УДК 517.983

О СЕМЕЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРЫ ПЕРВОГО РОДА С РАЗРЫВНЫМИ ЯДРАМИ

Д.Н. Сидоров

Предложен метод построения параметрических семейств непрерывных решений одного класса интегральных уравнений Вольтерры первого рода, возникающих в теории развивающихся систем. Ядра рассматриваемых уравнений допускают разрывы первого рода на монотонно возрастающих кривых. В явном виде построено характеристическое алгебраическое уравнение. Отдельно изучается регулярный случай, когда характеристическое уравнение не имеет натуральных корней и решение интегрального уравнения единственное. В нерегулярном случае характеристическое уравнение имеет натуральные корни, а решение рассматриваемого интегрального уравнения содержит произвольные постоянные. При этом решение может быть неограниченными, если характеристическое уравнение имеет нулевой корень. Показано, что число произвольных постоянных, входящих в решение, зависит от кратности натуральных корней характеристического уравнения. Доказаны теоремы существования параметрических семейств решений и строится их асимптотика с помощью логарифмо-степенных полиномов. Асимптотика может уточняться численно или последовательными приближениями.

Ключевые слова: интегральное уравнение Вольтерры первого рода, асимптотика, разрывное ядро, последовательные приближения, логарифмо-степенные полиномы.

Введение

Рассматривается интегральное уравнение Вольтерры первого рода:

$$\int_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t), \ \ 0 \leq t \leq T, \tag{1}$$

где ядро определено формулой

$$K(t,s) = \begin{cases} K_1(t,s), & 0 \leq s < \alpha_1(t), \\ K_2(t,s), & \alpha_1(t) \leq s < \alpha_2(t), \\ \ \ \dots & \ \ \dots\dots\dots \\ K_n(t,s), & \alpha_{n-1}(t) < s < t, \end{cases} \tag{2}$$

$$0 < \alpha_1(t) < \alpha_2(t) < \dots < \alpha_{n-1}(t) < t, \ |\alpha_i'(t)| < 1.$$

Функции $K_i(t,s), i = \overline{1,n}, f(t)$ — непрерывны и достаточно гладкие, $f(0) = 0$. Уравнения первого рода играют важную роль в теории обратных и некорректных задач, созданной в трудах А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева, В.К. Иванова и их учеников. Такие уравнения возникают и в других моделях фундаментальной и прикладной математики, в частности, в современных исследованиях по дифференциально-операторным уравнениям с вырождением (см. библиографию в монографиях [1, 2]).

Интегральные уравнения с разрывными ядрами представляют теоретический интерес и возникают во многих физических и биологических моделях. Например, некоторые интегральные модели прикладной математики (см., например, [3–6]) можно трактовать как уравнения Вольтерры с кусочно-непрерывными ядрами. Первые результаты в области интегральных уравнений с разрывными ядрами были получены G.C. Evans в начале XX века. А именно, в работе [7] доказана теорема существования единственного непрерывного решения интегрального уравнения Вольтерры второго рода с разрывным ядром и при определенных условиях методом мажорант обоснована сходимость метода последовательных приближений. Результаты в спектральной теории классов интегральных операторов с разрывным ядром получены в работах А.П. Хромова [8]. Асимптотические приближения решений интегральных уравнений Вольтерры I рода с аналитическим ядром $K(t,s)$ строил Н.А. Магницкий в работе [9]. В отличие от работы [9] дифференцирование уравнения (1) с ядром вида (2) приводит не к интегральным уравнениям Вольтерры 2-го (3-го рода), а к интегро-функциональным уравнениям. Поэтому рассмотрение этого класса уравнений типа Вольтерры требует специальных исследований. Решения уравнений (1) могут содержать произвольные постоянные и быть неограниченными при $t \to 0$. Например, если

$$K(t,s) = \begin{cases} 1,\ 0 \le s < t/2, \\ -1,\ t/2 \le s \le t, \end{cases} \tag{3}$$

$f(t) = t$, то уравнению (1) удовлетворяет функция $x(t) = c - \frac{\ln t}{\ln 2}$, где c – const.

