались общепринятые обозначения.

Если имеется только радиальная трещина, то надо  $A$  и  $C$ , а также индексы  $r$  и  $\theta$  поменять местами.

При наличии двух трещин жесткости  $A$  и  $C$  вычисляются по первой из формул (23), в которой при вычислении  $C$  надо индексы  $r$  заменить на  $\theta$ .

Из величин, входящих в (23), от изгибающих моментов зависят  $\xi$ ,  $\psi_a$ ,  $\nu$ . Эти зависимости в реферате не приводятся, так как они весьма громоздки.

Приведенные физические уравнения круглых плит, также как и балок, справедливы, когда  $M_{max} \ll M_T$ . Чтобы сделать возможным расчет балок и плит и в тех случаях, когда в их сечениях максимальные моменты достигают значения  $M_T$ , автором сделано предположение, что формулы (15) и (23) справедливы при всех значениях моментов в интервале  $M_{\delta r} \leq M_{max} \leq M_T$ . Кроме того принято, что после достижения моментом предельного значения, соответствующая кривизна может возрастать при постоянном моменте. Последняя предпосылка находится в соответствии с условием пластичности А.А.Гвоздева, которое в случае осесимметричной деформации плиты, армированной радиально-кольцевой арматурой имеет вид

$$(\bar{m}_r - m_r)(\bar{m}_\theta - m_\theta) = 0, \quad (24)$$

где  $\bar{m}_r$ ,  $\bar{m}_\theta$  – компоненты тензора сопротивления, то есть предельные значения радиального и кольцевого моментов;  $m_r$  и  $m_\theta$  – радиальный и кольцевой моменты, действующие на элемент.

Правомерность принятых допущений подтверждается результатами теоретических и экспериментальных исследований балок, проведенных О.А.Коковым, С.М.Крыловым, А.И.Козачевским, которые исследовали балки прямоугольного сечения и получили формулы жесткости при моментах, близких к предельным, по которым на рис.1 построен график 2. График 3 построен на основе предпосылок, принятых автором. Сопоставление результатов расчета балок на упругом основании по формулам, иллюстрированным графиком 2 и 3, показало их хорошее совпадение.

Поэтому в диссертации принято, что, когда момент в балке достигает предельного значения жесткость вычисляется по формуле

$$B = Mp. \quad (25)$$

Если радиальный момент в круглой плите достигает предельного значения

$$A = M_{Tr} / x, \quad (26)$$

а жесткость  $C$  определяется в зависимости от величины момента  $M_p$ . Когда окружной момент становится равным предельному

$$C = M_{Tr} / x, \quad (27)$$

а жесткость  $A$  вычисляется в зависимости от величины  $M_p$ .

В уравнениях (14) и (15), а также (18-23) жесткости представлены как функции изгибающих моментов. Эти функции при  $M = M_{\delta_f}$  имеют разрыв. Считается, что в этом случае уменьшаются скачком не только жесткости, но и кривизны. Эта особенность физических уравнений иногда делает невозможным получение единственного решения. Для примера рассматривается фрагмент решения задачи об изгибе балки. Пусть после первого шага итерационного процесса, когда была принята начальная жесткость  $B_0$ , получается момент  $M_0$  (рис.2а). После второго шага – при жесткости  $B_1$  момент  $M_1$ . Тогда третий шаг приведет к тому результату, что и первый и т.д. Получается два устойчивых решения  $B_p$ ,  $M_p$  и  $B_1$ ,  $M_1$ . Это явление наблюдалось ранее С.М.Крыловым и А.И.Козачевским при расчете стержневых систем, а также Н.И.Карпенко и Л.И.Яриным при расчете плит на жестких опорах.

Два устойчивых решения получается также и в том случае, когда в первом приближении момент оказывается больше предельного (рис.2б).

Чтобы обеспечить получение единственного решения, принято, что жесткости являются непрерывными функциями кривизн, а сами кривизны не претерпевают разрывов.

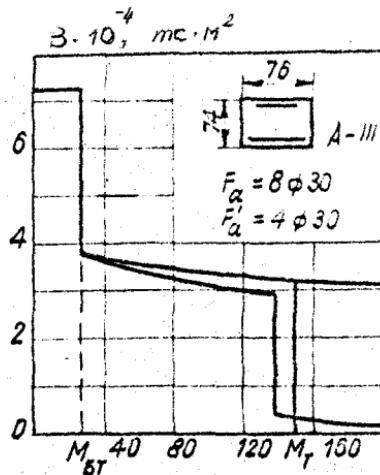


Рис. 1

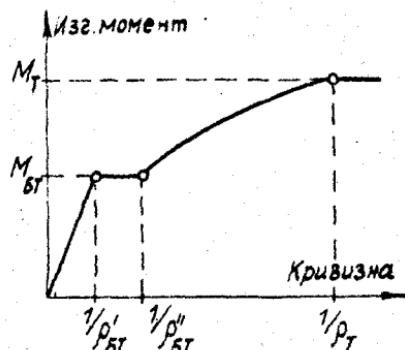


Рис. 3

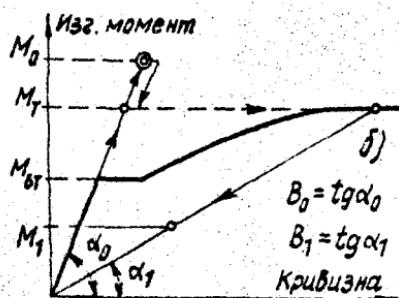
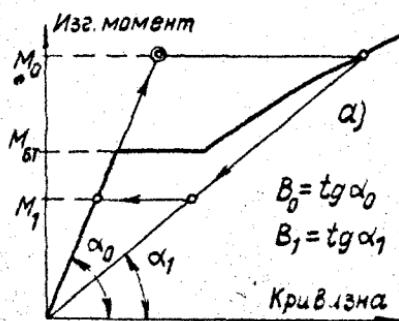


Рис. 2

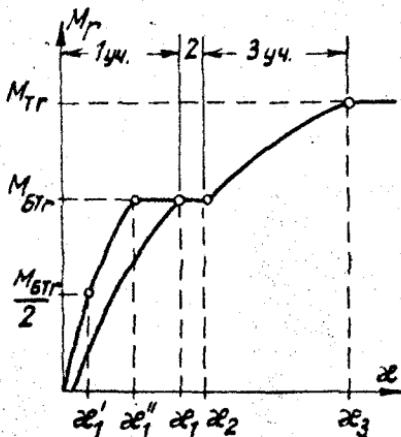


Рис. 4

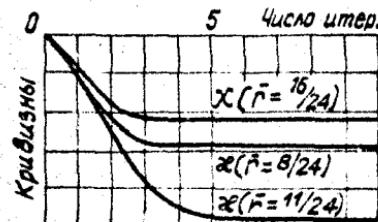


Рис. 5

В этом случае алгоритм вычисления жесткости в некотором сечении балки будет следующим. Вначале по формуле (14) и (15) определяются кривизны на границах участков кривой деформирования (рис. 3). Далее вычисление строится следующим образом.

1. Если в предыдущем приближении получено  $\frac{1}{\rho} \leq \frac{1}{\rho_{\delta r}}$ , то в последующем принимается  $B = 0,85 E_\delta D_{pr}$ .

