УДК 517.9

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

М.А. Сагадеева

Рассмотрена одна задача для класса неклассических уравнений математической теории волн. Отличительной особенностью этой задачи является зависимость от времени функциональных коэффициентов эллиптического оператора в правой части уравнения. Методом ее исследования является редукция к задаче Коши для нестационарного уравнения соболевского типа. Уравнения соболевского типа с зависящим от времени оператором в данной постановке рассматриваются впервые.

Введено в рассмотрение понятие относительно спектрально ограниченной оператор-функции. Условия, гарантирующие выполнение этого свойства задачи, позволяют также выделить подпространство начальных значений, для которых существует единственное решение задачи Коши. Это подпространство мы назвали обобщенным фазовым пространством решений для нестационарного уравнения соболевского типа. Решение такой задачи для уравнений соболевского типа, а также и в исходной постановке, получено с помощью рекурсивной формулы.

Ключевые слова: нестационарные уравнения, уравнения соболевского типа.

Введение

Пусть множество $\mathfrak{J}$ — промежуток в $\mathbb{R}$, содержащий нуль, и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathfrak{J}$ рассмотрим задачу Коши-Дирихле

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathfrak{J} \tag{2}$$

для уравнения

$$(\lambda - \Delta)u_t(x,t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(m_{ij}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)u(x,t) + g(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \mathfrak{J}, \tag{3}$$

где вещественные функции $m_{ij}(x,t)$, удовлетворяющие условию $m_{ij}(x,t) = m_{ji}(x,t)$, а также параметр $\lambda \in \mathbb{R}_+$ характеризуют свойства среды, однако в [1] было отмечено, что отрицательные значения параметра λ не противоречат физическому смыслу. Подобный вид имеют многие уравнения теории фильтрации [2 – 4]. У этих авторов изначально, вообще говоря, нестационарная задача заменяется на стационарную, то есть $m_{ij}(x,t) \equiv m_{ij}(x)$. Целью же данной работы является найти решение задачи, приведенной выше, при условии зависимости коэффициентов от времени.

Для построения решения поставленной задачи исследуем сначала абстрактную задачу для нестационарного операторно-диференциального уравнения.

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L, M_t \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линейны и непрерывны) при каждом $t \in \mathfrak{J}$. Рассмотрим в банаховых пространствах линейные уравнения

$$L\dot{u}(t) = M_t u(t), \tag{4}$$

$$L\dot{u}(t) = M_t u(t) + g(t) \tag{5}$$

с функцией $g : \mathfrak{J} \to \mathfrak{F}$, неразрешенные относительно производной по времени. Такие уравнения часто называют уравнениями соболевского типа (см. [3, 5, 6]), которые в последнее время нашли применение в задачах измерения динамически искаженных сигналов [7, 8].

Если оператор L — непрерывно обратим, то уравнения (4), (5) сведутся к разрешенным относительно производной уравнениям вида

$$\dot{v}(t) = A_t v(t), \qquad \dot{v}(t) = A_t v(t) + h(t). \tag{6}$$

Такие уравнения с ограниченнным оператором A_t, $t \in \mathfrak{J}$, и задача Коши для них, подробно рассмотрены в монографии Ю.Л. Далецкого и М.Г. Крейна [9]. Среди работ, в которых исследовались уравнения такого вида с неограниченными операторными коэффициентами, отметим работы Т. Като [10], О.А. Ладыженской и М.И. Вишика [11], К. Иосиды [12], С.Г. Крейна [13], Д. Хенри [14].

Разрешимость одного класса уравнений соболевского типа (4), (5) с неограниченными операторными коэффициентами изучена в работе А. Фавини и А. Яги [15].

При рассмотрении вопросов разрешимости уравнений (4), (5) и задачи Коши

$$u(t_0) = u_0 \tag{7}$$

для них при $t_0 \in \mathfrak{J}$ в предположении нетривиальности ядра оператора L, как и в работах [5, 6] для стационарных уравнений соболевского типа, будет использовано условие ограниченности L-спектра оператора M_t и, как следствие, возможность построения некоторых проекторов на пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$. В результате исходное уравнение будет редуцировано к системе двух уравнений на взаимно дополнительных подпространствах. Одно из этих уравнений примет вид (6) с ограниченными операторами A_t, поэтому в целом результаты настоящей работы можно считать обобщением соответствующих результатов [9] на случай необратимого оператора L.

1. Относительно спектрально ограниченная оператор-функция

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, $\mathfrak{J}$ — промежуток в $\mathbb{R}$, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M_t \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ для всех $t \in \mathfrak{J}$.

Следуя терминологии, используемой в [5, 6], множества $\rho^L(M_t) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M_t)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ и $\sigma^L(M_t) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M_t)$ будем называть соответственно *L-резольвентным множеством* и *L-спектром* оператор-функции M_t.

Очевидно, что если $\ker L \cap \ker M_t \neq \{0\}$ при некотором $t \in \mathfrak{J}$, то $\rho^L(M_t) = \varnothing$.

Лемма 1. [5] *Пусть операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M_t \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ для $t \in \mathfrak{J}$. Тогда L-резольвентное множество $\rho^L(M_t)$ оператора M_t открыто, а L-спектр $\sigma^L(M_t)$ оператора M_t замкнут.*

При $t \in \mathfrak{J}$ оператор-функции комплексного переменного $(\mu L - M_t)^{-1}$, $R^L_\mu(M_t) = (\mu L - M_t)^{-1}L$, $L^L_\mu(M_t) = L(\mu L - M_t)^{-1}$ с областью определения $\rho^L(M_t)$ будем называть соответственно *L-резольвентой, правой* и *левой L-резольвентами* оператора M_t.