В настоящей работе, используя результаты работ [9–12], представлен алгоритм построения при $0 \le t \le T$ непрерывных решений уравнения (1) вида

$$x(t) = \sum_{i=0}^{N} x_i(\ln t)t^i + t^N u(t). \tag{4}$$

Коэффициенты $x_i(\ln t)$ строятся в виде полинома по степеням $\ln t$ и могут зависить от определенного числа произвольных постоянных. Число N определяет требуемую гладкость функций $K_i(t,s)$, $f(t)$. Дан способ построения функции $u(t)$ в представлении искомого решения (4) последовательными приближениями, равномерно сходящимися на промежутке $[0,T]$. Отметим, что логарифмо-степенные асимптотики решений эффективно использовались в [11 – 12], [9] в другой ситуации при решении интегральных и дифференциальных уравнений в нерегулярных случаях.

1. Структура решения и теорема существования

Для простоты выкладок будем далее предполагать, что $\alpha_i(t) = \alpha_i t$, где $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n = 1$. Введем условие на функции K_n

A. $K_n(t,t) \neq 0$ при $t \in [0,T]$ и N выбрано настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\max_{0 \le t \le T} |K_n(t,t)|^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i^{1+N} |K_i(t,\alpha_i t)| + \alpha_{i-1}^{1+N} |K_i(t,\alpha_{i-1} t)| \right) \le 1 + q, \tag{5}$$

где $q < 1$, $\alpha_0 = 0, \alpha_n = 1$.

Лемма 1. *Пусть выполнено условие* **A**, *все функции* $K_i(t,s), i = \overline{1,n}$ *дифференцируемы по* t *и непрерывны по* s. *Тогда в пространстве* $\mathbb{C}_{[0,T]}$ *однородное уравнение*

$$\int_0^t K(t,s)s^N u(s)ds = 0 \tag{6}$$

имеет только тривиальное решение.

Доказательство. Дифференцирование уравнения (6) с учетом вида ядра (2), приводит к эквивалентному интегро-функциональному уравнению

$$Lu + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\alpha_{i-1}t}^{\alpha_i t} \frac{K_i'(t,s)}{K_n(t,t)} (\frac{s}{t})^N u(s)ds = 0. \tag{7}$$

Здесь оператор L в левой части имеет вид

$$Lu = \sum_{i=1}^{n} \Big(\alpha_i^{1+N} K_i(t, \alpha_i t) u(\alpha_i t) - \alpha_{i-1}^{1+N} K_i(t, \alpha_{i-1} t) u(\alpha_{i-1} t) \Big) (K_n(t,t))^{-1}.$$

Используя условие **A** в пространстве $\mathbb{C}_{[0,T]}$, получаем оценку

$$||Lu - u|| \leq q||u||.$$

Тогда на основании теоремы об обратном операторе (см. [16], с.134), используя неравенства $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n = 1$, существует ограниченный обратный оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_{[0,T]} \to \mathbb{C}_{[0,T]})$. При этом

$$||L^{-1}|| \leq \frac{1}{1-q} \tag{8}$$

и уравнение (6) приводится к виду

$$u(t) = -L^{-1} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\alpha_{i-1}t}^{\alpha t} \frac{K_i'(t,s)}{K_n(t,t)} (s/t)^N u(s)ds \equiv Au, \tag{9}$$

$0 \leq t \leq T$. Введем в пространстве $\mathbb{C}_{[0,T]}$ эквивалентную норму $||u|| = \max\limits_{0 \leq t \leq T} e^{-lt}|u(t)|$, $l > 0$. В этой норме неравенство (8) сохранится, и при достаточно большом l оператор A будет сжимающим, т.к. $||A|| \leq \frac{1}{1-q} m(l)$, где $m(l) \to 0$ при $l \to +\infty$. Следовательно, однородное уравнение (9) имеет только тривиальное решение. □

Следствие 1. *Пусть выполнены условия Леммы 1, $g(t) \in \mathbb{C}^{(1)}_{[0,T]}$, $|g'(t)| = \mathcal{O}(t^N)$ при $t \to 0$. Тогда неоднородное уравнение $\int\limits_0^t K(t,s) s^N u(s) ds = g(t)$ имеет единственное решение.*

Доказательство очевидно, т.к. дифференцируя это уравнение, можно перейти к эквивалентному уравнению

$$u(t) = Au + t^{-N} L^{-1} g'(t) \tag{10}$$

со сжимающим оператором A и непрерывной свободной функцией.