2. Когда кривизна, найденная из предыдущего приближения, лежит в пределах  $\frac{1}{\rho_{\delta r}} < \frac{1}{\rho} < \frac{1}{\rho_T}$ , то в последующем приближении принимается

$$B = M_{\delta r} \rho.$$

3. Когда предыдущее приближение дает  $\frac{1}{\rho_T} < \frac{1}{\rho} < \frac{1}{\rho_{\delta r}}$ , жесткость в последующем приближении определяется из системы уравнений

$$B = M\rho, \quad B = h_0 z_i \left[ \frac{\psi_a}{E_a F_a} + \frac{\psi_\delta}{(\gamma + \xi) b h_0 v} \right]^{-1}.$$

4. Если  $\frac{1}{\rho} \geq \frac{1}{\rho_T}$ , то на следующем шаге принимается  $B = M_T \rho$ .

Аналогичные задачи возникают и при расчете железобетонных плит. Разработан алгоритм вычисления жесткостей при расчете круглых осесимметрично нагруженных плит, армированных радиально-кольцевой арматурой. Эта задача сложнее, чем для балок, так как для каждого элемента плиты надо вычислять три жесткости, зависящие от двух изгибающих моментов.

Краткое описание алгоритма вычисления жесткостей плиты по заданным кривизнам иллюстрируется графиком, построенным на плоскости  $M_T - \kappa$  (рис.4). Вначале по формуле (17) находятся кривизны, лежащие на границах участков деформирования. Наибольшая радиальная кривизна, возможная в плите без трещин ( $\kappa_1$ ), определяется, если подставить в (17):  $A = 0,8 D_r$ ;  $C = 0,8 D_\theta$ ;  $B = 0,4(D_r + D_\theta)\mu_\delta$ ;  $M_r = M_{\delta r r}$ ;  $M_\theta = M_{\delta r \theta}$ . Кривизна  $\kappa_2$  находится, если выражение для  $A$  взять из (23) и принять  $M_r = M_{\delta r r}$ . Аналогично находится  $\kappa_3$  — для этого значение определяется из (23), где принимается  $M_r = M_{T r}$ .

Если имеется радиальная трещина, то участок 1 распакается на три. При определении  $X'_1$  и  $X''_1$  жесткости вычисляются по формулам (23) и принимаются соответственно  $M_r = 0,5 M_{\delta tr}$  и  $M_r = M_{\delta tr}$ .

Жесткости, принимаемые в последующем приближении, в каждой точке плиты вычисляются по кривизнам, найденным в предыдущем приближении. Для этого решается система уравнений с четырьмя неизвестными:  $A$ ,  $C$ ,  $M_r$ ,  $M_\theta$ . В неё входят уравнение (17) и уравнения, в которых  $A$  и  $C$  выражаются через моменты.

Если оказывается, что в данной точке плиты трещин нет, т.е.  $M_r < M_{\delta tr}$ ,  $M_\theta < M_{\delta tr}$ , а, следовательно  $X < X_g$ , то на следующем этапе жесткости определяются по формулам (18-22). Если кривизна предыдущего приближения такова, что она относится ко второму участку, то  $B = 0$ ,  $M_r = M_{\delta tr}$ ,  $A = M_{\delta tr}/\kappa$ , а  $C$  определяется по формуле (23). Когда кривизна оказывается на третьем участке, жесткости определяются по формулам (23). На четвертом участке  $A = M_{\delta tr}/\kappa$ ,  $B = 0$ , а  $C$  определяется по формуле (23).

Предложенные алгоритмы вычисления жесткостей во всех случаях обеспечивали монотонную и быструю сходимость процесса последовательных приближений. На рис. 5 показаны величины кривизн, полученные при расчете круглой плиты в зависимости от числа итераций. Графики построены для сечений, расположенных на расстоянии  $8/24$ ,  $16/24$  и  $11/24$  радиуса от центра. В этих сечениях наиболее сильно проявились нелинейные свойства железобетона. Как видим, после 10-ти приближений достигается полная сходимость.

Эти алгоритмы использованы при составлении программ расчета на ЭЦВМ "Минск-22" железобетонных фундаментных балок, круглых и кольцевых осесимметрично нагруженных плит. Они предназначены для выполнения практических расчетов и исследования особенностей поведения железобетонных фундаментов.

По одной из этих программ могут рассчитываться балки, свободно лежащие на поверхности основания, которое моделируется основанием с переменным коэффи-

циентом постели, полупространством или их комбинацией. Поперечное сечение балки переменное по длине, прямоточное или тавровое. Армирование сжатой и растянутой зон также переменное по длине, арматура ненапряженная. Расчетная схема строится методом Я.Б.Львина, количество связей балки с основанием - до 80-ти. Нелинейная задача решается методом дополнительных перемещений (термин И.А.Биргера). Результаты расчета (осадки, реактивные давления, изгибающие моменты, поперечные силы и жесткости в каждом сечении) выдаются на широкую печать. Программа составлена В.Ф.Тутыниным при участии автора.

Другая программа предназначена для круглых плит, свободно лежащих на слое или на основании с переменным по радиусу коэффициентом жесткости. Плита может иметь переменную толщину и переменную по радиусу верхнюю ненапрягаемую арматуру. Разностная схема строится вариационно-разностным методом. Число узлов, наносимых на плиту, может достигать 60-ти. Нелинейная задача решается методом переменных параметров упругости. Программа разработана И.И.Шишовым при участии автора.

По этой программе выполнены расчеты круглой плиты на жестких опорах и плит на грунтовом основании с целью сравнения результатов расчетов с экспериментальными.

Одно из таких сопоставлений сделано для равномерно нагруженной круглой плиты на жестких опорах, которая испытана С.М.Крыловым и А.М.Королевым. На рис.6 приведены результаты расчета плиты в линейной (1) и нелинейной (2) постановках, а также экспериментальные данные (3). Результаты расчета в нелинейной постановке хорошо совпадают с экспериментальными. Об этом свидетельствуют графики нагрузка-прогиб, картины трещин на нижней и верхней поверхности плиты, а также величины нагрузки, при которой появились первые трещины: в опыте они отмечены при  $2$  нагрузке  $0,092 \text{ кгс}/\text{см}^2$ , а по расчету - при  $0,105 \text{ кгс}/\text{см}^2$ .

Рассчитана также круглая плита на полупространстве,

равновеликая по площади квадратной железобетонной плите ( $154 \times 154 \times 6$  см), которую испытали В.Д.Попов и И.Н.Толмачев. Плита армирована ненапряженной арматурой. Нагрузки прикладывались в центре плиты по небольшой площадке. По данным испытаний величина предельной нагрузки составила 15 тс, а по расчету — 14,6 тс, т.е. расхождение между ними меньше 3%. В то же время по линейному расчету предельной для плиты являлась нагрузка 3,24 тс.

По программам, описанным в настоящей главе, рассчитана круглая плита на полупространстве, равновеликая по площади прямоугольной плите ( $70 \times 54 \times 0,16$ ) на грунтовом основании, данные об испытании которой приведены в монографии Б.С.Раева-Богословского. Плита армирована преднапряженной арматурой с расчетным предварительным напряжением  $20 \text{ кгс}/\text{см}^2$ . Нагрузка прикладывалась в центре по малой площадке. При расчете предварительное напряжение учтено косвенно: нормативное сопротивление бетона растяжению увеличено на  $20 \text{ кгс}/\text{см}^2$ , т.е. на величину предварительного обжатия. Расчетное значение предельной нагрузки — 110 тс отличается от опытного (100 тс) на 10%. По линейному расчету предельной для этой плиты является нагрузка 35 тс.

Сопоставление результатов расчетов с данными испытаний показывает, что разработанные решения приводят к адекватным результатам. Представляет интерес, что применение линейных предпосылок к основанию не вносит существенных погрешностей даже при нагрузках, предельных по прочности плит.

С помощью разработанных программ исследованы особенности перераспределения усилий в фундаментах в стадиях, предшествующих появлению шарниров пластичности.