В дальнейшем будут использоваться тождества, справедливые при фиксированном $t \in \mathfrak{J}$ и любых $\mu, \lambda \in \rho^L(M)$:

$$\begin{gathered} (\lambda - \mu)(\lambda L - M_t)^{-1} L (\mu L - M_t)^{-1} = (\mu L - M_t)^{-1} - (\lambda L - M_t)^{-1}, \\ L(\mu L - M_t)^{-1} M_t = M_t (\mu L - M)^{-1} L. \end{gathered} \tag{8}$$

Лемма 2. *Пусть операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M_t \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ для $t \in \mathfrak{J}$. Тогда L-резольвента, правая и левая L-резольвенты оператора M_t аналитичны по μ в $\rho^L(M_t)$.*

Определение 1. Оператор-функция M_t называется *спектрально ограниченной относительно* оператора L (или просто (L,σ)-*ограниченной*), если

$$\exists a_t \in C(\mathfrak{J};\mathbb{R}_+) \quad \forall t \in \mathfrak{J} \quad \max\{|\mu|:\ \mu \in \sigma^L(M_t)\} \le a_t < +\infty.$$

Лемма 3. *Пусть оператор-функция* $M_t \in C(\mathfrak{J};\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F}))$ (L,σ)-*ограничена. Тогда при* $\mu \in \mathrm{E}_t = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \ge 2a_t\}$ *оператор-функция* $(\mu L - M_t)^{-1} \in C(\mathfrak{J};\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U}))$.

Доказательство. Возьмем $\delta > 0$, чтобы при $|\tau - t| < \delta$ выполнялось $a_\tau < 2a_t$. Тогда при таких $\tau \in \mathfrak{J}$ получим $\mathrm{E}_t \subset \rho^L(M_t) \cap \rho^L(M_\tau)$. В силу справедливости равенства $(\mu L - M_\tau)(\mu L - M_t)^{-1} = I + (M_t - M_\tau)(\mu L - M_t)^{-1}$ при $\|M_t - M_\tau\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})} < \|(\mu L - M_t)^{-1}\|^{-1}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})}$ получим

$$(\mu L - M_t)(\mu L - M_\tau)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left((M_\tau - M_t)(\mu L - M_t)^{-1}\right)^k,$$

$$(\mu L - M_\tau)^{-1} - (\mu L - M_t)^{-1} = (\mu L - M_t)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left((M_\tau - M_t)(\mu L - M_t)^{-1}\right)^k. \qquad (9)$$

Следовательно, $\|(\mu L - M_\tau)^{-1} - (\mu L - M_t)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})} \to 0$ при $\tau \to t$. Причем этот предел равномерен по $\mu \in \gamma \subset \mathrm{E}_t$, где γ – замкнутый контур. Действительно, возьмем $\|M_\tau - M_t\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})} < \frac{\varepsilon}{2C^2}$, где $C = \max\{\|(\mu L - M_t)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})},\ \mu \in \gamma\}$, тогда сразу для всех $\mu \in \gamma$

$$\|(\mu L - M_\tau)^{-1} - (\mu L - M_t)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})} \le \frac{\varepsilon}{2 - \varepsilon/C} < \varepsilon.$$

□

Теорема 1. *Пусть оператор-функция* $M_t \in C(\mathfrak{J};\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F}))$ *сильно дифференцируема по* $t \in \mathfrak{J}$ *и* (L,σ)-*ограничена. Тогда оператор-функция* $(\mu L - M_t)^{-1}$ *сильно дифференцируема по* $t \in \mathfrak{J}$ *при* $\mu \in \mathrm{E}_t = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \ge 2a_t\}$.

Доказательство. Возьмем $\mu \in \mathrm{E}_t$, $f \in \mathfrak{F}$, $\delta > 0$. Выберем τ как в предыдущем доказательстве. Пусть $u_t = (\mu L - M_t)^{-1} f$, тогда получим, используя (9),

$$\left\|\frac{(\mu L - M_\tau)^{-1} f - (\mu L - M_t)^{-1} f}{\tau - t} - (\mu L - M_t)^{-1} \frac{dM_t}{dt} (\mu L - M_t)^{-1} f\right\|_{\mathfrak{U}} =$$

$$= \left\|(\mu L - M_t)^{-1} \left(\frac{M_\tau - M_t}{\tau - t} \sum_{k=1}^{\infty} \left((\mu L - M_t)^{-1}(M_\tau - M_t)\right)^{k-1} - \frac{dM_t}{dt}\right)(\mu L - M_t)^{-1} f\right\|_{\mathfrak{U}} =$$

$$= \left\|(\mu L - M_t)^{-1} \left(\frac{M_\tau - M_t}{\tau - t} u_t - \frac{dM_t}{dt} u_t + \frac{M_\tau - M_t}{\tau - t} \sum_{k=1}^{\infty} \left((\mu L - M_t)^{-1}(M_\tau - M_t)\right)^k u_t\right)\right\|_{\mathfrak{U}} \le$$

$$\le \|(\mu L - M_t)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F},\mathfrak{U})} \left(\left\|\frac{M_\tau - M_t}{\tau - t} u_t - \frac{dM_t}{dt} u_t\right\|_{\mathfrak{F}} + \right.$$

$$\left. + \left\|\frac{M_\tau - M_t}{\tau - t}\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})} \sum_{k=1}^{\infty} \|(\mu L - M_t)^{-1}(M_\tau - M_t)\|^k_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \|(\mu L - M_t)^{-1} f\|_{\mathfrak{U}}\right).$$

Покажем, что это выражение при $\tau \to t$ стремится к нулю равномерно по $\mu \in \gamma \subset \mathrm{E}_t$, где γ – замкнутый контур. Действительно, так как контур компактен, последнее выражение достигает максимума при некотором $\mu_0 \in \gamma$. В силу леммы 3 и принципа равномерной ограниченности его можно оценить сверху равномерно по $\mu \in \gamma$ следующим выражением

$$\left\|(\mu_0 L - M_t)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F},\mathfrak{U})} \left(\left\| \left(\frac{M_\tau - M_t}{\tau - t} - \frac{dM_t}{dt} \right) (\mu_0 L - M_t)^{-1} f \right\|_{\mathfrak{F}} + \right.$$
$$\left. + C \sum_{k=1}^{\infty} \left\|(\mu_0 L - M_t)^{-1}(M_\tau - M_t)\right\|^k_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \|(\mu_0 L - M_t)^{-1} f\|_{\mathfrak{U}} \right),$$