Теорема 1. *Пусть в пространстве $\mathbb{C}_{(0,T]}$ существует функция $x^N(t)$ такая, что при $t \to 0$ имеет место оценка:*

$$\Big(-\int\limits_0^t K(t,s) x^N(s) ds + f(t) \Big)' = \mathcal{O}(t^N).$$

Тогда уравнение (1) в классе $\mathbb{C}_{(0,T]}$ имеет решение

$$x(t) = x^N(t) + t^N u(t), \tag{11}$$

где функция $u(t) \in \mathbb{C}_{[0,T]}$ строится единственным образом методом последовательных приближений.

Доказательство. Доказательство вытекает из следствия 1. Действительно, используя замену (11) уравнение (1) преобразуется к уравнению

$$\int_0^t K(t,s)s^N u(s)ds = g(t), \tag{12}$$

где функция

$$g(t) = -\int_0^t K(t,s)s^N x^N(s)ds + f(t) \tag{13}$$

удовлетворяет условию следствия 1. Поэтому в представлении (11) функция $u(t)$ строится последовательными приближениями единственным образом из уравнения (10) при любом начальном приближении. □

Определение 1. *Уравнение (12) с правой частью (13) назовем регуляризацией уравнения (1), а функцию $x^N(t)$ – асимптотическим приближением решения (11) уравнения (1).*

Введение этого определения связано с тем, что функцию $u(t)$ можно строить, решая уравнение (12) численно, используя хорошо исследованные квадратурные схемы (см. библиографию в [3]). Способ построения асимптотических приближений $x^N(t)$ в решении (12) рассмотрим ниже в п.3.

2. Построение асимптотического приближения $x^N(t)$ решения

Пусть наряду с условием **A** выполнено условие

B. Функции $K_i(t,s), i=\overline{1,n}$, $f(t)$ дифференцируемые $N+1$ раз в окрестности нуля, где N выбирается, используя условие **A.**

Введем вспомогательное алгебраическое уравнение относительно j из $\mathbb{N}$

$$L(j) \triangleq \sum_{i=1}^{n} K_i(0,0)(\alpha_i^{1+j} - \alpha_{i-1}^{1+j}) = 0 \tag{14}$$

и назовем его *характеристическим уравнением* интегрального уравнения (1).

Так как $f(0)=0$, то уравнение

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i K_i(t,\alpha_i t)x(\alpha_i t)) - \alpha_{i-1}K_i(t,\alpha_i t)x(\alpha_{i-1}t)))+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{\alpha_{i-1}t}^{\alpha_i t} K_i'(t,s)x(s)ds = f'(t)$$

эквивалентно уравнению (1).

Асимптотическое приближение его решения будем искать в виде полинома $x^N(t) = \sum\limits_{j=0}^{N} x_j(\ln t)t^j$.

Методом неопределенных коэффициентов с учетом неравенств $0=\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_n=1$ составим рекуррентную последовательность разностных уравнений относительно коэффициентов $x_j(z)(z=\ln t)$:

$$K_n(0,0)x_j(z) + \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i^{1+j}(K_i(0,0)-$$

$$-K_{i-1}(0,0))x_j(z+a_i) = M_j(x_0,\ldots,x_{j-1}), \tag{15}$$

$j=\overline{0,N}$, $a_i = \ln\alpha_i$, $i=\overline{1,n-1}$.