На рис. 7 приведены результаты расчета балки постоянного сечения, опирающейся на полупространство ( $E_0 = 1000 \text{ кгс}/\text{см}^2$ ,  $\mu_0 = 0,3$ ) на сосредоточенную и равномерную нагрузки. Сечение балки прямоугольное высотой 50 и шириной 80 см. В ненагруженном состоянии по критерию М.И.Горбунова-Посадова балка относится к категории жестких.

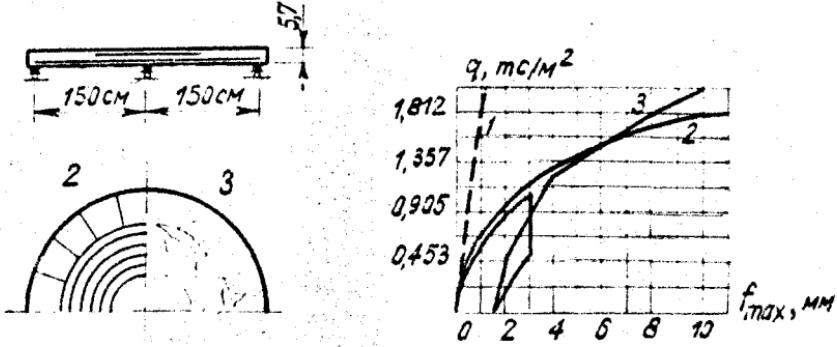


Рис. 6

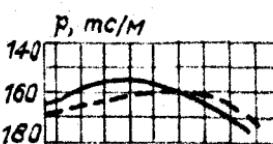
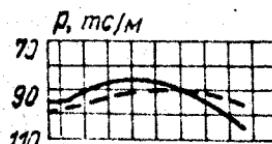
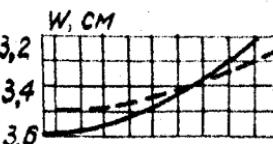
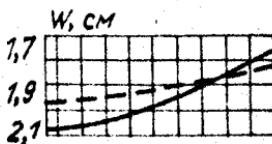
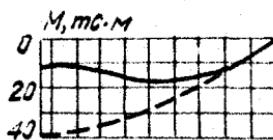
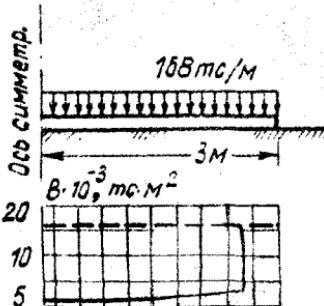
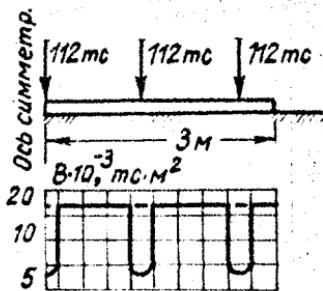


Рис. 7

Результаты расчета круглой плиты, опирающейся на упругий слой с характеристиками:  $E_0 = 100 \text{ кгс/см}^2$ ;  $\mu_0 = 0,3$ ;  $H = 9,6 \text{ м}$  даны на рис. 8. Плита имеет радиус 9,6 м, толщину 60 см. По классификации М.И.Горбунова-Посадова эта плита имеет среднюю гибкость.

Анализ результатов расчетов большого числа фундаментных балок и плит в нелинейной постановке показал следующее.

1. Различие результатов линейных и нелинейных расчетов балок и плит весьма велико и объясняется тем, что на участках с трещинами жесткость конструкции существенно уменьшается. Плиты становятся неоднородными: в областях без трещин их жесткость почти не меняется; там, где имеются трещины одного направления, жесткость в направлении трещин близка к начальной, а в перпендикулярном — уменьшается в несколько раз, анизотропия на этих участках проявляется наиболее сильно; в областях с трещинами в двух направлениях жесткости уменьшаются в обоих направлениях, анизотропия также может быть большой.

2. Наиболее значительным является перераспределение моментов. Результаты определения моментов в линейной и нелинейной постановках могут отличаться в несколько раз. Так, в примере с плитой (рис. 8) моменты в центре по линейному расчету получились примерно в 8 раз больше, чем по нелинейному. Иногда эпюры моментов отличаются качественно (рис. 7).

3. Перераспределение усилий в конструкциях на упругом основании и на жестких опорах носит различный характер. В конструкциях на жестких опорах по данным С.М.Крылова перераспределение приводит к некоторому снижению (на 20-30%) максимальных моментов и к значительному (в 10-15 раз) увеличению прогибов. В фундаментных конструкциях происходит обратное — значительно отличаются изгибающие моменты и гораздо меньше (на десятки %) — перемещения. Это различие объясняется тем, что в фундаментных конструкциях перераспределение усилий происходит не только вследствие изменения жесткостей, но также и воздействий на них — реактивных давле-

ний. В то же время осадки линейно- и нелинейно-деформируемого фундамента отличаются не столь существенно, так как они в большей мере определяются характеристиками деформируемости основания, чем фундамента.

4. Учет нелинейности деформирования железобетона позволяет существенно повысить несущую способность фундаментов. Для иллюстрации рассматривается пример определения величины расчетной нагрузки на фундаментную балку (рис. 9). Балка опирается на полупространство с характеристиками  $E_0 = 150 \text{ кгс/см}^2$ ,  $\mu_0 = 0,38$ . Приято, что нагрузка достигает расчетного значения, если при расчетных характеристиках материалов напряжения в арматуре в наиболее нагруженном сечении балки достигают предела текучести. В линейной постановке получилось, что расчетной является нагрузка  $P = 80 \text{ тс}$ , так как при этом момент в середине пролета достигает предельной величины. Расчет в нелинейной постановке показал, что максимальный момент в балке достигает предельного лишь при нагрузке  $P = 200 \text{ тс}$ , т.е. в 2,5 раза большей, чем по линейному расчету.

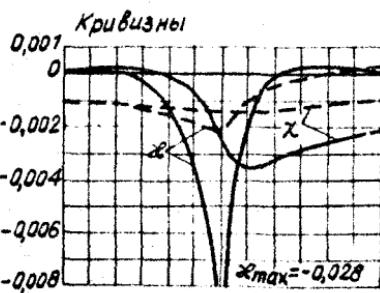
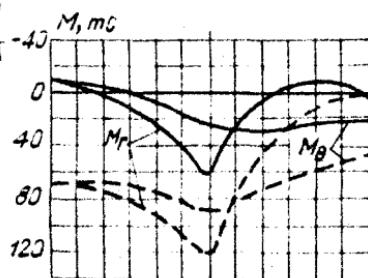
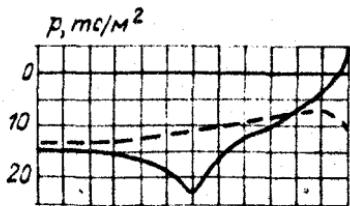
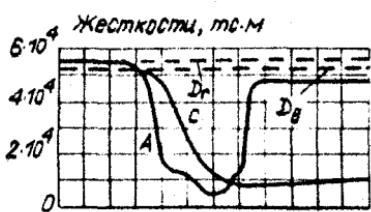
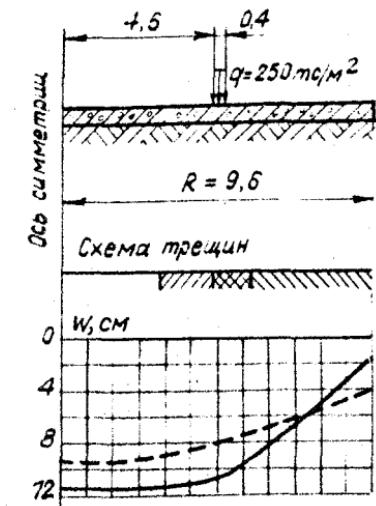
5. Однако, трещинообразование и другие неупругие деформации приводят к перераспределению не только усилий, но и деформаций, что проявляется в быстром росте и концентрации кривизн на сравнительно малых участках площади фундамента (рис. 8). На этих участках раскрываются значительные трещины, осадки фундамента становятся неравномерными.

