МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ СССР

Челябинский политехнический институт
имени Ленинского комсомола

На правах рукописи

АЙСАГАЛИЕВ СЕРИКБАЙ АБДИГАЛИЕВИЧ,
доцент, кандидат технических наук

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Специальность 05.13.14 - "Автоматическое
управление и регулирование"

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора технических наук

Челябинск
1974

Работа выполнена на кафедре "Системы автоматического управления" Челябинского политехнического института имени Ленинского комсомола и на кафедре прикладной математики Казахского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета им.С.М.Кирова.

Научный консультант - заслуженный деятель науки и техники РСФСР, профессор, доктор технических наук ЧЕРНОРУЦКИЙ Г.С.

Официальные оппоненты:

доктор технических наук, профессор Б.Н.Наумов;

доктор технических наук, профессор И.Е.Казаков;

заслуженный деятель науки и техники ТАССР, доктор технических наук, профессор Т.К.Сиразетдинов.

Ведущее предприятие - Московское высшее техническое училище им.Э.Баумана (МВТУ им.Баумана).

Автореферат разослан "11" апреля 1974г.

Защита диссертации состоится "29" мая 1974г., в 15 часов, в аудитории 244 на заседании Совета по присуждению ученых степеней Челябинского политехнического института имени Ленинского комсомола (454044, Челябинск-44, проспект им.В.И.Ленина, 76, главный корпус).

Просим Вас и сотрудников Вашего учреждения, интересующихся темой диссертации, принять участие в заседании Совета или прислать отзыв (в двух экземплярах, заверенных печатью).

Ученый секретарь Совета
доктор технических наук, профессор (В.В.МАТВЕЕВ)

Существующие методы исследования динамики нелинейных систем управления можно разбить на две большие группы: аналитические и неаналитические. В свою очередь аналитические методы можно разделить на точные и приближенные.

Приближенные методы: метод малого параметра А.Пуанкаре; метод гармонической линеаризации нелинейностей Н.М.Крылова и Н.Н.Боголюбова, получивший существенное развитие в работах Е.П.Попова, метод статистической линеаризации И.Е.Казакова отличаются универсальностью и простотой применения. Недостатком является то, что во многих случаях невозможно предсказать или оценить величину получаемой погрешности, причем возникающая ошибка иногда может носить качественный, т.е. принципиальный характер.

Точные методы: Второй метод А.М.Ляпунова [I] и другие методы качественной теории дифференциальных уравнений; методы, основанные на рассмотрении фазового пространства системы и др. отличаются безусловной верностью и точностью получаемого общего решения задачи. Недостатком этих методов является их сложность, громоздкость и возможность применения лишь к определенному сравнительно узкому кругу задач.

Приближенные методы исследования нелинейных систем в настоящее время значительно развиты, несмотря на это прикладные точные аналитические методы для систем n -го порядка существенно нуждаются в развитии.

Последние годы благодаря работам В.М.Попова [2], М.А. Айзермана и Ф.Р.Гантмахера [3], Б.Н.Наумова и Я.З.Цыпкина [4], В.А.Якубовича [5], А.Х.Гелига [6], Джури Э, Ли Б.[7], автора и др. получены частотные критерии абсолютной устойчивости как одноконтурных так и многомерных нелинейных систем автоматического управления.

Частотные критерии абсолютной устойчивости отличаются от других методов тем, что условие абсолютной устойчивости устанавливается не с помощью разрешающих уравнений или неравенств, содержащих коэффициенты исходной системы дифференциальных уравнений, а с помощью частотной характеристики линейной части системы и весьма эффективны.

Автором получены: частотный критерий абсолютной устойчивости многомерных нелинейных систем с учетом условий на производную характеристику нелинейных элементов, частотный критерий абсолютной устойчивости двухмерных систем с перекрестными нелинейными связями, частотный критерий абсолютной устойчивости одноконтурных систем с несколькими нелинейными элементами.