которое стремится к нулю при $\tau \to t$. Следовательно,

$$\forall f \in \mathfrak{F} \quad \frac{d}{dt}\left((\mu L - M_t)^{-1} f\right) = (\mu L - M_t)^{-1} \frac{dM_t}{dt} (\mu L - M_t)^{-1} f. \tag{10}$$

□

Пусть оператор-функция M_t (L,σ)-ограничен, а контур γ_t=$\{\mu\in\mathbb{C}: |\mu|= 2a_t\}$. Рассмотрим интегралы

$$P_t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} R^L_\mu(M_t) d\mu, \qquad Q_t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} L^L_\mu(M_t) d\mu,$$

которые существуют в силу леммы 2. В [5] показано, что при фиксированном $t \in \mathfrak{J}$ операторы $P_t : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ и $Q_t : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ являются проекторами.

Лемма 4. *Пусть оператор-функция* $M_t \in C(\mathfrak{J}; \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F}))$ *сильно дифференцируема по* $t \in \mathfrak{J}$ *и* (L,σ)*-ограничена. Тогда оператор-функции* $P_t \in C(\mathfrak{J}; \mathcal{L}(\mathfrak{U}))$ *и* $Q_t \in C(\mathfrak{J}; \mathcal{L}(\mathfrak{F}))$ *сильно дифференцируемы по* $t \in \mathfrak{J}$.

Доказательство. Возьмем $\delta > 0$ так, чтобы при $|t - \tau| < \delta$ выполнялось $a_\tau < 2a_t$, получим

$$P_\tau u - P_t u = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\tau} R^L_\mu(M_\tau) u d\mu - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} R^L_\mu(M_t) u d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} \left(R^L_\mu(M_\tau)u - R^L_\mu(M_t)u\right) d\mu.$$

Из доказательства леммы 3 следует равномерная непрерывность P_t. Далее получим

$$\left\| \frac{P_\tau u - P_t u}{\tau - t} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} (\mu L - M_t)^{-1} \frac{dM_t}{dt} R^L_\mu(M_t) u d\mu \right\|_{\mathfrak{U}} \leq$$
$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_t} \left\| \frac{R^L_\mu(M_t)u - R^L_\mu(M_\tau)u}{\tau - t} - (\mu L - M_t)^{-1} \frac{dM_t}{dt} R^L_\mu(M_t) u \right\|_{\mathfrak{U}} |d\mu|,$$

откуда из (10) с учетом равномерной сходимости на γ_t разностного отношения к производной следует сильная дифференцируемость P_t и

$$\forall u \in \mathfrak{U} \qquad \frac{d}{dt} P_t u = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} (\mu L - M_t)^{-1} \frac{dM_t}{dt} R^L_\mu(M_t) u d\mu.$$

Сильная дифференцируемость Q_t показывается аналогично. □

Положим $\mathfrak{U}_t^0 = \ker P_t$, $\mathfrak{F}_t^0 = \ker Q_t$; $\mathfrak{U}_t^1 = \mathrm{im} P_t$, $\mathfrak{F}_t^1 = \mathrm{im} Q_t$ для всех $t \in \mathfrak{J}$. Обозначим через $L_{t,k}$, $M_{t,k}$ сужение операторов L, M_t на $\mathfrak{U}_t^k$, $k = 0, 1$.

Теорема 2. *Пусть оператор-функция* $M_t \in C(\mathfrak{J}; \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F}))$ (L, σ)*-ограничена. Тогда*

(i) *имеет место действие операторов* $L_{t,k} : \mathfrak{U}_t^k \to \mathfrak{F}_t^k$, $M_{t,k} : \mathfrak{U}_t^k \to \mathfrak{F}_t^k$ $\forall t \in \mathfrak{J}$, $k = 0, 1$;

(ii) *существуют операторы* $M_{t,0}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}_t^0; \mathfrak{U}_t^0)$, $t \in \mathfrak{J}$, *причем, если оператор-функция* $M_t : \mathfrak{J} \to \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ *сильно дифференцируема, то оператор-функция* $M_{t,0}^{-1}(I - Q_t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U}_t^0)$ *сильно дифференцируема по* $t \in \mathfrak{J}$, *а при условии сильной непрерывности оператор-функции* $\frac{d}{dt} M_t$ *оператор-функция* $\frac{d}{dt}(M_{t,0}^{-1}(I - Q_t))$ *также является сильно непрерывной по* $t \in \mathfrak{J}$;

(iii) *существуют операторы* $L_{t,1}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}_t^1; \mathfrak{U}_t^1)$, $t \in \mathfrak{J}$, *причем оператор-функция* $L_{t,1}^{-1} Q_t \in C(\mathfrak{J}; \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U}_t^1)$.

Доказательство. Первое утверждение из (i) имеет место в силу соотношения $LP_t = Q_t L$, которое вытекает из очевидного тождества $LR_\mu^L(M_t) = L_\mu^L(M_t)L$. Второе утверждение справедливо в силу соотношения $M_t P_t u = Q_t M_t u$, которое вытекает из тождества (8).