6. Величина перераспределения усилий и деформаций зависит от ряда факторов. Наиболее существенные из них следующие.

а) Величина и характер приложения нагрузки. Чем больше нагрузка, и чем большая часть площади фундамента охвачена трещинами, тем больше перераспределение (рис. 7).

б) Начальная жесткость системы фундамент-основание. С уменьшением начальной жесткости системы перераспределение увеличивается.

в) Армирование растянутой и сжатой зон. Величина перераспределения существенно зависит от количества



- зона окружных трещин
- зона радиальных трещин
- нелинейное решение
- - - линейное решение

Рис. 8

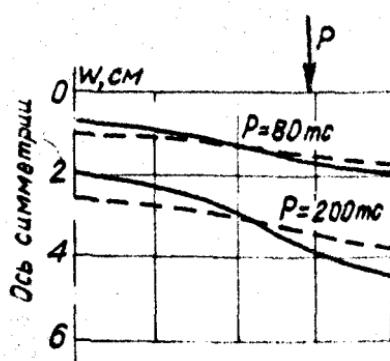
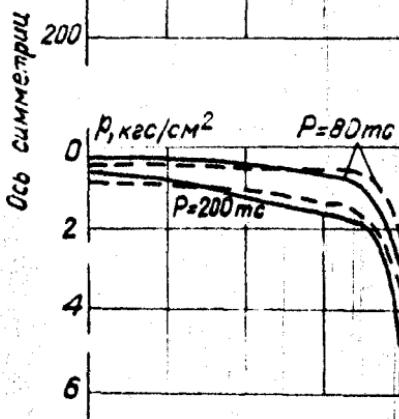
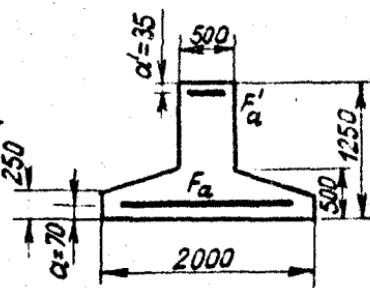
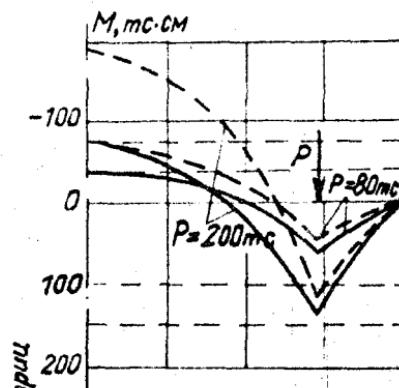
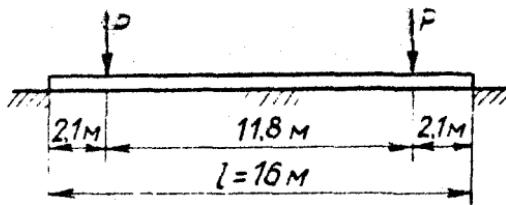


Рис. 9

арматуры в растянутой зоне. С уменьшением процента армирования растянутой зоны перераспределение увеличивается. Влияние сжатой арматуры значительно меньше, но также должно учитываться.

г) Модель грунтового основания. Представление о влиянии модели основания дают результаты расчета круглой сплошной фундаментной плиты дымовой трубы Запорожской ГРЭС (рис. 10). Плита рассчитана при трех моделях основания: винклеровой ( $K = 0,0785 \text{ кгс}/\text{см}^3$ ), полупространстве ( $E_0 = 280 \text{ кгс}/\text{см}^2$ ,  $\mu_0 = 0,3$ ) и нелинейно упругом слое. Характеристики моделей подобраны так, что средние осадки плиты при всех моделях были одинаковы. Размеры плиты, армирование, нагрузка и характеристики основания приняты такими, как в одном из вариантов расчета, выполненного по заказу Фундаментпроекта. Критерий М.И.Горбунова-Посадова для этой плиты в ненагруженном состоянии равен 0,15, т.е. плита весьма жесткая.

Для определения перемещения поверхности нелинейно упругого слоя использована программа, составленная В.Н.Широковым. Физические уравнения для слоя приняты в форме, предложенной А.И.Боткиным

$$G = \frac{0,966}{0,0075 + \varepsilon_i}, \quad K = 1806^{0,32},$$

где  $G$  - модуль сдвига;  $K$  - модуль объемной деформации;  $\sigma$  - среднее напряжение;  $\varepsilon_i$  - интенсивность деформаций. Видно (рис. 10), что очертания эпюр изгибающих моментов в линейном и нелинейных решениях одинаковы и не зависят от типа основания, но учет нелинейности деформирования железобетона приводит к уменьшению изгибающих моментов во всех сечениях плиты.

Результаты расчета плиты в нелинейной постановке при всех рассмотренных моделях основания ближе между собой, чем результаты расчета линейно упругой плиты. Если считать эпюры для нелинейно деформируемой плиты на нелинейном основании наиболее близкими к действительности, то в рассмотренном примере учет нелиней-

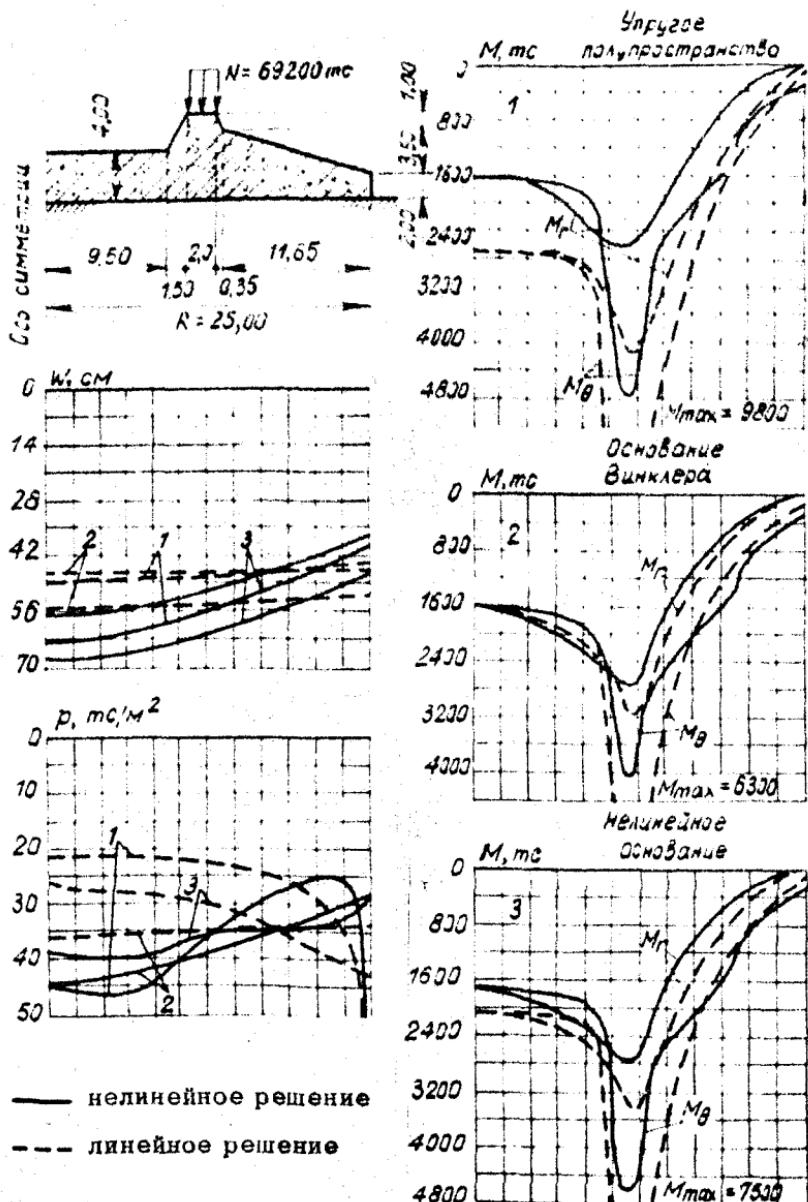


Рис. 10

ности материала фундамента оказался важнее, чем "правильный" выбор модели основания.