Пространство параметров нелинейной системы автоматического управления можно разбить за ряд подобластей, соответствующих топологически различным фазовым портретам, причем каждой подобласти соответствуют вполне определенные фазовые картины. Часто при проектировании нелинейных систем необходимо выбрать параметры корректирующих устройств из условия отсутствия автоколебаний в системе. Это положение приводит к необходимости определения соответствующей области в пространстве параметров системы, чаще всего в пространстве параметров регулятора, в которой имеет место асимптотическая устойчивость.

Решение этой задачи получено автором на основе теоремы Штурма, а за рубежом в США профессором Д.Шиляком [8] по схеме Рауса. С другой стороны переход от частотного критерия абсолютной устойчивости к алгебраическим критериям абсолютной устойчивости вызвано тем, что применение второго метода Ляпунова для исследования динамики нелинейных систем в конечном счете сводится к проверке положительно-определенности некоторой симметричной эрмитово-сопряженной матрицы $\Pi(i\omega)$. В случае, когда $\Pi(i\omega)$ - матрица, проверка выполнения условия $\Pi(i\omega)\geq 0$ даже при фиксированных значениях параметров системы довольно сложная задача, требующая дальнейшего дополнительного исследования.

Первая работа по оценке переходного процесса на основе интегрального квадратичного критерия для нелинейных систем на основе частотного критерия была выполнена В.М.Поповым [9]. Оценка В.М.Попова была улучшена Баркиным А.И. [10] путем сведения оценки функционала к вариационной задаче.

В работе автора рассмотрена иная задача, имеющая приемственную связь с работами [9,10]. Получен ответ на следующие вопросы:

1. Как можно найти в пространстве параметров системы область, где квадратичный функционал $\mathcal{J}[\varphi(\sigma)]$ принимает значение меньшее, чем некоторое положительное число?

2. Нельзя ли найти такое значение произвольной постоянной, фигурирующей в частотном критерии устойчивости, при котором область, выделяемая на основе алгебраического критерия устойчивости совпадает с областью, доставляемой частотным критерием абсолютной устойчивости?

3. Как можно найти значение произвольной постоянной, чтобы интересующая нас область в пространстве параметров системы была наибольшей, в смысле выбранной целевой функции?

На практике наряду с нелинейными элементами, удовлетворяющими условию $0 \leq \varphi_i(\sigma_i)\sigma_i \leq \mu_i \sigma_i^2 \quad i=\overline{1,n}$, встречаются нелинейности, удовлетворяющие условию $|\varphi_i(\sigma_i)| \leq \mu_i |\sigma_i|$ (однополупериодное, двухполупериодное выпрямление и др.). Возможно, что в одной и той же системе встречаются нелинейности и первого и второго класса.

За последнее десятилетие получила развитие идея использования нескольких скалярных функций Ляпунова или, по терминологии Р.Беллмана, вектор-функции Ляпунова для расчета сложных систем. Способы построения вектор-функции Ляпунова для многосвязных систем исследовались в работах Ф.Бэйли [11], А.А.Пионтковского и Л.Д.Рутковской [12].

На основе вектор-функции Ляпунова автором получены критерии устойчивости: для одноконтурных систем с несколькими нелинейными элементами, для многомерных систем с несколькими нелинейными элементами, для двухмерных систем с перекрестными нелинейными элементами. Получены критерии устойчивости для нелинейных систем, содержащих блок произведения фазовых координат, найдена область притяжения в фазовом пространстве системы и определены параметры автоколебаний комплекса "регулируемый источник питания - система автоматического управления".

Статистический анализ и синтез систем автоматического управления имеет большое практическое значение, так как реальные системы работают в условиях воздействия различных помех, которые могут иметь характер внешних случайных возмущений или же представляют собой случайные изменения параметров системы.

Когда система автоматического управления содержит случайные параметры, приходится говорить как о вероятности устойчивости системы, так и о вероятности выполнения заданных динамических свойств.