Следуя ([17], с. 330), решение соответствующих однородных разностных уравнений будем искать в виде $x=\lambda^z$. Подставляя функцию λ^z в однородные разностные уравнения, получим $N+1$ характеристических уравнений для разностных уравнений (16):

$$K_n(0,0) + \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^{1+j}(K_i(0,0)-K_{i+1}(0,0))\lambda^{a_i} = 0,\ j=\overline{0,N}. \tag{16}$$

Справедливо

Свойство 1. j-ое уравнение (16) имеет корень $\lambda=1$ тогда и только тогда, когда j удовлетворяет характеристическому уравнению (14) интегрального уравнения (1). Более того, кратность корня j уравнения (16) равна r_j тогда и только тогда, когда

$$L(j) = \sum_{i=1}^{n} K_i(0,0)(\alpha_i^{1+j} - \alpha_{i-1}^{1+j}) = 0, \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{1+j}(K_i(0,0)-K_{i+1}(0,0))a_i^l = 0, l=\overline{1,r_j-1}, \tag{18}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{1+j}(K_i(0,0)-K_{i+1}(0,0))a_i^{r_j} \neq 0,$$

где $\alpha_0=0, \alpha_n=1, a_0=0, a_n=0, a_i=\ln\alpha_i, i=\overline{1,n-1}$, При этом кратность $r_j\le n-1$.

Доказательство следует из тождества

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{1+j}K_{i+1}(0,0) = \sum_{i=2}^{n} \alpha_{i-1}^{1+j}K_i(0,0) \tag{19}$$

и структуры уравнений (14), (16).

Если предположить, что при некотором j кратность $r_j\ge n$, то $K_1(0,0)=K_2(0,0)=\ldots$ $\cdots = K_{n-1}(0,0)=K_n(0,0)$ в силу (18), т.к. $\det||a_i^l||_{i,l=\overline{1,n}}\neq 0$. Но тогда в силу (17) $K_n(0,0)=0$, что противоречит условию **A.**

При выполнении условий **A, B** возможны два случая.

2.1. Регулярный случай

Пусть $L(j)\neq 0, j\in\mathbb{N}$. Тогда $\lambda=1$ не удовлетворяет ни одному из характеристических уравнений в последовательности (16). Все коэффициенты x_i асимптотики $x^N=\sum\limits_{i=0}^{N} x_i t^i$ определятся однозначно методом неопределенных коэффициентов и не зависят от $\ln t$.

Из изложенного вытекает следующая теорема

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* **A, B** *и* $L(j)\neq 0, j\in\mathbb{N}$. *Тогда уравнение (1) имеет в* $\mathbb{C}_{[0,T]}$ *решение* $x(t)=\sum\limits_{i=0}^{N} x_i t^i + t^N u(t)$, *где* x_i *определяются однозначно методом неопределенных коэффициентов, а функция* $u(t)$ *строится затем однозначно последовательными приближениями, или численно из уравнения (12).*

2.2. Нерегулярный случай

Пусть $L(j) = 0$ только при $j \in \{j_1, \dots, j_k\} \subset \{0, 1, \dots, N\}$, и при этом кратность корня $\lambda = 1$ соответствующего характеристического уравнения в последовательности (16) равна r_j.

Пусть в j-ом разностном уравнении (15) правая часть $M_j(z)$ оказалась полиномом от z порядка $n_j \geq 0$.

Тогда в нерегулярном случае, т.е. при $r_j \geq 1$, на основании ([17], с. 338) частное решение j-го уравнения (15) надо искать в виде полинома $\hat{x}(z) = \sum\limits_{i=rj}^{n_j+r_j} c_i z^i$.

Коэффициенты c_i этого полинома вычисляются методом неопределенных коэффициентов последовательно, начиная со старшего $c_{n_j+r_j}$. Коэффициент $x_j(z)$ искомого асимптотического приближения x^N в этом случае имеет вид

$$x_j(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{r_{j-1}} + \hat{x}(z).$$

В нерегулярном случае, когда $r_j \geq 1$, постоянные $c_0, \dots, c_{r_j-1}$ останутся произвольными, т.к. тогда функции z^i, $i = 0, 1, \dots, r_j-1$ удовлетворят j-му однородному разностному уравнению, отвечающему (15).

На практике, используя свойство 1, коэффициент $x_j(z)$ в нерегулярном случае можно строить непосредственно в виде полинома $\sum\limits_{i=0}^{n_j+r_j} c_i z^i$, определяя последовательно $c_{n_j+r_j}, \dots, c_0$ методом неопределенных коэффициентов. При этом числа $c_{r_j-1}, \dots, c_0$ останутся произвольными. Таким образом, в нерегулярном случае, когда $L(j) = 0$ при натуральном j, при определении коэффициента $x_j(z)$ появляются r_j новых произвольных постоянных. Порядок полинома $x_j(z)$ на величину кратности r_j корня $\lambda = 1$ характеристического уравнения (16) станет больше порядка n_j правой части уравнения (15), то есть порядка полинома $M_j(z)$.

