УДК 519.642.8

НАХОЖДЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ПЕРВЫХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВОЗМУЩЕННЫХ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПРОСТЫМ СПЕКТРОМ

С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин

В работе получены аналитические формулы для нахождения перых «взвешенных» поправок теории возмущений возмущенных самосопряженных операторов в случае, когда собственные значения невозмущенных операторов простые. Получены оценки остатков сумм функциональных рядов Рэлея–Шредингера. Разработан метод нахождения значений собственных функций возмущенных дискретных операторов с простым спектром.

Ключевые слова: «взвешенные» поправки теории возмущений, дискретные операторы, собственные значения, собственные функции.

Введение

Вопросы нахождения собственных значений и собственных функций для возмущенных самосопряженных операторов в последнее время приобретают большое значение [1 – 3].

Обозначим через $H = L_q(D)$ сепарабельное гильбертово пространство, с нормой $||f||_q = \big(\int\limits_b^a |f(x)|^q \omega(x)dx\big)^{(1/q)} (q = \overline{(1,\infty)})$, с весом $\omega(x) > 0$. D – компактное многообразие.

Рассмотрим дискретный полуограниченный снизу оператор T с простым спектром и ограниченный оператор P, заданные в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные значения оператора T, занумерованные в порядке возрастания их величин, а $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ – его ортонормированные собственные функции, соответствующие этим собственным значениям и образующие базис в H. Обозначим количество всех неравных друг другу собственных значений λ_n оператора T, которые лежат внутри окружности T_{n_0} радиуса $\rho_{n_0} = \dfrac{|\lambda_{n_0+1} + \lambda_{n_0}|}{2}$ с центром в начале координат комплексной плоскости, через n_0. Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные значения оператора $T + P$, занумерованные в порядке возрастания их действительных частей, а $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ – соответствующие им собственные функции. Если для всех $n \geq n_0$ выполняются неравенства $g_n = \frac{2||P||}{|\lambda_{n+1}-\lambda_n|} < 1$, тогда первые n_0 собственные функции $\{u_n\}_{n=1}^{n_0}$ оператора $T + P$ являются решениями системы нелинейных уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{n_0} \mu_j^p u_j(x)\overline{u}_j(y) = \sum_{j=1}^{n_0} \lambda_j^p v_j(x)\overline{v}_j(y) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(n_0), \;\; p = \overline{1, n_0}. \tag{1}$$

Здесь $\alpha_k^{(p)}(n_0) = \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int\limits_{T_{n_0}} \lambda^p [K_T(z_0, z_k, \lambda) \circ P_{z_k}]^k \circ K_T(z_k, z_{k+1}, \lambda) d\lambda$ – k-тые поправки теории возмущений к «взвешенной» спектральной функции оператора $T+P$ целого порядка p; $K_T(x, y, \lambda)$ – ядро резольвенты $R_\lambda(T)$ оператора T, а операция «$\circ$» вводится по правилу

$$(K \circ P \circ Q)(x, y, \lambda) = \int\limits_D K(x, z, \lambda) P_z Q(z, y, \lambda) dz.$$

Известно, что в этом случае в контуре T_{n_0} количество собственных значений оператора T при возмущении P не изменяется [4].

Используя систему уравнений (1), разработан численный метод вычисления значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов в узловых точках дискретизации. Следуя научным результатам полученным в работах [5 – 8, 11] данный метод можно назвать методом регуляризованных следов (РС).