Вопросы стохастической устойчивости для нелинейных систем при случайном входном сигнале были рассмотрены Казаковым И.Е. [13], а надежность работы линейных систем со случайными стационарными параметрами на основе вероятности устойчивости системы были рассмотрены в работах Черноруцкого Г.С. [14]. В отличие от этих работ автором рассмотрена вероятность устойчивости нелинейных систем, когда параметры системы являются случайными величинами и, в общем случае, имеется случайное стационарное входное возмущение.

Исследование абсолютной устойчивости положения равновесия системы

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma),\ \sigma = Cx,\ 0 \le \varphi_i(\sigma_i)\sigma_i \le \mu_i\sigma_i^2\quad i=\overline{1,n}, \tag{I}$$

где A - постоянная матрица порядка $N \times N$, B - постоянная матрица порядка $N \times n$, $\varphi(\sigma)$ - вектор-столбец $n \times 1$, x - вектор $N \times 1$, C - матрица порядка $n \times N$, было предметом исследований многих авторов, начиная с работы А.И.Лурье и В.Н.Постникова.

По-видимому, наступило время пересмотреть постановку задачи (I) на основе современной теории оптимального управления с учетом физической основы задачи. Действительно, характеристика нелинейного элемента $\varphi(\sigma)$ есть не что иное, как характеристика исполнительного органа или датчика либо усилительного элемента, выбираемая на основе технического задания с учетом особенностей объекта управления. То есть $\varphi(\sigma)$ является неотъемлемой частью системы с неизвестным аналитическим выражением, определяемым экспериментальным путем и удовлетворяющая условию $0 \le \varphi_i(\sigma_i)\sigma_i \le \mu_i\sigma_i^2$ $i=\overline{1,n}$, если учесть разбросы. Однако предположение, что $\sigma = Cx$, в общем случае неверно. В то время, когда была поставлена задача (I) такое положение имело основание так как часто системы проектировались по этому закону и такие системы обладали динамическими свойствами, вполне удовлетворяющими потребностям практики.

Было бы целесообразно поставить задачу следующим образом: Найти $\sigma = \sigma(x)$ из условия минимума функционала

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty F(x, \varphi(\sigma), \sigma)\, dt \qquad (2)$$

в силу дифференциального уравнения $\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma)$.

В работе определены оптимальные алгоритмы управления для указанной задачи в случае квадратичного критерия качества (2) для двух случаев: I. Когда входы и выходы нелинейных элементов физически измеримые, 2. Путем введения дополнительных нелинейностей.

Для случая, когда вход и выход нелинейного элемента физически измеримы, найдено оптимальное байесовское управление для чисто стохастической нелинейной системы,когда внешнее возмущение - случайный гауссовский шум а фазовые координаты наблюдаются с некоторым гауссовским шумом и начальное условие $x(0) = x_0$ распределено по нормальному закону. Найдено параметрическое адаптивное управление,когда математические ожидания внешнего возмущения и помехи наблюдения - неизвестные величины, но с известными априорными плотностями распределения.

Наконец, на основе предлагаемой методики приведены результаты исследования динамики электромеханических систем: I. Динамический стенд для физического моделирования с нелинейностью типа сухое трение. 2. Релейное управление в системе тиристорный преобразователь-двигатель. 3. Взаимодействие комплекса "регулируемый источник питания - система автоматического управления".

Основная цель диссертационной работы - создание единой инженерной методики расчета нелинейных систем управления на основе точных аналитических методов, тем самым дополнить пробел, имеющийся в исследовании динамики нелинейных систем и существенно дополнить приближенный метод - метод гармонической линеаризации - широко применяемый в инженерной практике.

Глава I. § I. Среди многомерных нелинейных систем регулирования наиболее важное значение имеют двухмерные системы.

Примеры таких систем - следящие системы в станках с программным управлением по двум координатам, системы пространственного углового сопровождения, паровые турбины с отбором пара, двухканальные системы с антисимметричными связями и др.