(ii) Пусть $f^0 \in \mathfrak{F}_t^0$, тогда

$$M_t \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_t} (\mu L - M_t)^{-1} f^0 \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_t} \frac{d\mu}{\mu} f^0 + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_t} L_\mu^L(M_t) f^0 d\mu = -f^0.$$

Если $u^0 \in \mathfrak{U}_t^0$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_t} (\mu L - M_t)^{-1} \frac{d\mu}{\mu} M_t u^0 = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_t} \frac{d\mu}{\mu} u^0 + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_t} R_\mu^L(M_t) u^0 d\mu = -u^0.$$

(Все равенства здесь получаются из (8) при $\lambda = 0$). Значит, оператор $M_{t,0}^{-1}$ равен сужению на $\mathfrak{F}_t^0$ оператора

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_t} (\mu L - M_t)^{-1} \frac{d\mu}{\mu}. \tag{11}$$

Найдем производную оператор-функции

$$M_{t,0}^{-1}(I - Q_t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_t} (\mu L - M_t)^{-1} \frac{d\mu}{\mu} (I - Q_t),$$

которая, если существует, имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_t} (\mu L - M_t)^{-1} \frac{d\mu}{\mu} \right) (I - Q_t) + \left(-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_t} (\mu L - M_t)^{-1} \frac{d\mu}{\mu} \right) \frac{d(I - Q_t)}{dt}.$$

Сильная дифференцируемость проектора $(I - Q_t)$ следует из леммы 4. Сильная дифференцируемость оператора (11) доказывается так же, как сильная дифференцируемость проекторов в лемме 4.

Покажем, что при условии сильной непрерывности оператор-функции $\frac{d}{dt} M_t$ сильно непрерывен по $t \in \mathfrak{J}$ интеграл

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_t} (\mu L - M_t)^{-1} \frac{dM_t}{dt} (\mu L - M_t)^{-1} \frac{d\mu}{\mu}.$$

При $|t-\tau|<\delta$ обозначим $u_{\tau,\mu}=(\mu L-M_\tau)^{-1}f$, тогда

$$\left\|-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_t}(\mu L-M_t)^{-1}\frac{dM_t}{dt}u_{t,\mu}\frac{d\mu}{\mu}-\int\limits_{\gamma_\tau}(\mu L-M_\tau)^{-1}\frac{dM_\tau}{d\tau}u_{\tau,\mu}\frac{d\mu}{\mu}\right)\right\|_{\mathfrak{U}}\leq$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_t}\left\|\left((\mu L-M_t)^{-1}-(\mu L-M_\tau)^{-1}\right)\frac{dM_t}{dt}u_{t,\mu}+(\mu L-M_\tau)^{-1}\left(\frac{dM_t}{dt}-\frac{dM_\tau}{d\tau}\right)u_{t,\mu}\right\|_{\mathfrak{U}}\frac{|d\mu|}{|\mu|}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_t}\left\|(\mu L-M_\tau)^{-1}\frac{dM_\tau}{d\tau}(u_{t,\mu}-u_{\tau,\mu})\right\|_{\mathfrak{U}}\frac{|d\mu|}{|\mu|}\leq$$

$$\leq\sup_{\mu\in\gamma_t}\left\|(\mu L-M_t)^{-1}-(\mu L-M_\tau)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})}\sup_{\mu\in\gamma_t}\left\|\frac{dM_t}{dt}u_{t,\mu}\right\|_{\mathfrak{F}}+$$
$$+\sup_{\mu\in\gamma_t}\left\|(\mu L-M_\tau)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})}\sup_{\mu\in\gamma_t}\left\|\left(\frac{dM_t}{dt}-\frac{dM_\tau}{d\tau}\right)u_{t,\mu}\right\|_{\mathfrak{F}}+$$
$$+\sup_{\mu\in\gamma_t}\left\|(\mu L-M_\tau)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})}\left\|\frac{dM_\tau}{d\tau}\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\sup_{\mu\in\gamma_t}\|u_{t,\mu}-u_{\tau,\mu}\|_{\mathfrak{U}}\leq$$

$$\leq\left\|\frac{dM_t}{dt}u_{t,\mu_0}\right\|_{\mathfrak{F}}\sup_{\mu\in\gamma_t}\left\|(\mu L-M_t)^{-1}-(\mu L-M_\tau)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})}+$$
$$+\left\|\left(\frac{dM_t}{dt}-\frac{dM_\tau}{d\tau}\right)u_{t,\mu_0}\right\|_{\mathfrak{F}}\sup_{|t-\tau|<\delta}\sup_{\mu\in\gamma_t}\left\|(\mu L-M_\tau)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})}+$$
$$+C\sup_{|t-\tau|<\delta}\sup_{\mu\in\gamma_t}\left\|(\mu L-M_\tau)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})}\sup_{\mu\in\gamma_t}\|u_{t,\mu}-u_{\tau,\mu}\|_{\mathfrak{U}}\to 0$$

при $\tau\to t$. Здесь использованы лемма 3, компактность контура γ_t и принцип равномерной ограниченности.

Сильная непрерывность оператор-функции $\frac{d}{dt}(I-Q_t)$ доказывается аналогично.

(iii) Согласно лемме 4 оператор $L_{t,1}^{-1}$ равен сужению на $\mathfrak{F}_t^1$ оператора

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_t}(\mu L-M_t)^{-1}d\mu.$$

Отсюда следует непрерывность в смысле операторной нормы в $\mathcal{L}(\mathfrak{F})$ оператор-функции $L_{t,1}^{-1}Q_t$ по $t\in\mathfrak{I}$. □

Замечание 1. Нетрудно показать, что в предположении $\mathfrak{F}_t^1\equiv\mathfrak{F}^1$ оператор-функция $L_{t,1}^{-1}\in C(\mathfrak{I};\mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}_t^1))$.