Далее рассматриваются задачи расчета фундаментов, в которых нелинейные деформации велики и образуются пластические шарниры. Термин "пластический шарнир" употребляется условно, поскольку принятые физические уравнения являются по существу уравнениями нелинейноупругого тела.

В рамках этих предпосылок решена задача определения предельной нагрузки на круглые фундаменты. Несущая способность фундамента является исчерпанной, если весь фундамент или часть его превращается в механизм, распадаясь на замкнутые области, ограниченные пластическими шарнирами, так что увеличение нагрузки возможно лишь за счет возрастания отпора со стороны основания. В настоящее время задача определения несущей способности круглых фундаментов решается методом предельного равновесия. Принимается, что железобетон является жестко-пластическим материалом, а отпор со стороны грунта не зависит от осадок фундамента и может быть принят постоянным по его подошве или меняющимся по заданному закону. Это решение, принадлежащее С.М.Крылову, включено в Инструкцию по расчету статически неопределеных железобетонных конструкций с учетом перераспределения усилий (Госстройиздат, М., 1981).

Для оценки погрешностей, связанных с предпосылками, принятыми в Инструкции, приводятся результаты расчетов двух круглых сплошных плит, которые спроектированы ВНИПИ Теплопроект в соответствии с Инструкцией, и результаты расчетов, полученных автором. В последних особенности деформирования железобетона учтены более полно, так как приняты физические уравнения, описанные в начале главы. Кроме того, учтено, что реактивные давления зависят от перемещений фундамента — основание моделируется упругим слоем.

Рассмотрена фундаментная плита дымовой трубы высотой 250 м, построенной на Костромской ГРЭС. При расчетной нагрузке на плиту  $N = 30500$  тс по Инструкции требуется арматура  $f_a = f'_a = 4,021 \text{ см}^2/\text{см}$ . Как

показали расчеты автора, при этой арматуре и нагрузке в плите не возникает пластических шарниров (рис. 11). Следовательно, при расчете по Инструкции количество арматуры в плите оказалось завышенным. Методом последовательных приближений было установлено, что этому армированию соответствует  $N = 5000$  тс, при которой под нагрузкой образуется кольцевой шарнир, смыкающийся с радиальными, проходящими по нижней поверхности консоли (рис. 11).

Расхождение этих результатов расчетов объясняется тем, что задолго до появления пластических шарниров вследствие трещинообразования реактивные давления резко концентрируются под нагрузкой, уменьшаясь к краю плиты. По Инструкции же считается, что реактивные давления постоянны, что приводит к завышению моментов на консоли и перерасходу арматуры.

Вместе с тем, предпосылка о равномерности реактивных давлений может приводить к погрешностям, которые не увеличивают, а уменьшают запас прочности. Так обстоит дело при расчете верхней арматуры центральной части плиты. Здесь по Инструкции принимается схема разрушения, в которой реактивные давления на консоли, совершая отрицательную работу, как бы препятствуют разрушению плиты. В действительности разгружающее влияние реактивных давлений на консоли не столь велико. Это показано на примере фундаментной плиты дымовой трубы высотой 250 м, построенной на Каширской ГРЭС (рис. 12). Эта плита, как и предыдущая, рассчитана ВНИПИ Теплопроект. По Инструкции получилось, что верхняя арматура не нужна, в то время как расчеты автора показали, что она необходима. Вследствие уменьшения (примерно в 8 раз) окружной жесткости по всей плите и радиальной жесткости под нагрузкой происходит значительное перераспределение реактивных давлений: они уменьшаются на консоли и увеличиваются под нагрузкой. Это приводит к появлению в центральной части плиты отрицательных моментов. Радиальные моменты достигают момента трещинообразования в центре плиты, а окружные — по всей ее внутренней части. Возникновение же