Из выше изложенного вытекает основная теорема:

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* **A, B**. *Пусть характеристическое уравнение* $L(j) = 0$ *интегрального уравнения (1) имеет ровно* k *натуральных корней* $\{j_1, \dots, j_k\}$. *Пусть при этом корень* $\lambda = 1$ j*-го характеристического уравнения (16) имеет кратность* r_j. *Тогда уравнение (1) в* $\mathbb{C}_{(0,T]}$ *имеет решение*

$$x = \sum_{i=0}^{N} x_i(\ln t) t^i + t^N u(t), \tag{20}$$

которое зависит от $p = r_1 + \dots + r_k$ *произвольных постоянных. Более того, коэффициенты* x_i *асимптотического приближения* $x^N(t)$ *являются полиномами от* $\ln t$ *возрастающих порядков, не превосходящих* p. *Функция* $u(t)$ *по вычисленному асимптотическому приближению с фиксированными постоянными строится последовательными приближениями, равномерно сходящимися при* $t \in [0, T]$, *либо численно из уравнения (12).*

Замечание 1. Если $L(0) = 0$, то в решении (20) $x_0 = const + a \ln t$, a – определенная постоянная. Поэтому в этом случае $x(t) \in \mathbb{C}_{(0,T]}$, $\lim\limits_{t \to +0} x(t) = \infty$.

Замечание 2. Изложенные результаты допускают обобщение в случае, когда в уравнении (1) при $\alpha_{i-1}(t) \leq s \leq \alpha_i(t)$ $K(t,s) = K_i(t,s)$ где $\alpha_i(0) = 0$, $0 \leq \alpha'_0(0) < \alpha'_1(0) < \dots < \alpha'_n(0) \leq 1$, $i = 1, \dots, n$.

3. Заключение

Изложенный подход, сведения из [16] и результаты работ [11, 12] позволяют исследовать интегральные уравнения Вольтерры первого рода, когда ядра являются разрывными оператор-функциями, действующими в банаховых пространствах. Если при этом соответствующие операторы $L(j)$ (см. (15)) при $j \in \mathbb{N}$ непрерывно обратимы, то имеет место аналог теоремы 2. Если некоторые натуральные j окажутся фредгольмовыми точками [16] этого оператора, то основную теорему можно обобщить. При этом порядок степеней $\ln t$ и число произвольных постоянных в коэффициентах асимптотического приближения решения аналогично работам [11, 12] будет определяться суммой длин соответствующих жордановых цепочек. Метод применим и в случае нелинейных операторно-интегральных уравнений Вольтерры [12,14] с разрывными ядрами. Отдельный интерес представляет применение данного подхода при решении интегральных уравнений с кусочно-гладкими ядрами в классе обобщенных функций с точечным носителем в случае $f(0) \neq 0$.

Работа выполнена в рамках ФЦПК ≪Кадры≫ П696 от 30 мая 2010 г., также частично поддержана РФФИ, проекты 12–01–00722 и 11-08-00109.