При условии (L,σ)-ограниченности оператор-функции M_t в условиях теоремы 2 имеем операторы $H_t=M_{t,0}^{-1}L_{t,0}\in\mathcal{L}(\mathfrak{U}_t^0)$ и $S_t=L_{t,1}^{-1}M_{t,1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{U}_t^1)$, используя которые можно разложить L-резольвенту оператора M_t в кольце $|\mu|>a_t$ в ряд Лорана

$$(\mu L-M_t)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^kH_t^kM_{t,0}^{-1}(I-Q_t)+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^{-k}S_t^{k-1}L_{t,1}^{-1}Q_t.$$

Определение 2. Бесконечно удаленную точку назовем *устранимой особой точкой, полюсом порядка* $p \in \mathbb{N}$ или *существенно особой точкой* L-резольвенты оператор-функции M_t, $t \in \mathfrak{J}$, если соответственно $\forall t \in \mathfrak{J}\ H_t \equiv \mathbb{O}$; $\exists t_0 \in \mathfrak{J}\ H_{t_0}^p \neq \mathbb{O}$, $H_t^{p+1} \equiv \mathbb{O}$; $H_t^q \not\equiv \mathbb{O}\ \forall q \in \mathbb{N}$.

Определение 3. (L, σ)-ограниченную оператор-функцию M_t будем называть:

(i) $(L, 0)$-*ограниченной*, если бесконечность является устранимой особой точкой L-резольвенты оператор-функции M_t;

(ii) (L, p)-*ограниченной*, если бесконечность является полюсом порядка $p \in \mathbb{N}$ L-резольвенты оператор-функции M_t;

(iii) (L, ∞)-*ограниченной*, если бесконечность является существенно особой точкой L-резольвенты оператор-функции M_t.

Теорема 3. *Пусть оператор-функция* $M_t \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ $(L, 0)$-*ограничена. Тогда* $\ker L = \mathfrak{U}_t^0$, $\mathrm{im} L = \mathfrak{F}_t^1$ *для всех* $t \in \mathfrak{J}$.

Доказательство см. в [5].

В дальнейшем будем обозначать $\ker L = \ker P_t = \mathfrak{U}^0$, $\ker Q_t = \mathfrak{F}_t^0$; $\mathrm{im} P_t = \mathfrak{U}_t^1$, $\mathrm{im} L = \mathrm{im} Q_t = \mathfrak{F}^1$; через L_0 обозначим сужение оператора L на $\mathfrak{U}^0$, $L_{t,1}$ – сужение оператора L на $\mathfrak{U}_t^1$; $M_{t,k}$, $k = 0, 1$, есть сужение операторов M_t на $\mathfrak{U}^0$ и $\mathfrak{U}_t^1$ соответственно, $t \in \mathfrak{J}$.

2. Существование решений

Решением уравнения (4) будем называть вектор-функцию $u \in C^1(\mathfrak{J}; \mathfrak{U})$, удовлетворяющую этому уравнению на $\mathfrak{J}$.

Определение 4. Семейство множеств $\{\mathcal{P}_t \subset \mathfrak{U} : \ t \in \mathfrak{J}\}$ назовем *обобщенным фазовым пространством* уравнения (4), если

(i) для любого решения $u(t)$ уравнения (4) для любого $t \in \mathfrak{J}$ выполняется $u(t) \in \mathcal{P}_t$;

(ii) для любого $u_0 \in \mathcal{P}_{t_0}$, существует единственное решение задачи (7), (4).

Теорема 4. *Пусть* $t \in \mathfrak{J}$, *оператор-функция* $M_t \in C(\mathfrak{J}; \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F}))$ $(L, 0)$-*ограничена. Тогда обобщенным фазовым пространством уравнения* (4) *является семейство множеств* $\{L_{t,1}^{-1}[\mathfrak{F}^1] : \ t \in \mathfrak{J}\}$.

Доказательство. Построим решение уравнения (4). Подействуем на уравнение проектором $(I - Q_t)$ и получим

$$(I - Q_t) L\dot{u}(t) = (I - Q_t) M_t u(t)$$

для всех $t \in \mathfrak{J}$, поскольку $\ker(I - Q_t) = \mathrm{im} L$, то

$$0 = M_t(I - P_t)u(t) = M_{t,0}u^0(t),$$

и в силу обратимости оператора $M_{t,0}$ (см. теорему 2) имеем

$$u^0(t) = (I - P_t)u(t) = 0.$$

Теперь сделаем замену $Lu(t) = f(t) \in \mathfrak{F}^1$ для всех $t \in \mathfrak{J}$ в уравнении (4). Представим $u(t)$ в виде $u(t) = u^0(t) + P_t u(t)$, тогда

$$f(t) = Lu(t) = Lu^0(t) + LP_t u(t) = 0 + LP_t u(t) = L_{t,1} P_t u(t).$$

Так как в силу теоремы 2 оператор $L_{t,1}$ непрерывно обратим и $P_t u(t) = L_{t,1}^{-1} f(t)$, то, следовательно, уравнение (4) на подпространстве $\mathfrak{F}^1$ примет вид

$$L\dot{u}(t) = \frac{Lu(t)}{dt} = \dot{f}(t) = M_t u(t) = M_t u^0(t) + M_t P_t u(t) = 0 + M_t L_{t,1}^{-1} f(t).$$

Получили уравнение

$$\dot{f}(t) = M_t L_{t,1}^{-1} f(t), \tag{12}$$

с оператор-функцией $T_t = M_{t,1} L_{t,1}^{-1} \in C(\mathfrak{J}; \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1))$ (см. замечание 1). Решение задачи Коши $f(t_0) = f_0 \in \mathfrak{F}^1$ для уравнения (12) согласно [9, с.138-153] имеет вид $f(t) = \tilde{F}(t) f_0$, где оператор $\tilde{F}(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1)$ при $t,\ t_0 \in \mathfrak{J}$ задается следующим образом

$$\tilde{F}(t) = I_{\mathfrak{F}^1} + \int\limits_{t_0}^{t} T_{t_1} dt_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{t_0}^{t_n} \ldots \int\limits_{t_0}^{t_2} T_{t_n} T_{t_{n-1}} \ldots T_{t_1} dt_1 \ldots dt_n$$

и называется *оператором Коши* уравнения (12).