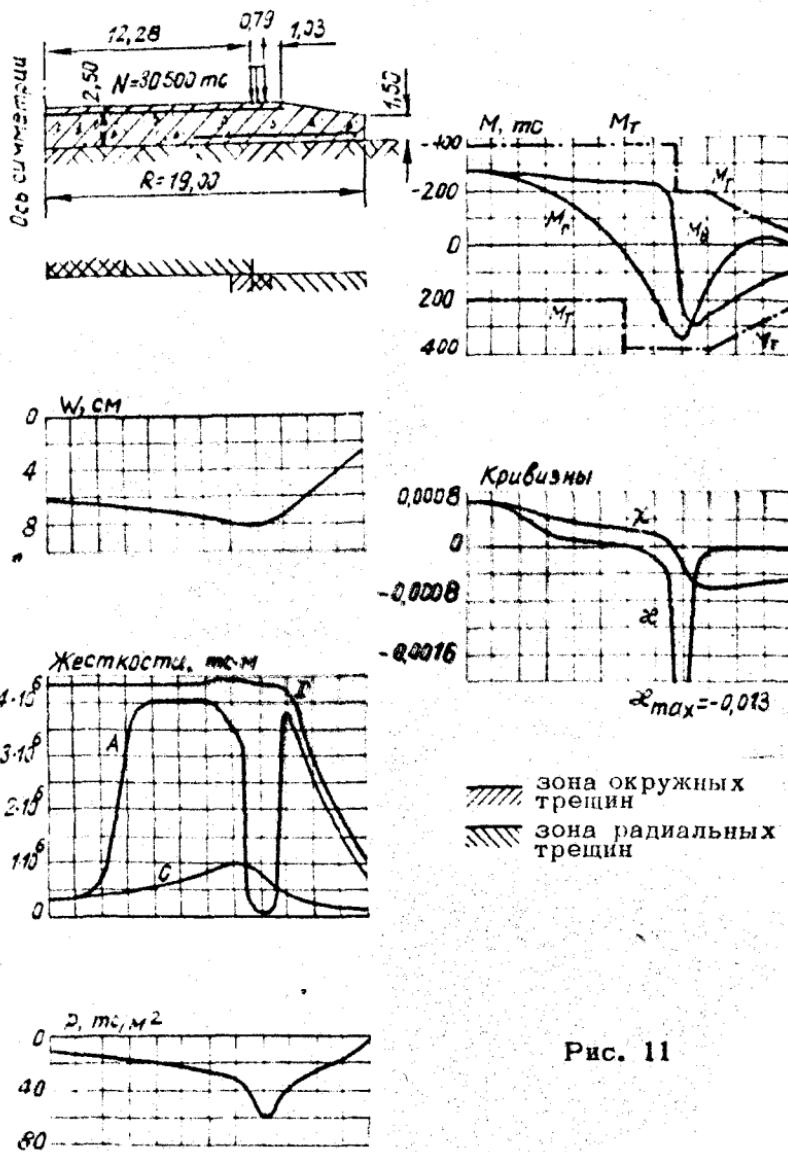


Рис. 11

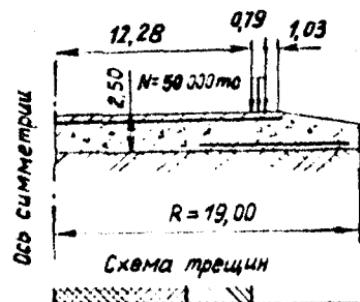
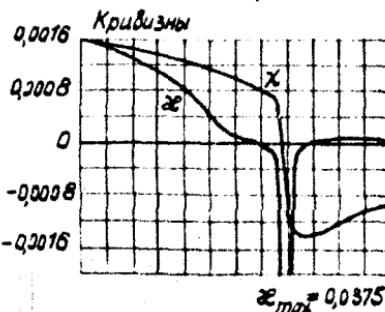
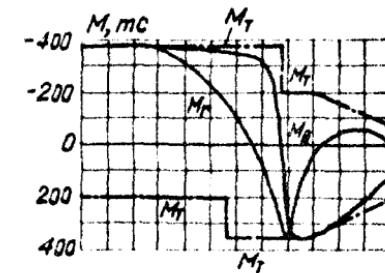
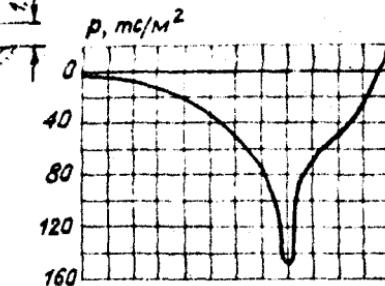
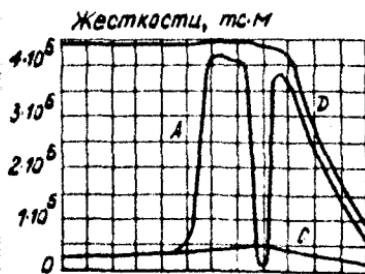
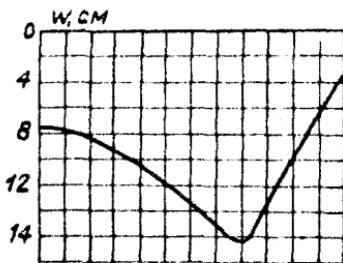
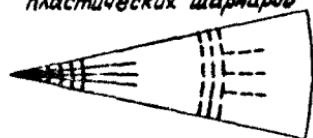


Схема пластических шарниров



- //// зона окружных трещин
- |||| зона радиальных трещин
- пластический шарнир верхний
- пластический шарнир нижний

Рис. 12

трещин в неармированной части плиты означает ее разрушение. Получается, что в данном случае расчет по Инструкции не обеспечивает прочности фундамента.

При расчете железобетонных конструкций в нелинейной постановке особое значение приобретает способ подбора арматуры. Если при линейном расчете этот вопрос решается однозначно – количество и расположение арматуры определяются эпюрами внутренних усилий, то при расчете в нелинейной постановке сами эти эпюры зависят от принятого армирования.

Как показали описанные выше исследования, влияние арматуры на распределение усилий на различных участках фундамента различно. Там, где трещин нет, жесткость почти целиком определяется размерами бетонного сечения; на участках с трещинами растянутая арматура оказывает на величину жесткости существенное влияние. Отсюда следует, что рабочая арматура должна распологаться не равномерно, а концентрироваться там, где возможно появление больших деформаций. Таким образом, естественной является постановка задачи об оптимальном распределении арматуры. Этому вопросу посвящены работы многих авторов, в частности, М.И.Рейтмана, И.Д.Гликина, Д.Г.Гречановской, А.И.Козачевского, В.Г.Назаренко, Г.Г.Книжника, С.Н.Клепикова. Однако общего алгоритма, эффективного во всех случаях, еще не найдено.

В диссертации предложено решение задачи об оптимальном распределении арматуры в круглых фундаментных плитах, полученное совместно с Й.И.Шишовым и М.И.Климовым. В нем использованы описанные выше метод и программа определения усилий и деформаций в круглых плитах при расчете их в нелинейной постановке.

Считается, что заданы все параметры плиты и основания, кроме коэффициентов армирования растянутых зон. В качестве критерия оптимальности принят объем рабочей растянутой арматуры, а в качестве управляемых параметров – коэффициенты армирования в радиальном и окружном направлениях  $\mu_r$  и  $\mu_\theta$ .

Задача сводится к отысканию такого вектора

$$\bar{\mu}^* = (\mu_{r(\theta)i}^*), \quad i=1,2,\dots,n,$$

который доставляет  $\min_{\bar{\mu}}$  функции

$$C(\bar{\mu}) = 2\pi \Delta r \sum_{i=1}^n (\mu_{ri} h_{oi} + \mu_{\theta i} h_{\theta i}) r_i$$

и удовлетворяет условиям прочности и ограничения ширины раскрытия трещин

$$\varphi_1(\bar{\mu}, \bar{M}) \leq 0, \quad \varphi_2(\bar{\mu}, \bar{M}) \leq 0,$$

$$\bar{\mu} = (\mu_{r(\theta)i}), \quad \bar{M} = (\bar{M}_{r(\theta)i}), \quad i \in I,$$

где  $I$  - множество узлов на радиусе плиты. Принято, что шаг узлов  $\Delta r = \text{const}$ ;  $\mu_{r(\theta)i}$  - коэффициенты армирования в радиальном и окружном направлениях;  $M_{r(\theta)i}$  - радиальный и окружной изгибающие моменты;  $C(\bar{\mu})$  - объем рабочей арматуры.

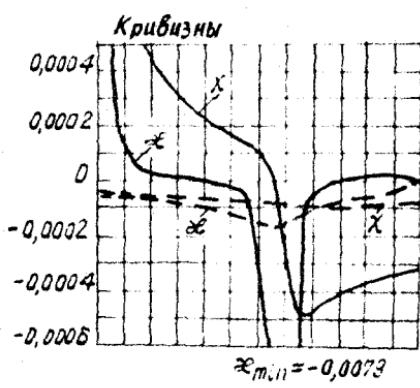
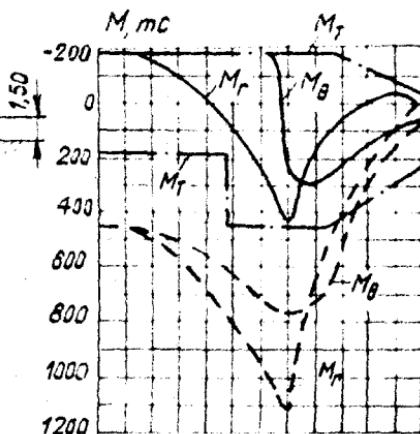
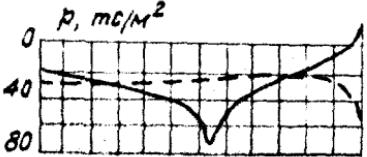
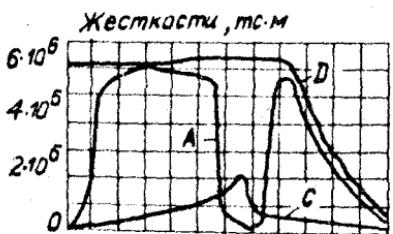
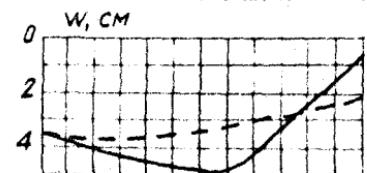
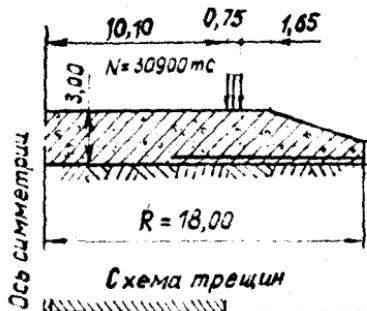
Решение задачи зависит от неуправляемых параметров  $M_{r(\theta)i}$ , определяющих напряженно-деформированное состояние. Положение цели  $\bar{\mu}$  изменяется, поэтому необходимо отслеживать экстремум многократным пересчетом  $\bar{M}$  из условия

$$\min \Pi(\bar{\mu}, \bar{M}),$$

где  $\Pi$  - полная потенциальная энергия плиты.