Из системы уравнений (1) для $n_0 = n$ и $n_0 = n - 1$ и некотором фиксированном натуральном p, получим

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j^p u_j(x)\overline{u}_j(y) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^p v_j(x)\overline{v}_j(y) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(n), \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \mu_j^p u_j(x)\overline{u}_j(y) = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j^p v_j(x)\overline{v}_j(y) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(n-1). \tag{3}$$

Вычитая из уравнения (2) уравнение (3), найдем:

$$u_n(x)\overline{u}_n(y) = \frac{1}{\mu_n^p}\Big(\lambda_n^p v_n(x)\overline{v}_n(y) + \sum_{k=1}^{\infty}[\alpha_k^{(p)}(n) - \alpha_k^{(p)}(n-1)]\Big). \tag{4}$$

Если известны значения сумм функциональных рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(n_0)$ «взвешенных» поправок теории возмущений целого порядка $p = \overline{1, n_0}$ дискретного оператора $T + P$, тогда система нелинейных уравнений (1) позволяет находить его первые n_0 собственные функции $\{u_n\}_{n=1}^{n_0}$.

1. Нахождение «взвешенных» поправок теории возмущений дискретных операторов

Пусть все предположения, которые сделаны во введении относительно собственных значений и собственных функций операторов T и $T + P$, выполнены. Тогда справедливы следующаие теоремы.

Теорема 1. *Если T – дискретный полуограниченный снизу оператор, а P – ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве $H = L_q(D)$, где D – компактное многообразие, и для всех $n \in N$ выполняются неравенства $g_n < 1$, то «взвешенные» поправки теории возмущений $\alpha_k^{(p)}(n_0)$ для любых натуральных k, p и n_0 можно найти по формулам:*

$$\alpha_k^{(p)}(n_0) = -\sum_{n=1}^{n_0} \sum_{j_1,\ldots,j_{k+1}=1}^{\infty} v_{j_1}(x)\overline{v}_{j_{k+1}}(y) r_k^{(p)}(n, j_1, ..., j_{k+1}) \prod_{m=1}^{k} V_{j_m j_{m+1}}, \tag{5}$$

где

$$r_k^{(p)}(n, j_1, ..., j_{k+1}) = \begin{cases} 0, \ \forall j_m \neq n, m = \overline{1, k+1}; \\ \frac{1}{k!} \lim\limits_{\lambda \to \lambda_n} \frac{d^k}{d\lambda^k}\lambda^p, \ l = k+1; \\ \frac{1}{(l-1)!} \lim\limits_{\lambda \to \lambda_n} \frac{d^{l-1}}{d\lambda^{l-1}}\Big(\frac{\lambda^p}{\prod_{m=1}^{k-l+1}(\lambda - \lambda_{j_m})}\Big), \ 0 < l \leq k; \end{cases}$$

$V_{i,j} = (Pv_i, v_j)$ *– скалярное произведение; l – число совпадений $j_m = n$, $m = \overline{1, k+1}$.*

Доказательство. В случае, если оператор T дискретен и полуограничен снизу, то его резольвента $R_\lambda(T)$ является интегральным оператором [10], ее ядро $K_T(x, y, \lambda)$ представимо в виде:

$$K_T(x, y, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{v_i(x)\overline{v}_i(y)}{\lambda_i - \lambda}. \quad (6)$$

Учитывая определение «взвешенной» поправки теории возмущений $\alpha_k^{(p)}(n_0)$ и спектральное представление ядра резольвенты (6), получим цепочку равенств

$$\alpha_k^{(p)}(n_0) = \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int\limits_{T_{n_0}} \lambda^p [K_T(z_0, z_k, \lambda) \circ P_{z_k}]^k \circ K_T(z_k, z_{k+1}, \lambda) d\lambda =$$

$$= \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int\limits_{T_{n_0}} \lambda^p K_T(z_0, z_1, \lambda) \circ P_{z_1} \circ K_T(z_1, z_2, \lambda) \circ P_{z_2} \circ ... \circ$$

$$\circ K_T(z_{k-1}, z_k, \lambda) \circ P_{z_k} \circ K_T(z_k, z_{k+1}, \lambda) d\lambda =$$

$$= \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int\limits_{T_{n_0}} \lambda^p \Big[\int\limits_D \int\limits_D ... \int\limits_D K_T(z_0, z_1, \lambda) P_{z_1} K_T(z_1, z_2, \lambda) P_{z_2} \times ... \times$$