Литература

1. Lyapunov–Schmidt methods in nonlinear analysis and applications / N.A. Sidorov, B.V. Loginov, A.V. Sinitsyn, M.V. Falaleev. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 548 p.
2. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston: VSP, 2003. – 216 p.
3. Апарцин, А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы / А.С. Апарцин. – Новосибирск: Наука, 1999. – 193 с.
4. Маркова, Е.В. О моделях развивающихся систем типа Глушкова и их приложениях в электроэнергетике / Е.В. Маркова, И.В. Сидлер, В.В. Труфанов // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №7.– С. 20 – 28.
5. Denisov, A.M. On a special Volterra integral equation of the first kind / A.M. Denisov, A. Lorenzi // Boll. Un. Mat. Ital. B. – 1995.– V. 7, №9. – P. 443 – 457.
6. Яценко, Ю.П. Интегральные модели систем с управляемой памятью / Ю.П. Яценко. – Киев: Наукова думка, 1991. – 218 с.
7. Evans, G.C. Volterra's Integral Equation of the Second Kind with Discontinuous Kernel / G.C. Evans // Transactions of the American Mathematical Society. – 1910. – V. 11, №4. – P. 393 – 413.
8. Хромов, А.П. Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях / А.П. Хромов // Математический сборник. – 2006. – Т. 197, №11. – С. 115 – 142.
9. Магницкий, Н.А. Асимптотика решений интегрального уравнения Вольтерры первого рода / Н.А. Магницкий // ДАН СССР. – 1983. – Т. 269, №1. – С. 29 – 32.
10. Сидоров, Н.А. Существование и построение обобщенных решений интегральных уравнений Вольтерры первого рода / Н.А. Сидоров, Д.Н. Сидоров // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, №9. – С. 1243 – 1242.
11. Сидоров, Н.А. Нелинейные операторные уравнения с функционально возмущенным аргументом нейтрального типа / Н.А. Сидоров, А.В. Труфанов // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, №12. – С. 1804 – 1808.

12. Сидоров, Н.А. Существование и структура решений интегро-функциональных уравнений Вольтерры первого рода / Н.А. Сидоров, А.В. Труфанов, Д.Н. Сидоров // Изв. ИГУ, сер. математика. – 2007. – Т. 1. – С. 267 – 274.
13. Sidorov, N.A. Generalized solutions of Volterra integral equations of the first kind / N.A. Sidorov, M.V. Falaleev, D.N. Sidorov // Bull. Malays. Math. Soc. – 2006. – V. 29, №2. – P. 1 – 5.
14. Сидоров, Н.А. О решении операторно-интегральных уравнений Вольтерры в нерегулярном случае методом последовательных приближений / Н.А. Сидоров, Д.Н. Сидоров, А.В. Красник // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 40, №6. – С. 874 – 882.
15. Сидоров, Н.А. О малых решениях нелинейных дифференциальных уравнений в окрестности точек ветвления / Н.А. Сидоров, Д.Н. Сидоров // Изв. вузов. Матем. – 2011. – №5. –С. 53 – 61.
16. Треногин, В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. – Изд. 4-е. – М.: Физматлит, 2007. – 488 с.
17. Гельфонд, А.О. Исчисление конечных разностей / А.О. Гельфонд. – М.: Физматлит, 1959. – 400 с.
18. Сидоров, Д.Н. Метод монотонных мажорант в теории нелинейных уравнений Вольтерры / Д.Н. Сидоров, Н.А. Сидоров // Изв. ИГУ, сер. математика. – 2011. – Т. 4, №1. – С. 97 – 108.

Денис Николаевич Сидоров, кандидат физико-математических наук, с.н.с. ИСЭМ СО РАН, доцент ИМЭИ ИГУ (Иркутск, Российская Федерация), sidorovdn@mail.ru.

MSC 93A30, 45D05, 45M05

Solution to the Volterra Integral Equations of the First Kind with Discontinuous Kernels

D.N. Sidorov, Energy Systems Institute SB RAS, Irkutsk State University (Irkutsk, Russian Federation)

The method of parametric families of continuous solutions construction for the Volterra integral equations of the first kind arising in the theory of developing systems is proposed. The kernels of these equations admit a first-order discontinuities on the monotone increasing curves. The explicit characteristic algebraic equation is constructed. In the regular case characteristic equation has no positive roots and solution of the integral equation is unique. In irregular case the characteristic equation has natural roots and the solution contains arbitrary constants. The solution can be unbounded if characteristic equation has zero root. It is shown that the number of arbitrary constants in the solution depends on the multiplicity of positive roots of the characteristic equation. We prove existence theorem for parametric families of solutions and built their asymptotics with logarithmic power polynomials. Asymptotics can be specified numerically or using the successive approximations.

Keywords: Volterra integral equation of the first kind, asymptotics, discontinuous kernel, logarithmic power polynomials, succesive approximations.