Предложен алгоритм решения задачи, позволяющий при малых затратах машинного времени на пересчеты направить вычислительный процесс по оптимальному пути. Достигается это благодаря тому, что итерационный процесс осуществляется из начальной точки в направлении, отличном от градиента целевой функции. Направление восхождения определяется в - мерном подпространстве существенно меньше размерности - мерного пространства всех переменных . Это позволяет ускорить достижение допустимой области и закончить ее с хорошим приближением к . Задача отыскания глобального экстремума не ставится.

Описанный алгоритм положен в основу программы для ЭЦВМ "Минск-22", составленной И.И.Шишовым. По этой программе рассчитана, в частности, фундаментная плита дымовой трубы Костромской ГРЭС, арматура кото-



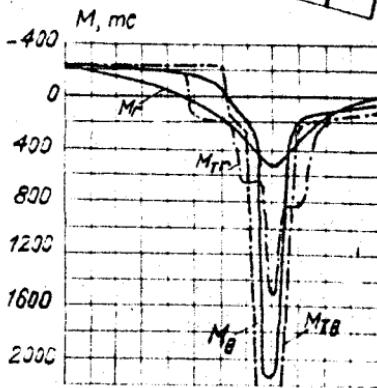
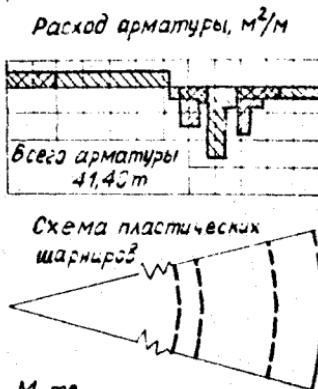
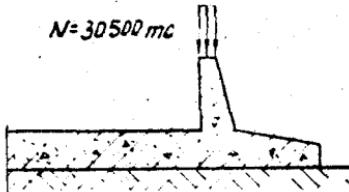
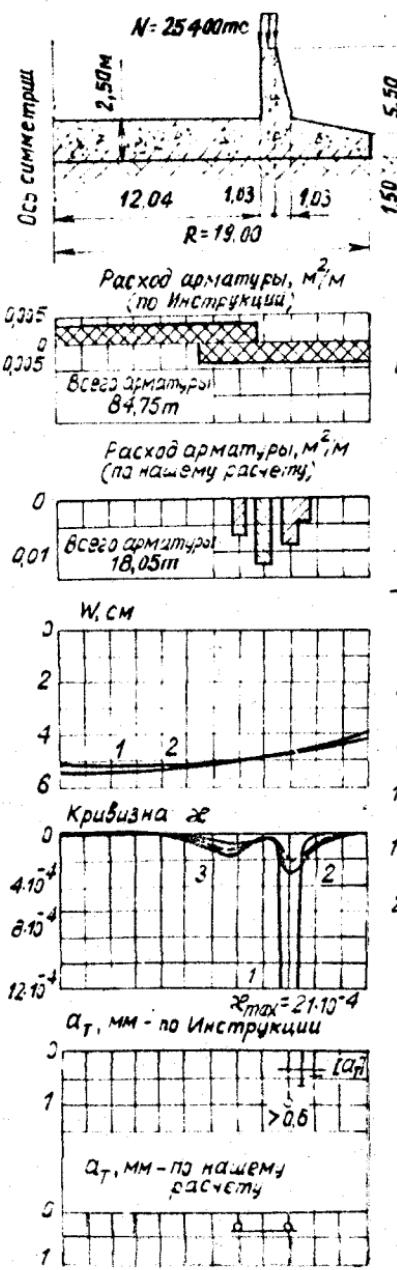
зона окружных трещин

зона радиальных трещин

— нелинейное решение

-- линейное решение

Рис. 13



- арматура радиальная
- арматура тангенциальная
- ширина раскрытия радиальных трещин
- ширина раскрытия окружных трещин

Рис. 14

рой была ранее подобрана ВНИПИ Теплопроект в соответствии с Инструкцией по расчету статически неопределеных железобетонных конструкций. На рис. 13 приведены результаты расчета этой плиты по Инструкции (1) и по предложенному методу (2). При расчетной нагрузке  $N = 30500$  тс по Инструкции получено, что необходима верхняя и нижняя растянутая арматура  $f_a = f'_a = 4,021 \text{ см}^2/\text{м}$  общим весом 84,75 т. Расчет плиты предложенным методом при том же армировании, но при нормативных характеристиках материалов и нормативной нагрузке  $N = 25400$  тс, показал, что ширина раскрытия трещин в этом случае недопустима ( $> 0,6 \text{ мм}$ ), а осадки плиты существенно неравномерны. Попытка уменьшить ширину раскрытия трещин до допустимой ( $\leq 0,3 \text{ мм}$ ), сохраняя расположение и диаметр арматуры, принятые по Инструкции, привела к необходимости увеличить количество арматуры в 2,5 раза. Результаты расчета плиты при увеличенном количестве арматуры приведены на рис. 13 (3).

Расчет по предлагаемому алгоритму показал, что арматуру не следует распределять равномерно: она должна концентрироваться под нагрузкой. Ее расход при этом при нормативной нагрузке составляет всего 18,06 т, трещины во всех сечениях становятся меньше предельных, выравнивая осадки и кривизны. Расчет плиты при расчетных характеристиках и расчетной нагрузке ( $N = 30500$  тс) показал, что для обеспечения прочности фундамента количество арматуры необходимо увеличить до 41,4 т. Тем не менее, по сравнению с расчетом по Инструкции расход растянутой рабочей арматуры оказалось возможным уменьшить более, чем в 2 раза (рис. 14).

Аналогичные результаты были получены при расчетах фундаментов дымовых труб Каширской ГРЭС и Ново-Стерлитамакской ТЭЦ.

### З а к л ю ч е н и е

1. Предложены методы расчета на ЭЦВМ в нелинейной и линейной постановках железобетонных фундаментов, расчетными схемами которых являются отдельные ленты,

круглые сплошные и кольцевые плиты, а также плиты прямоугольные и более сложной конфигурации.

Разработаны разностные схемы и эффективные процедуры метода упругих решений, учитывающие особенности деформирования железобетона.

2. Методы расчета фундаментов в нелинейной постановке базируются на физических уравнениях, полученных в последние годы лабораторией теории железобетона НИИЖБ'а. Эти методы позволяют рассчитывать фундаменты на всех стадиях их работы, то есть определять не только разрушающую нагрузку, но и усилия и деформации в стадии нормальной эксплуатации.

3. Изучение деформирования железобетонных фундаментов в виде отдельных лент, а также круглых и кольцевых плит, выполненное на ЭЦВМ с помощью разработанных программ, выявило следующие особенности.

В стадии нормальной эксплуатации, когда напряжение в арматуре меньше предела текучести, а среднее давление по подошве фундамента не превышает нормативного, распределение усилий значительно отличается от того, которое получается при расчете в линейной постановке. Максимальные изгибающие моменты иногда оказываются в 3-8 раз меньше, чем по линейному расчету, а эпюры моментов отличаются качественно. Перераспределение усилий в этой стадии определяется в основном появлением и развитием трещин - чем большую часть фундамента составляют зоны, охваченные трещинами, тем больше перераспределение. В этих зонах жесткости сильно уменьшаются, в других частях фундамента они остаются практически равными начальным. Перераспределение осадок и реактивных давлений невелико и, как правило, лежит в пределах 20-30%.