$$\times K_T(z_{k-1}, z_k, \lambda) P_{z_k} K_T(z_k, z_{k+1}, \lambda) dz_1 dz_2 ... dz_k \Big] d\lambda =$$

$$= \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int\limits_{T_{n_0}} \lambda^p \Big[\int\limits_D ... \int\limits_D \sum_{j_1=1}^{\infty} \frac{v_{j_1}(z_0)\overline{v}_{j_1}(z_1)}{\lambda_{j_1} - \lambda} \sum_{j_2=1}^{\infty} \frac{P_{z_1} v_{j_2}(z_1)\overline{v}_{j_2}(z_2)}{\lambda_{j_2} - \lambda} \times ... \times$$

$$\times \sum_{j_k=1}^{\infty} \frac{P_{z_{k-1}} v_{j_k}(z_{k-1})\overline{v}_{j_k}(z_k)}{\lambda_{j_k} - \lambda} \sum_{j_{k+1}=1}^{\infty} \frac{P_{z_k} v_{j_{k+1}}(z_k)\overline{v}_{j_{k+1}}(z_{k+1})}{\lambda_{j_{k+1}} - \lambda} dz_1 ... dz_k \Big] d\lambda =$$

$$= \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int\limits_{T_{n_0}} \lambda^p \Big[\int\limits_D ... \int\limits_D \sum_{j_1} \frac{v_{j_1}(z_0)\overline{v}_{j_1}(z_1)}{\lambda_{j_1} - \lambda} \prod_{m=2}^{k+1} \sum_{j_m} \frac{P_{z_{m-1}} v_{j_m}(z_{m-1})\overline{v}_{j_m}(z_m)}{\lambda_{j_m} - \lambda} dz_1 ... dz_k \Big] d\lambda =$$

$$= \sum_{j_1, j_2, ..., j_{k+1}=1}^{\infty} v_{j_1}(z_0)\overline{v}_{j_{k+1}}(z_{k+1})(Pv_{j_1}, v_{j_2})(Pv_{j_2}, v_{j_3})...(Pv_{j_k}, v_{j_{k+1}}) \times$$

$$\times \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int\limits_{T_{n_0}} \frac{\lambda^p d\lambda}{(-1)^{k+1} \prod\limits_{m=1}^{k+1} (\lambda - \lambda_{j_m})} =$$

$$= (-1)^{2k+1} \sum_{j_1, ..., j_{k+1}=1}^{\infty} \Big(v_{j_1}(z_0)\overline{v}_{j_{k+1}}(z_{k+1}) r_k^{(p)}(n, j_1, ..., j_{k+1}) \prod_{m=1}^{k} V_{j_m j_{m+1}} \Big) =$$

$$= - \sum_{j_1, ..., j_{k+1}=1}^{\infty} \Big(v_{j_1}(z_0)\overline{v}_{j_{k+1}}(z_{k+1}) r_k^{(p)}(n, j_1, ..., j_{k+1}) \prod_{m=1}^{k} V_{j_m j_{m+1}} \Big),$$

где $r_k^{(p)}(n, j_1, ..., j_{k+1}) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{T_{n_0}} \frac{\lambda^p d\lambda}{\prod\limits_{m=1}^{k+1} (\lambda - \lambda_{j_m})}$.

Здесь $V_{ij} = (Pv_i, v_j) = \int\limits_D P_z v_i(z)\overline{v}_j(z)dz$. Функция $\frac{\lambda^p}{\prod\limits_{m=1}^{k+1}(\lambda-\lambda_{j_m})}$ в круге T_{n_0} имеет в точках λ_n $(n = \overline{1, n_0})$ полюсы кратности l, где l – количество совпадений $j_m = n$, $m = \overline{1, k+1}$. Поэтому на основании теоремы о вычетах имеем:

$$r_k^{(p)}(n, j_1, ..., j_{k+1}) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{T_{n_0}} \frac{\lambda^p d\lambda}{\prod\limits_{m=1}^{k+1}(\lambda - \lambda_{j_m})} = \operatorname*{res}_{\lambda_n} \frac{\lambda^p}{\prod\limits_{m=1}^{k+1}(\lambda - \lambda_{j_m})} =$$

$$= \begin{cases} 0, \ \forall j_m \neq n, m = \overline{1, k+1}; \\ \frac{1}{k!}\lim\limits_{\lambda\to\lambda_n} \frac{d^k}{d\lambda^k}\lambda^p, \ l = 1; \\ \frac{1}{(k-l+1)!}\lim\limits_{\lambda\to\lambda_n} \frac{d^{k-l+1}}{d\lambda^{k-l+1}}\left(\frac{\lambda^p}{\prod\limits_{m=1}^{l-1}(\lambda-\lambda_{j_m})}\right), \ l > 1. \end{cases}$$

□

Получим оценки остатков $\varepsilon_t^{(p)}(n_0)$ рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(p)}(n_0)$ «взвешенных» поправок теории возмущений оператора $T + P$.

Теорема 2. *Пусть T – дискретный полуограниченный снизу оператор, а P – ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Если для некоторого натурального числа n_0 выполняются неравенства $\frac{2||P||}{|\lambda_{n_0+1}-\lambda_{n_0}|} < 1$, то для t остатков $\varepsilon_t^{(p)}(n_0)$ рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(p)}(n_0)$ «взвешенных» поправок теории возмущений оператора $T + P$ справедливы оценки:*

$$|\varepsilon_t^{(p)}(n0)| \leq C_0^2\rho_{n_0}^{p+1}A^2(n_0)||P||\frac{g^t}{1-g}. \tag{7}$$

Здесь $g = \frac{2||P||}{|\lambda_{n_0+1}-\lambda_{n_0}|}$, $A(n_0) = \sum\limits_{i=1}^{n_0}\frac{1}{\rho_{n_0}-\lambda_i}$, $|v_i(x)| \leq C_0$ $\forall i = \overline{1, \infty}$, $x \in D$.

Доказательство. Запишем вспомогательную цепочку равенств, используя спектральное представление ядра резольвенты (6):

$$([K_T \circ P]^k \circ K_T)(x, y, \lambda) = \int\limits_D ... \int\limits_D K_T(x, z_1, \lambda)P_{z_1}K_T(z_1, z_2, \lambda)P_{z_2} \times ...\times$$

$$\times K_T(z_{k-1}, z_k, \lambda)P_{z_k}K_T(z_k, y, \lambda)dz_1...dz_k =$$

$$= \int\limits_D ... \int\limits_D \sum_{i=1}^{\infty}\frac{v_i(x)\overline{v}_i(z_1)}{\lambda_i - \lambda}P_{z_1}K_T(z_1, z_2, \lambda)P_{z_2}\times...\times K_T(z_{k-1}, z_k, \lambda)P_{z_k}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{v_j(z_k)\overline{v}_j(y)}{\lambda_j - \lambda}dz_1...dz_k = ...$$

$$= \sum_{i,j}\frac{v_i(x)\int\limits_D \overline{v}_i(z_1)P_{z_1}[R_\lambda(T)P]^{k-1}v_j(z_1)dz_1\overline{v}_j(y)}{(\lambda_i - \lambda)(\lambda_j - \lambda)} = \sum_{i,j}\frac{v_i(x)(P[R_\lambda(T)P]^{k-1}v_j, v_i)\overline{v}_j(y)}{(\lambda - \lambda_i)(\lambda - \lambda_j)}.$$