References

1. Sidorov D.N., Loginov B.V., Sinitsyn A.V., Falaleev M.V. *Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications.* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2002. 548 p.
2. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators.* Utrecht; Boston, VSP, 2003. 216 p.
3. Aparcin A.S. *Neklassicheskie uravnenija Vol'terra I roda: teorija i chislennye metody* [Nonclassic Volterra Integral Equations of the First Kind: Theory and Numerical Methods]. Novosibirsk, Nauka, 1999. 193 p.
4. Markova E.V., Sidler I.V., Trufanov V.V. O modeljah razvivajushihsja sistem tipa Glushkova i ih prilozhenijah v elektroenergetike [On Modeling of Evolving Glushkov Systems and Applications in Power Industry]. *Avtomatika i telemehanika*, 2011, no. 7, pp. 20 – 28.
5. Denisov A.M., Lorenzi A. On a Special Volterra Integral Equation of the First Kind. *Boll. Un. Mat. Ital. B.*, 1995, vol. 7, no. 9, pp. 443 – 457.
6. Jacenko, Ju.P. *Integral'nye modeli sistem s upravljaemoj pamjat'ju* [Integral Models of the Systems with Memory Under Control]. Kiev, Naukova dumka, 1991. 218 p.
7. Evans G.C. Volterra's Integral Equation of the Second Kind with Discontinuous Kernel. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1910, vol. 11, no. 4, pp. 393 – 413.
8. Kromov A.P. Integral Operators with Kernels that are Discontinuous on Broken Lines. *Sbornik: Mathematics*, 2006, vol. 197, no. 11, pp. 1669 – 1696.
9. Magnickij N.A. Asimptotika reshenij integralnogo uravnenija Vol'terry pervogo roda [Asymptotic Solution of the Volterra Integral Equation of the First Kind]. *DAN SSSR*, 1983, vol. 269, no. 1, pp. 29 – 32.
10. Sidorov N.A., Sidorov D.N. Existence and Construction of Generalized Solutions of Nonlinear Volterra Integral Equations of the First Kind. *Differential Equations*, 2006, vol. 42, no. 9, pp. 1312 – 1316.
11. Sidorov N.A., Trufanov A.V. Nonlinear Operator Equations with a Functional Perturbation of the Argument of Neutral Type. *Differential Equations*, 2009, vol. 45, no. 12, pp. 1840 – 1844.
12. Sidorov N.A., Trufanov A.V., Sidorov D.N. Suchhestvovanie i struktura reshenij integro-funkcional'nyh uravnenij Vol'terry pervogo roda [Existence and Structure of Solution of Integral-functional Volterra Equation of the First Kind]. *Izv. IGU, ser. Matematika*, 2007, vol. 1, pp. 267 – 274.
13. Sidorov, N.A., Falaleev M.V., Sidorov D.N. Generalized Solutions of Volterra Integral Equations of the First Kind. *Bull. Malays. Math. Soc.*, 2006, vol. 29, no.2, pp. 1 – 5.
14. Sidorov N.A., Sidorov D.N., Krasnik A.V. Solution of Volterra Operator-integral Equations in the Nonregular Case by the Successive Approximation Method. *Differential Equations*, 2010, vol. 46, no. 6, pp. 882 – 891.
15. Sidorov N.A., Sidorov D.N. O malykh resheniyakh nelineynykh differentsial'nykh uravneniy v okrestnosti tochek vetvleniya [On Small Solutions of Nonlinear Differential Equations in the Branching Points Neighborhood]. *Russian Mathematics*, 2011, no. 5, pp. 53 – 61.
16. Trenogin V.A. *Funktsional'nyi analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Fizmatlit, 2007. 488 p.
17. Gel'fond, A.O. *Ischislenie konechnykh raznostey* [Finite Differences Calculus]. Moscow, Fizmatlit, 1959. 400 p.
18. Sidorov D.N., Sidorov N.A. Metod monotonnykh mazhorant v teorii nelineynykh uravneniy Vol'terry [Monotone Majorants Method in the Theory of Nonlinear Volterra Equations]. *Izv. IGU, ser. Matematika*, 2011, vol. 4, no. 1, pp. 97 – 108.

Поступила в редакцию 19 ноября 2011 г.