Нелинейные элементы в таких системах могут находиться: в прямой цепи, в цепи обратной связи и, наконец, в перекрестных связях. Ниже рассмотрен случай, когда безинерционные нелинейные элементы имеются и в прямой цепи и в перекрестных связях.

Уравнения движения системы имеют вид:

$$\dot{x} = Ax + C\varphi_{11}(\sigma_1), \quad \dot{y} = By + c\varphi_{22}(\sigma_2),$$
$$\dot{v} = Cv + d\varphi_{21}(\sigma_2), \quad \dot{z} = Dz + f\varphi_{12}(\sigma_1), \qquad (3)$$
$$\sigma_1 = c_1^* x + c_2^* v, \quad \sigma_2 = c_3^* y + c_4^* z,$$

где A, B, C, D - постоянные матрицы соответственно порядка $n \times n$, $m \times m$, $q \times q$, $l \times l$; x, y, z, v векторы порядка $n \times 1$, $m \times 1$, $l \times 1$, $q \times 1$ соответственно, а b, c, f, d векторы порядка $n \times 1$, $m \times 1$, $l \times 1$, $q \times 1$ соответственно.

Уравнение (3) в операторной форме имеет вид:

$$\sigma_1 = -W_{11}(p)\varphi_{11}(\sigma_1) - W_{21}(p)\varphi_{21}(\sigma_2), \quad \sigma_2 = -W_{22}(p)\varphi_{22}(\sigma_2) - W_{12}(p)\varphi_{12}(\sigma_1), \qquad (4)$$

где $W_{11}(p) = c_1^*(A - pI_n)^{-1}b$, $W_{12}(p) = c_4^*(D - pI_l)^{-1}f$, $W_{21}(p) = c_2^*(C - pI_q)^{-1}d$, $W_{22}(p) = c_3^*(B - pI_m)^{-1}c$, $p = d/dt$.

Предположим, что полюсы передаточных функций $W_{11}(p), W_{12}(p), W_{21}(p), W_{22}(p)$ расположены в левой полуплоскости и характеристики нелинейных элементов удовлетворяют условиям:

$$0 \le \varphi_{11}(\sigma_1)\sigma_1 \le \mu_{11}\sigma_1^2, \quad 0 \le \varphi_{22}(\sigma_2)\sigma_2 \le \mu_{22}\sigma_2^2, \qquad (5)$$
$$0 \le \varphi_{12}(\sigma_1)\sigma_1 \le \mu_{12}\sigma_1^2, \quad 0 \le \varphi_{21}(\sigma_2)\sigma_2 \le \mu_{21}\sigma_2^2.$$

Тогда условия асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы (3) (рис.I) можно сформулировать на языке частотных характеристик двухмерных систем в виде следующей теоремы.

Теорема I. Для асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы (3) достаточно существования диагональных матриц $\vartheta = diag\{\vartheta_{11}, \vartheta_{22}, \vartheta_{21}, \vartheta_{12}\}$ и $\tau = diag\{\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{21}, \tau_{12}\} > 0$ таких, чтобы симметричная эрмитово-сопряженная матрица

$$\Pi(i\omega)=\left\|\begin{matrix} Re(\tau_{11}+i\omega\vartheta_{11})W_{11}(i\omega)+\tau_{11}\mu_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & Re(\tau_{22}+i\omega\vartheta_{22})W_{22}+\tau_{22}\mu_{22}^{-1} \\ \frac{1}{2}\left[(\tau_{21}+i\omega\vartheta_{21})W_{11}(i\omega)+\overline{(\tau_{11}+i\omega\vartheta_{11})W_{21}(i\omega)}\right] & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left[(\tau_{22}+i\omega\vartheta_{12})W_{22}(i\omega)+\overline{(\tau_{22}+i\omega\vartheta_{22})W_{12}}\right] \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{1}{2}\left[(\tau_{11}+i\omega\vartheta_{11})W_{21}(i\omega)+\overline{(\tau_{21}+i\omega\vartheta_{21})W_{11}(i\omega)}\right] & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left[(\tau_{22}+i\omega\vartheta_{22})W_{12}+\overline{(\tau_{12}+i\omega\vartheta_{12})W_{22}(i\omega)}\right] \\ Re(\tau_{21}+i\omega\vartheta_{21})W_{21}(i\omega)+\tau_{21}\mu_{21}^{-1} & 0 \\ 0 & Re(\tau_{12}+i\omega\vartheta_{12})W_{12}(i\omega)+\tau_{12}\mu_{12}^{-1} \end{matrix}\right\| \quad (6)$$