Оценим модуль $\alpha_k^{(p)}(n_0)$, используя последнее равенство:

$$|\alpha_k^{(p)}(n_0)| = \left|\frac{(-1)^k}{2\pi i}\int\limits_{T_{n_0}}\lambda^p\sum_{i,j}\frac{v_i(x)(P[R_\lambda(T)P]^{k-1}v_j, v_i)\overline{v}_j(y)}{(\lambda - \lambda_i)(\lambda - \lambda_j)}d\lambda\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{T_{n_0}} \lambda^p \sum_{i,j} \frac{|v_i(x)||(P[R_\lambda(T)P]^{k-1} v_j, v_i)||\overline{v}_j(y)|}{|\lambda - \lambda_i||\lambda - \lambda_j|} d\lambda \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi \Big(|\lambda_{n_0}| + \frac{|\lambda_{n_0+1} - \lambda_{n_0}|}{2}\Big)^{p+1} \sup_{\lambda_{n_0}} \sum_{i,j} \frac{C_0^2}{|\lambda - \lambda_i||\lambda - \lambda_j|} \times$$

$$\times ||P||^k \Big(\frac{2}{|\lambda_{n_0+1} - \lambda_{n_0}|}\Big)^{k-1} \leq C_0^2 \rho_{n_0}^{p+1} ||P||^k \Big(\frac{2}{|\lambda_{n_0+1} - \lambda_{n_0}|}\Big)^{k-1} \times$$

$$\times \Big(\sum_i \frac{1}{\lambda_{n_0} - \lambda_i}\Big)^2 \leq C_0^2 \rho_{n_0}^{p+1} ||P|| g^{k-1} \Big(\sum_i \frac{1}{\lambda_{n_0} - \lambda_i + \frac{\lambda_{n_0+1} - \lambda_{n_0}}{2}}\Big)^2 \leq$$

$$\leq C_0^2 \rho_{n_0}^{p+1} ||P|| g^{k-1} \Big(\sum_{i=1}^{n_0} \frac{1}{\rho_{n_0} - \lambda_i} + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{\rho_{n_0} - \lambda_i}\Big)^2 \leq C_0^2 \rho_{n_0}^{p+1} ||P|| g^{k-1} A^2(n_0),$$

где $g = \frac{2||P||}{|\lambda_{n_0+1} - \lambda_{n_0}|}$, $A(n_0) = \sum\limits_{i=1}^{n_0} \frac{1}{\rho_{n_0} - \lambda_i}$.

В итоге для $\varepsilon_t^{(p)}(n_0)$ справедливы оценки

$$|\varepsilon_t^{(p)}(n_0)| \leq C_0^2 A^2(n_0) \rho_{n_0}^{p+1} ||P|| \sum_{k=t+1}^{\infty} g^{k-1} = C_0^2 A^2(n_0) \rho_{n_0}^{p+1} ||P|| \frac{g^t}{1-g}. \qquad \square$$

Используя доказанные Теоремы 1, 2 и формулу (4), строится приближенный метод нахождения значений собственных функций в узлах дискретизации возмущенных самосопряженных операторов. Для проверки разработанного метода рассмотрим численный эксперимент нахождения значений собственных функций оператора Лапласа с областью определения на прямоугольнике.

2. Численный эксперимент

Для проверки полученных формул (5) рассмотрим спектральную задачу для оператора Лапласа. Пусть оператор $T = -\Delta$ задан на прямоугольнике $\Pi = [0, a] \times [0, b]$ с границей Γ. Здесь $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа. В качестве возмущения P возьмем оператор умножения на дважды непрерывно дифференцируемую функцию $p(x, y)$, определенную на прямоугольнике Π.

Рассмотрим спектральную задачу

$$(T + P)\varphi = \beta\varphi, \ \varphi \in D_T. \tag{8}$$

$$D_T = \Big\{\varphi \mid \varphi \in C^2(\Pi) \bigcap C[\Pi], \Delta\varphi \in L_2[\Pi] : \varphi\Big|_\Gamma = 0\Big\}.$$

Известно, что собственные числа λ_{nk} и собственные функции v_{nk} оператора T имеют вид:

$$\lambda_{nk} = \pi^2 \Big(\frac{n^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\Big), \ v_{nk}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{k\pi y}{b}, \quad n, k = \overline{1, \infty}.$$

Система собственных функций $\{v_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}$ образует базис пространства $L_2[\Pi]$. В случае, когда $\dfrac{a^2}{b^2}$ – иррациональное число оператор, T имеет однократные собственные числа.