Решение уравнения (4) имеет вид $u(t) = L_{t,1}^{-1} \tilde{F}(t) f_0$, и каждому $u_0 \in \{L_{t,1}^{-1}[\mathfrak{F}^1] :\ t \in \mathfrak{J}\}$ соответствует $f_0 = L u_0 \in \mathfrak{F}^1$, для которого решение единственно. Следовательно, семейство $\{L_{t,1}^{-1}[\mathfrak{F}^1] :\ t \in \mathfrak{J}\}$ является обобщенным фазовым пространством. $\square$

3. Неоднородное уравнение

Дальнейшие рассуждения проведем в предположении $(L,0)$-ограниченности оператор-функции $M_t \in C(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.

Определение 5. Оператор $U(t,\tau) = L_{t,1}^{-1} \tilde{F}(t) \tilde{F}^{-1}(\tau) L_{\tau,1} P_\tau$ назовем *эволюционным* (*разрешающим*) *оператором* уравнения (4).

Лемма 5. *Эволюционный оператор $U(t,\tau)$ обладает следующими фундаментальными свойствами:*

(i) $U(t,t) = P_t$;
(ii) $U(t,s)U(s,\tau) = U(t,\tau)$;
(iii) $U(t,\tau)\Big|_{\mathfrak{U}_\tau^1} = \left[U(\tau,t)\Big|_{\mathfrak{U}_t^1} \right]^{-1}$;
(iv) $\|U(t,\tau)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \leq K \exp\left(\int\limits_{\tau}^{t} \|T_s\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F}^1)} ds \right)$ $(\tau \leq t)$.

Доказательство очевидным обазом следует из вида эволюционного оператора.

Теорема 5. *Пусть оператор-функция $M_t \in C(\mathfrak{J}; \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F}))$ сильно дифференцируема по $t \in \mathfrak{J}$, $(L,0)$-ограничена и вектор-функция $g \in C^1(\mathfrak{J}, \mathfrak{F})$. Тогда для любого начального значения*

$$u_0 \in \mathcal{G}_{t_0} = \left\{ u \in \mathfrak{U} : (I - P_{t_0}) u = -M_{t_0,0}^{-1} (I - Q_{t_0}) g(t_0) \right\}$$

существует единственное решение $u \in C^1(\mathfrak{J}, \mathfrak{U})$ задачи (7) для уравнения (5), причем

$$u(t) = U(t,t_0) u_0 + \int\limits_{t_0}^{t} U(t,\tau) L_{\tau,1}^{-1} Q_\tau g(\tau) d\tau - M_{t,0}^{-1} (I - Q_t) g(t). \tag{13}$$

Доказательство. Подействуем проектором $(I - Q_t)$ на уравнение (5), получим

$$(I - Q_t) L \dot{u}(t) = (I - Q_t) M_t u(t) + (I - Q_t) g(t),$$

$$L(I - P_t) \dot{u}(t) = M_t (I - P_t) u(t) + (I - Q_t) g(t),$$
$$0 = (I - P_t) u(t) + M_{t,0}^{-1} (I - Q_t) g(t).$$

Как и прежде, обозначим $u^0(t) = (I - P_t)u(t)$, тогда

$$u^0(t) = -M_{t,0}^{-1}(I - Q_t)g(t).$$

Вновь сделаем замену $Lu(t) = f(t) \in \mathfrak{F}^1$ для всех $t \in \mathfrak{J}$ и получим

$$(L\dot{u}(t)) = \dot{f}(t) = M_t u(t) + g(t) = M_t u^0(t) + M_t P_t u(t) + g(t) =$$

$$= M_t(-M_{t,0}^{-1}(I - Q_t)g(t)) + M_t P_t u(t) + g(t) = -(I - Q_t)g(t) + M_t P_t u(t) + g(t) =$$

$$= M_t P_t u(t) + Q_t g(t) = M_t L_{t,1}^{-1} f(t) + Q_t g(t).$$

Таким образом, уравнение (5) мы можем представить в виде системы двух уравнений

$$\dot{f}(t) = T_t f(t) + Q_t g(t), \tag{14}$$

$$0 = u^0(t) + M_{t,0}^{-1}(I - Q_t)g(t) \tag{15}$$

на подпространствах $\mathfrak{F}^1$ и $\mathfrak{U}^0$ соответственно. Решение задачи Коши $f(t_0) = f_0 \in \mathfrak{F}^1$ для уравнения (14) согласно [9, с.138-153] имеет вид

$$f(t) = \tilde{F}(t)\tilde{F}^{-1}(t_0)f_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \tilde{F}(t)\tilde{F}^{-1}(\tau)Q_\tau g(\tau)d\tau.$$

Из приведенных выше рассуждений следуют равенства $P_t u(t) = L_{t,1}^{-1} f(t)$ и $f_0 = L_{t_0,1} P_{t_0} u_0$, а, следовательно,

$$P_t u(t) = L_{t,1}^{-1}\tilde{F}(t)\tilde{F}^{-1}(t_0)L_{t_0,1}P_{t_0}u_0 + \int\limits_{t_0}^{t} L_{t,1}\tilde{F}(t)\tilde{F}^{-1}(\tau)L_{\tau,1}^{-1}Q_\tau g(\tau)d\tau.$$

Функция $u^0(t) = -M_{t,0}^{-1}(I - Q_t)g(t)$ является непрерывно дифференцируемой в силу теоремы 2 (ii) и разрешает уравнение (15). Следовательно, (13) является решением задачи (7), (5). $\square$

4. Решения нестационарной задачи теории фильтрации

Редуцируем задачу (1)–(3) к задаче (7), (5), для этого возьмем пространства $\mathfrak{U} = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, $\mathfrak{F} = H^{-1}(\Omega)$ и обозначим через Δ_0 оператор Лапласа Δ, действующий из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{F}$. Пусть функция $g \in C^1(\mathfrak{J}; \mathfrak{F})$, $\{\lambda_k : \ k \in \mathbb{N}\}$ – собственные значения оператора Δ_0, занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности, $\{\psi_k(x) : \ k \in \mathbb{N}\}$ – множество соответствующих собственных функций. Будем предполагать, что $\lambda \in \sigma(\Delta_0)$. Обозначим собственные вектора, соответствующие λ, через $\varphi_l(x)$, $l = \overline{1,r}$, где r – кратность λ в спектре $\sigma(\Delta_0)$.