В стадии предельной по прочности фундамента схема расположения пластических шарниров в значительной степени определяется схемой трещин, появившихся в предшествующих стадиях. При нагрузках, близких к предельным, реактивные давления концентрируются под загруженной частью фундамента, уменьшаясь на его консолях. По этим причинам донущение о равномерности реактивных

давлений, часто принимаемое в практических расчетах (например, в Инструкции по расчету статически неопределеных железобетонных конструкций с учетом перераспределения усилий) может привести к существенным погрешностям, как увеличивающим запас прочности, так и уменьшающим его. Кроме того, в некоторых случаях имеют место схемы разрушения фундаментов, не предусмотренные Инструкцией.

4. Предложено решение задачи об оптимальном армировании фундаментов. Считается, что нагрузки, характеристики материалов, опалубочные размеры и арматура скжатой зоны заданы. Определяется минимальное количество арматуры растянутых зон, при котором удовлетворяются два ограничения — по ширине раскрытия трещин и по прочности. Для решения задачи использован градиентный метод приближения снизу — вначале считается, что фундамент не армирован. Применение этого метода при проектировании ряда фундаментов дымовых труб позволило значительно повысить надежность расчета и уменьшить расход рабочей арматуры.

5. Разработанные в диссертации методы, алгоритмы, программы для ЭЦВМ и таблицы нашли применение в исследованиях и практических расчетах ряда организаций: НИИ оснований и подземных сооружений им.Н.М.Герсеванова, Управлений Моспроект-1 и Моспроект-2, ВНИПИ Теплопроект, Института по проектированию оснований и фундаментов (Фундаментпроект), институтов Ленипромстройпроект, Ленпроект, Челябгражданпроект, Челябпромстройпроект, Оренбурггражданпроект и др.

Часть полученных в диссертации результатов нашла отражение в Рекомендациях по методам расчета фундаментных плит на скжимаемом основании конечной толщины (НИИ оснований и подземных сооружений, М., 1968). Другие материалы включены в Рекомендации по проектированию фундаментных плит каркасных гражданских зданий повышенной этажности (проект этих Рекомендаций выпущен НИИ оснований в 1974 году). Запланировано, что алгоритмы и программы для расчета круглых плит будут использованы в новом издании Инструкции по про-

ектированию железобетонных дымовых труб, которое в настоящее время готовится ВНИПИ Теплопроект совместно и НИИЖБ'ом и некоторыми другими организациями.

Результаты работы были доложены на следующих совещаниях и конференциях: Ш Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике (1968, Москва); УШ заседании семинара по механике грунтов и фундаментостроению (1971, Москва); Ш Всесоюзном совещании по механике грунтов и фундаментостроению (1971, Киев); заседании секции механики грунтов Ученого Совета НИИ оснований и подземных сооружений (1972, Москва); УШ Международном Конгрессе по механике грунтов и фундаментостроению: на 2-ом пленарном заседании и на заседании спецсекции по проблемам нелинейной механики грунтов (1973, Москва); заседании секции теории железобетона при НИИ бетона и железобетона (1973, Москва); заседании секции строительной механики научно-технической конференции МИСИ им. В.В. Куйбышева (1974, Москва); проблемном семинаре по механике грунтов и фундаментостроению, организованном Московским городским правлением НТО Стройиндустрии (1974, Москва); научно-технических конференциях Уральского (Свердловск) и Челябинского политехнических институтов и на некоторых других конференциях и семинарах.

Материалы диссертации опубликованы в следующих основных работах:

1. Расчет железобетонных фундаментных плит на действие нагрузок, приложенных вблизи угла. "Строит. механика и расчет сооруж.", 1963, № 2.

2. К расчету фундаментных балок. Сб. трудов ЧПИ, № 46, 1967 (соавт. Г.В. Трегулов).

3. Расчет прямоугольных плит, опирающихся на упругий слой конечной мощности. "Основания, фундаменты и механ. грунтов", 1968, № 4 (соавт. Э.А. Комаров, В.Н. Широков).

4. К расчету прямоугольных плит, опирающихся на упругий слой конечной мощности. Аннотации докладов на Ш Всесоюзном съезде по теоретич. и прикл. механике. Изд. АН СССР, 1968, (соавт. Э.А. Комаров, В.Н. Широков).

5. О работе железобетонных балок на упругом основании с учетом специфических свойств железобетона. "Исследования по бетону и железобетону". Сб. трудов ЧПИ, № 73, 1969 (соавт. В.П.Чирков, В.Ф.Тутынин).
6. Напряженное состояние и перемещения весомого нелинейно деформируемого грунтового основания под круглым жестким штампом. "Основания, фундаменты и механ. грунтов", 1970, № 1 (соавт. В.Н.Широков, М.В.Малышев, Ю.К.Зарецкий).
7. О точности решения Б.Н.Жемочкина для круглых плит на упругом полупространстве. "Основания, фундаменты и механ. грунтов", 1970, № 1 (соавт. Г.В.Трёголов).
8. Расчет прямоугольных плит на упругом основании. Алгоритм, программа РНС-2, инструкция. Изд. НИИ оснований и подземных сооружений Госстроя СССР, 1970 (соавт. Э.А.Комаров).
9. О расчете железобетонных фундаментных балок. "Основания, фундаменты и механика грунтов", 1971, № 2 (соавт. В.Ф.Тутынин).
10. *A circular rigid plate on a non-linearly deforming base. Proceeding of the 4th Conference on soil Mechanics, Budapest, 1971. (Together with Shirokov V.N., Cheremnik V.A., Malyshev M.V., Zaretsky Yu.K.)*
11. Некоторые результаты исследования фундаментных конструкций и основания с помощью ЭЦВМ. "Основания, фундаменты и механ. грунтов". Материалы Ш Всесоюзн. совещания. Киев, 1971 (соавт. Э.А.Комаров, Г.В.Трёголов, В.Ф.Тутынин, В.А.Черемных, В.Н.Широков).
12. О расчете круглых фундаментных плит с учетом особенностей деформирования железобетона. "Строит. механика и расчет сооруж.", 1972, № 1 (соавт. И.И.Шишов).
13. *Limit loads of prestressed plate and frames on elastic foundation. Proc. of the 8th Intern. Conf. on Soil Mech. and Found. Engn., 1973, 1.3. (Together with Sinitzin A.P., Simvulidi I.A.)*

14. К обоснованию расчета фундаментных конструкций с учетом физической нелинейности работы железобетона. "Исследования по строительной механике и механике грунтов". Сб. трудов ЧПИ, № 113, 1973.

15. Расчет фундаментных плит с учетом жесткости верхнего строения. "Исследования по строительной механике и механике грунтов". Сб. трудов ЧПИ, № 113, 1973 (соавт. Э.А.Комаров).

16. Предельные нагрузки предварительно напряженных плит, многопролетных рам и других железобетонных конструкций, расположенных на упругом основании. Труды к УШ Международн. Конгрессу по механике грунтов и фундаментостроению. М., 1973 (соавт. А.П.Синицын, И.А.Симбулиди).

17. О расчете железобетонных плит и балок, опирающихся на упругое основание. "Строит. механика и расчет сооруж.", 1974, № 1.

18. К расчету фундаментных плит сложной конфигурации и переменной жесткости . "Основания, фундаменты и механ. грунтов", 1974, № 5 (соавт. А.С.Сытник).