Пронумеруем собственные числа $\{\lambda_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}$ и собственные функции $\{v_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}$ оператора T одним индексом в порядке возрастания их действительных частей.

Собственные числа возмущенного оператора $T+P$ можно найти, следуя методу РС по формулам [11]: $\mu_n = \lambda_n + (Pv_{nn}, v_{nn}) + \tilde{\delta}_1(n), n = \overline{1, n_0}$, где для $\tilde{\delta}_1(n)$ справедливы оценки $|\tilde{\delta}_1(n)| \leq (2n-1)\rho_n \frac{g^2}{1-g}$, $g = \max\limits_{\lambda_n} g_n$.

Таблица

Значения $\widehat{u}_n$ и $\widetilde{u}_n$ для возмущенного оператора Лапласа, вычисленных при $a = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$, $b = 1$ и $p(x,y) = x^4 y^2$

n	y	x	$\widehat{u}_n$	$\widetilde{u}_n$	$\lvert\widehat{u}_n - \widetilde{u}_n\rvert$	$\left\lvert\frac{\widehat{u}_n - \widetilde{u}_n}{\widetilde{u}_n}\right\rvert \times 100\%$
1	0,2	0,2	1,055176	1,054458	0,000718	0,06808
	0,4	0,2	1,707129	1,706150	0,000979	0,05739
	0,6	0,2	1,706897	1,70615	0,000747	0,04380
	0,8	0,2	1,054794	1,054458	0,000336	0,03187
	0,2	0,4	1,363366	1,362589	0,000776	0,05699
	0,4	0,4	2,2056	2,204716	0,000883	0,04009
	0,6	0,4	2,205081	2,204716	0,000365	0,01655
	0,8	0,4	1,362481	1,362589	0,000107	0,00790
	0,2	0,6	0,706656	0,706302	0,000353	0,05010
	0,4	0,6	1,14306	1,142822	0,000238	0,02083
	0,6	0,6	1,142594	1,142822	0,000227	0,01993
	0,8	0,6	0,705863	0,706303	0,000439	0,06220
	0,2	0,8	−0,450115	−0,449893	0,000222	0,04942
	0,4	0,8	−0,728074	−0,727942	0,000132	0,01816
	0,6	0,8	−0,727758	−0,727942	0,000184	0,02529
	0,8	0,8	−0,449577	−0,449893	0,000315	0,07023
2	0,2	0,2	1,706643	1,706484	0,000159	0,00933
	0,4	0,2	1,054195	1,054766	0,000571	0,05417
	0,6	0,2	−1,055815	−1,054437	0,001378	0,13075
	0,8	0,2	−1,70742	−1,70628	0,00114	0,06681
	0,2	0,4	2,205432	2,205147	0,000284	0,01291
	0,4	0,4	1,362487	1,362987	0,0005	0,03670
	0,6	0,4	−1,363518	−1,362561	0,000956	0,07018
	0,8	0,4	−2,205196	−2,204884	0,000312	0,01415
	0,2	0,6	1,143141	1,143045	0,000096	0,00841
	0,4	0,6	0,706387	0,706509	0,000122	0,01728
	0,6	0,6	−0,706174	−0,7062885	0,000113	0,01611
	0,8	0,6	−1,142299	−1,142909	0,000609	0,05337
	0,2	0,8	−0,728138	−0,728084	0,000053	0,00736
	0,4	0,8	−0,449958	−0,450024	0,000065	0,01459
	0,6	0,8	0,449753	0,449883	0,000131	0,02903
	0,8	0,8	0,727537	0,727997	0,000459	0,06318

В таблице приведены результаты вычислений значений первых собственных функций в узлах дискретизации спектральной задачи (8) двумя методами. В случае метода РС, значения собственных функций обозначены $\widetilde{u}_n(x,y)$. В случае метода А.М. Данилевского – $\widehat{u}_n(x,y)$. Аргументы x и y изменяются от 0 до 1 с шагом 0,2. Причем суммы рядов Рэлея–Шредингера $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0)$ в методе РС приближались их третьими частичными суммами, используя формулы (2).