Зададим операторы $L = \lambda - \Delta$, $M_t = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(m_{ij}(x,t)\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $t \in \mathfrak{J}$.

Лемма 6. *Пусть функции $m_{ij}(x,t) \in C^1(\mathfrak{J}; L_\infty(\Omega))$, тогда оператор-функция $M_t : \mathfrak{J} \to \mathcal{L}(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega); H^{-1}(\Omega))$ непрерывно дифференцируема по операторной норме.*

Доказательство. Через $\langle w, v\rangle$ обозначим действие функционала $w \in H^{-1}(\Omega)$ на вектор $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Введем обозначения $\tilde{\delta}M_{t_0} = M_t - M_{t_0}$, $\tilde{\delta}m_{ij} = m_{ij}(x,t) - m_{ij}(x,t_0)$, $= \{\tilde{\delta}m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, $\|\tilde{\delta}\tilde{M}_{t_0}\|$ - норма матрицы.

Имеем $\tilde{\delta} M_{t_0} u = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\tilde{\delta} m_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right)$, поэтому $\left|\left\langle \tilde{\delta} M_{t_0} u, v\right\rangle\right| = \left|\sum\limits_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\tilde{\delta} m_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\dfrac{\partial v}{\partial x_i}dx\right| =$

$$= \left|\int\limits_{\Omega}\left(\tilde{\delta}\tilde{M}_{t_0}\nabla u, \nabla v\right)_{\mathbb{R}^n} dx\right| \leq \int\limits_{\Omega}\left|\left(\tilde{\delta}\tilde{M}_{t_0}\nabla u, \nabla v\right)_{\mathbb{R}^n}\right| dx \leq C \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\|\tilde{\delta}\tilde{M}_{t_0}\|\|u\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)}\|v\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)}.$$

Получили, что $\|\tilde{\delta} M_{t_0} u\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega}\|\tilde{\delta}\tilde{M}_{t_0}\|\|u\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)}$, а значит, при $m_{ij} \in C^1(\mathfrak{J}; L_\infty(\Omega))$ и $|t - t_0| < \delta$ верно следующее неравенство $\|\tilde{\delta} M_{t_0}\|_{\mathcal{L}(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega);H^{-1}(\Omega))} \leq C \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega}\|\tilde{\delta}\tilde{M}_{t_0}\| < \varepsilon$.

Поскольку $\left\|\dfrac{\tilde{\delta} M_{t_0}}{\tilde{\delta} t}\right\|_{\mathcal{L}(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega);H^{-1}(\Omega))} \leq C \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega}\left\|\dfrac{\tilde{\delta}\tilde{M}_{t_0}}{\tilde{\delta} t}\right\|$, то при $t - t_0 = \tilde{\delta} t \to 0$ получим следующее $\left\|\dfrac{dM_{t_0}}{dt}\right\|_{\mathcal{L}(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega);H^{-1}(\Omega))} \leq C \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega}\left\|\dfrac{\partial\tilde{M}_{t_0}}{\partial t}\right\|$, где $\dfrac{\partial\tilde{M}_{t_0}}{\partial t} = \left\{\dfrac{\partial m_{ij}}{\partial t}(x, t_0)\right\}_{i,j=1}^{n}$. $\square$

Теорема 6. *Пусть матричная функция* $\mathbb{M}_t = \left\|\sum\limits_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega} m_{ij}(x,t)\dfrac{\partial\varphi_l}{\partial x_j}\ \dfrac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\ dx\right\|_{k,l=1}^{r}$ *при всех* $t \in \mathfrak{J}$ *такова, что* $\det\mathbb{M}_t \neq 0$. *Тогда для любого* $t \in \mathfrak{J}$ *оператор-функция* M_t $(L,0)$-*ограничена.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma(\Delta_0)$, тогда любой ненулевой вектор φ из ядра оператора L можно представить в виде $\varphi = \sum\limits_{l=1}^{r} a_l\varphi_l$. Возьмем вектор $b = (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{R}^r$, тогда

$$\langle M_t\varphi, \varphi\rangle_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(m_{ij}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{l=1}^{r} a_l\varphi_l(x)\right)\sum_{k=1}^{r} a_k\varphi_k(x)dx =$$
$$= -\sum_{l=1}^{r} a_l\sum_{k=1}^{r} a_k\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega} m_{ij}(x,t)\frac{\partial\varphi_l}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}dx = (\mathbb{M}_t b, b)_{\mathbb{R}^r} \neq 0 \quad (16)$$

для всех ненулевых векторов $b \in \mathbb{R}^r$ в силу условий теоремы. Поскольку оператор L самосопряжен в $L_2(\Omega)$, то образ $\mathrm{im}L$ ортогонален ядру $\ker L$ в смысле $L_2(\Omega)$. Поэтому из (16) следует, что $M_t\varphi \notin \mathrm{im}L$. Следовательно, оператор L не имеет M_t-присоединенных векторов. Поскольку оператор L фредгольмов, из теоремы 4.6.1 [6] следует требуемое. $\square$

В силу леммы 6 и теоремы 6 справедлива теорема 5 о разрешимости задачи (1) – (3).

В заключение хочу выразить благодарность Г.А. Свиридюку за постановку задачи и интерес, проявленный к данной работе, а также В.Е. Федорову за полезные советы и констуктивную критику полученных результатов.

Литература

1. Свиридюк, Г.А. Об одной модели динамики несжимаемой вязко-упругой жидкости / Г.А. Свиридюк // Известия ВУЗ. Математика. – 1988. – № 1. – С. 74–79.

2. Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикл. математика и мех. – 1960. – Т. 24, № 5. – С. 58–73.
3. Демиденко, Г.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. – Новосибирск: Науч. кн., 1998. – 438 с.
4. Дзекцер, Е.С. Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью / Е.С. Дзекцер // ДАН СССР. – 1972. – Т. 202, № 5. – С. 1031–1033.
5. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47–74.
6. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrech; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003. – 216 c.
7. Шестаков, А.Л. Динамические измерения как задача оптимального управления / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк, Е.В. Захарова // Обозр. прикл. и пром. математики. – 2009. –Т. 16, № 4. – С. 732–733.
8. Шестаков, А.Л. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та, сер. «Мат. моделирование и программирование». – 2010. – № 16, вып. 5. – С. 88–92.
9. Далецкий, Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. – М.: Наука, 1970. – 536 с.
10. Kato, T. Integration of the Equation of Evolution in a Banach Space / T. Kato // J. Math. Soc. of Japan. – 1953. – V. 5. – P. 208–234.
11. Ладыженская, О.А. Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений / О.А. Ладыженская, М.И. Вишик / Успехи мат. наук. – 1956. – Т. 11, № 6. – С. 41–97.
12. Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
13. Крейн, С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
14. Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. – М.: Мир, 1985.– 376 с.
15. Favini, A. Degenerate Differential Equations in Banach Spaces / A. Favini, A. Yagi. – N.Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc, 1999. – 236 c.

Минзиля Алмасовна Сагадеева, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Информационно-измерительная техника», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), sagadeeva_ma@mail.ru.

MSC 35Q35, 35F99

The Solvability of Nonstationary Problem of Filtering Theory

M.A. Sagadeyeva, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)

We discuss one problem for class unclassical equations mathematical wave theory. A distinctive feature of this problem is the time dependence of the functional coefficients of an elliptic operator on the right side of the equation. The method of investigation this theory is reduction to problem Cauchy for nonstationary equation of Sobolev type. The Sobolev type equations with time-dependent operator in this formulation are considered for the first time.

We introduced definition of relatively spectrally bounded operator-functions. The conditions that guarantee the fulfillment of this task properties allow to allocate the subspace of initial values for which there is only one solution to the Cauchy problem. This subspace we are named the generalized phase space solutions for the nonstationary equations of Sobolev type. The solution of this problem for a Sobolev type equations, as well as in the original formulation, is obtained by recursive formula.

Keywords: nonstationary equation, Sobolev type equation.

References

1. Sviridyuk G.A. A Model for the Dynamics of an Incompressible Viscoelastic Fluid // *Soviet Mathematics – Izvestiya VUZ. Matematika.* 1988, vol. 32, no. 1, pp. 94–100.

2. Barenblatt G.I., Zheltov Yu.P., Kochina I.N. Ob osnovnykh predstavleniyakh teorii fil'tratsii v treshchinovatykh sredah [About the Basic Representations of the Theory of a Filtration in Fractures Environments]. *Appl. Math. and Mech.* 1960, vol. 24, no. 5, pp. 58–73.

3. Demidenko G.V., Uspenskiy S.V. *Uravneniya i sistemy, ne razreshennye otnositel'no starshey proizvodnoy* [The Equations and the Systems which Have Been not Resolved Concerning the Senior Derivative]. Novosibirsk, Science book, 1998. 438 p.

4. Dzektser Ye.S. Obobshchenie uravneniya dvizheniya gruntovykh vod so svobodnoy poverkhnost'yu [Generalization of the Equation of Movement of Ground Waters with a Free Surface]. *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 1972, vol. 202, no. 5, pp. 1031–1033.

5. Sviridyuk G.A. K obwej teorii polugrupp operatorov [On the General Theory of Operator Semigroups]. *Russian Mathematical Surveys*, 1994, vol. 49, no. 4, pp. 45–74.

6. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators.* Utrecht, Boston, VSP, 2003. 216 p.

7. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Zaharova E.V. Dinamicheskiye izmereniya kak zadacha optimal'nogo izmereniya [Dinamic Measure as a Optimal Control Problem]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki – Review of Industrial and Applied Mathematics*, 2009, vol. 16, no. 4, pp. 732–733.

8. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. Novyy podkhod k izmereniyu dinamicheski iskazhennykh signalov [Are new approach to measuring dynamically distorted signals]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya ≪Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie≫ – Bulletin of South Ural State University. Seria ≪Mathematical Modelling, Programming & Computer Software≫*, 2010, no. 16(192), issue 5, pp. 88–92.

9. Dalecki Yu.L., Krejn M.G. *Ustojchivost' reshenij differencial'nyh uravnenij v banahovom prostranstve* [Stability of Decisions of the Differential Equations in Banach Space]. Moscow, Scince, 1970. 536 p.

10. Kato T. Integration of the Equation of Evolution in a Banach Space. *J. Math. Soc. of Japan*, 1953, vol. 5, pp. 208–234.

11. Ladyzhenskaja O.A., Vishik M.I. Kraevye zadachi dlja uravnenij v chastnyh proizvodnyh i nekotoryh klassov operatornyh uravnenij [Edge Problems for the Equations in Private Derivative and Some Classes of the Operational Equations] *Uspekhi Math. Nauk*, 1956, vol. 11, no. 6, pp. 41–97.

12. Yosida K. *Functional analysis.* Berlin: Springer, 1980. 511 p.

13. Krejn S.G. *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in Banach Spaces]. Moscow, Scince, 1967. 464 p.

14. Henry D. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations* Berlin, Springer, 1993. 376 p.

15. Favini A., Yagi A. *Degenerate Differential Equations in Banach Spaces.* N.Y., Basel, Hong Kong, Marcel Dekker, Inc, 1999. 236 p.

Поступила в редакцию 13 января 2012 г.