Проведенные расчеты показывают, что результаты вычислений собственных функций возмущенного оператора Лапласа методом РС и методом А.М. Данилевского хорошо согласуются.

Литература

1. Свиридюк, Г.А. О прямой и обратной задачах для уравнений Хоффа на графе / Г.А. Свиридюк, А.А. Баязитова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: «Физ.-мат. науки». – 2009. – №1(18). – С. 6 – 17.
2. Сиридюк, Г.А. Устойчивость уравнений Хоффа на графе / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина, П.О. Пивоварова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: «Физ.-мат. науки». – №1(15). – С. 6 – 15.
3. Сиридюк, Г.А. Быстро-медленная динамика вязкоупругих сред / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева //ДАН СССР. – 1989. – Т. 308, №4. – С. 791 – 794.
4. Садовничий, В.А. Теория операторов: учеб. для вузов с углубленным изучением математики / В.А. Садовничий. – 5-е изд. стереотип. – М.: Дрофа, 2004. – 384 с.
5. Садовничий, В.А. Замечание об одном новом методе вычисления собственных значений и собственных функций дискретных операторов / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский // Тр. семинара И.Г. Петровского. – М.: МГУ, 1994. – Вып. 17. – С. 244 – 248.
6. Дубровский, В.В. Оценка разности спектральных функций операторов типа Лежандра / В.В. Дубровский, А.И. Седов // Фундаментальная и прикладная математика. – 2000. – Т. 6, №4. – С. 1075 – 1082.
7. Дубровский, В.В. Оценка разности спектральных функций операторов типа Гегенбауэра по норме L_q / В.В. Дубровский, А.И. Седов // Известия высших учебных заведений. Сер. Математика. – 1999. – №8 (447). – С. 20 – 25.
8. Дубровский, В.В. Оценка разности спектральных функций самосопряженных операторов / В.В. Дубровский, А.И. Седов // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2000. – Т. 5, №5. – С. 10 – 13.
9. Кадченко, С.И. Новый метод вычисления собственных чисел спектральной задачи Орра – Зоммерфельда / С.И. Кадченко // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2000. – Т. 5, № 6. – С. 4 – 10.
10. Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы. / М.А. Наймарк. - М.: Наука, 1969.
11. Кадченко, С.И. Численный метод нахождения собственных значений дискретных полуограниченных снизу операторов / С.И. Кадченко, Л.С. Рязанова //Вестн. ЮУрГУ, сер. «Математическое моделирование и программирование», – 2011. – №17 (234), вып. 8. – С. 46 – 51.

Сергей Иванович Кадченко, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Прикладная математика и вычислительная техника», Магнитогорский государственный университет (Магнитогорск, Российская Федерация), kadchenko@masu.ru.

Сергей Николаевич Какушкин, аспирант, кафедра «Прикладная математика и вычислительная техника», Магнитогорский государственный университет (Магнитогорск, Российская Федерация), kakushkin-sergei@mail.ru.

Meanings of the First Eigenfunctions of Perturbed Discrete Operator with Simple Spectrum Finding

S.I. Kadchenko, Magnitogorsk State University (Magnitogorsk, Russian Federation)***,***
S.N. Kakushkin, Magnitogorsk State University (Magnitogorsk, Russian Federation)

In article received analitical formulas for finding first ≪weighted≫ corrections of the perturbation theory perturbed selfadjoint operators, when eigenvalues of unperturbed operators is simple. Received estimate of remainder of Rayleigh-Shredinger's sum of functional series. The method of finding of meanings of eigenfunctions of perturbed discrete operator with a simple spectrum is developed.

Keywords: ≪weighted≫ corrections of the perturbation theory, discrete operators, eigenvalues, eigenfunctions.

References

1. Sviridyuk G.A., Bayazitova A.A. About Direct and Inverse Problems for the Equations of Hoff on the Graph [O pryamoy i obratnoy zadachah dlya uravneniy Hoffa na grafe]. *Vestn. Sam. gos. tehn. un-ta. Ser. fiz.-mat. nauki* [The Bulletin of the Samara State Engineering University, Series of Physical and Mathematical Sciences], 2009, no. 1(18), pp. 6 – 17.
2. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A., Pivovarova P.O. Stability of the Hoff's Equations on the Column [Ustoychivost' uravneniy Hoffa na grafe]. *Vestn. Sam. gos. tehn. un-ta. Ser. fiz.-mat. nauki* [The Bulletin of the Samara State Engineering University, Series of Physical and Mathematical Sciences], 2010, no. 1(15), pp. 6 – 15.
3. Sviridyuk, G.A., Sukacheva T.G. Fast-slow Dynamics of the Viscoelastic Media [Bystro-medlennaya dinamika vyazkouprugih sred]. *DAN SSSR* [The Report of Academy of Sciences of USSR], 1989, vol. 308, no. 4, pp. 791 – 794.
4. Sadovnichiy V.A. *Teoriya operatorov: ucheb. dlya vuzov s uglublennym izucheniem matematiki* [The Theory of Operator: the Textbook for High Schools with Profound Learning of Mathematics]. Moscow, Drofa, 2004. 384 p.
5. Sadovnichiy V.A., Dubrovskiy V.V. Remark on a New Method of Calculation of Eigenvalues and Eigenfunctions for Discrete Operators. *Journal of Mathematical Sciences*, 1995, vol. 75, no. 3, pp. 244 – 248.
6. Dubrovskiy V.V., Sedov A.I. An Estimate for the Difference of Spectral Functions of Legendre-type Operators [Otsenka raznosti spektral'nyh funkciy operatorov tipa Lezhandra]. *Fundamental'naya i prikladnaya matematika* [Fundamental and an Applied Mathematics], 2000, vol. 6, no. 4, pp. 1075 – 1082.
7. Dubrovskii V.V., Sedov A.I. An Estimate for the Difference of Spectral Functions of Gegenbauer-type Operators in the Norm of L_q [Otsenka raznosti spektral'nyh funkciy operatorov tipa Gegenbauera po norme L_q]. *Izv. Vyssh. uchebn. zaved. mat.*, 1999, no. 8, pp. 20 – 25.
8. Dubrovskiy V.V., Sedov A.I. An Estimate for the Difference of Spectral Functions of the Selfadjoint Operator [Otsenka raznosti spektral'nyh funkciy samosopryazhennyh operatorov]. *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy* [Electromagnetic Waves and Electronic Systems], 2000, vol. 5, no. 5, pp. 10 – 13.
9. Kadchenko S.I. New Method of Calculation of Eigenvalues of the Spectral Orr-Sommerfeld's Problem [Novyy metod vychisleniya sobstvennyh chisel spektral'noy zadachi orra – zommerfel'da]. *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy* [Electromagnetic Waves and Electronic Systems], 2000, vol. 5, no. 6, pp. 4 – 10.
10. Naymark M.A. *Lineynye differentsial'nye operatory* [The Linear Differential Operator]. Moscow, Nauka, 1969. 528 p.
11. Kadchenko S.I., Ryazanova L.S. The Numerical Method of Finding Eigenvalues of the Discrete Semi Bounded From Below Operator [Chislennyy metod nahozhdeniya sobstvennyh znacheniy diskretnyh poluogranichennyh snizu operatorov]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya ≪Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie≫*, 2011, no. 17 (234), issue 8, pp. 46 – 51.

Поступила в редакцию 24 ноября 2011 г.