была положительно-определенной при $0 \le \omega < \infty$.

Нередко при проектировании систем управления требуется выбрать параметры корректирующего контура так, чтобы система не только была устойчива, но и еще фазовые координаты затухали быстрее некоторой заданной экспоненты. В этом случае справедлива следующая теорема.

<u>Теорема 2</u>. Если полюсы смещенных передаточных функций $W_{11}(p-\alpha)$, $W_{12}(p-\alpha)$, $W_{21}(p-\alpha)$, $W_{22}(p-\alpha)$ лежат в левой полуплоскости, то область заданного затухания в пространстве параметров системы, где $|x(t)| \le C_1 e^{-\alpha t}$, $|y(t)| \le C_2 e^{-\alpha t}$, $|z(t)| \le C_3 e^{-\alpha t}$, $|v(t)| \le C_4 e^{-\alpha t}$ можно выделить на основе частотного критерия $\Pi(i\omega-\alpha)>0$ при $0 \le \omega < \infty$, $\vartheta = 0$.

Наконец, рассмотрим случай, когда в основных контурах или в перекрестных связях имеются интегрирующие или неустойчивые звенья. Предположим, что характеристики нелинейных элементов в отличие от (5) удовлетворяют условиям

$$\nu_{11}\sigma_1^2 \le \varphi_{11}(\sigma_1)\sigma_1 \le \mu_{11}\sigma_1^2, \quad \nu_{22}\sigma_2^2 \le \varphi_{22}(\sigma_2)\sigma_2 \le \mu_{22}\sigma_2^2,$$

$$\nu_{12}\sigma_1^2 \le \varphi_{12}(\sigma_1)\sigma_1 \le \mu_{12}\sigma_1^2, \quad \nu_{21}\sigma_2^2 \le \varphi_{21}(\sigma_2)\sigma_2 \le \mu_{21}\sigma_2^2.$$

Вводя матрицы

$$\overline{W}(p)=\frac{1}{\Delta}\left\|\begin{matrix} (1+\nu_{22}W_{22})W_{11} & -\nu_{21}W_{21}W_{22} & (1+\nu_{22}W_{22})W_{21} & -\nu_{21}W_{21}W_{12} \\ -\nu_{12}W_{11}W_{12} & (1+\nu_{11}W_{11})W_{22} & -\nu_{12}W_{12}W_{21} & (1+\nu_{11}W_{11})W_{12} \end{matrix}\right\|,$$

$$\bar{\mu}^{-1}=diag\{\bar{\mu}_{11}^{-1}, \bar{\mu}_{22}^{-1}, \bar{\mu}_{21}^{-1}, \bar{\mu}_{12}^{-1}\} \quad \text{где } \bar{\mu}_{ij}=\frac{\mu_{ij}-\nu_{ij}}{1+\mu_{ij}\nu_{ij}} \quad i,j=1,2,$$

$\Delta = [1+\nu_{11} W_{11}(p)][1+\nu_{22} W_{22}(p)] - \nu_{12}\nu_{21} W_{12}(p) W_{21}(p)$, приходим к следующей теореме.

Теорема 3. Если элементы матрицы $\bar{W}(p)$ имеют полюсы в левой полуплоскости, то для абсолютной устойчивости положения равновесия системы (4) достаточно, чтобы симметричная эрмитово-сопряженная матрица

$$\Pi(i\omega) = \tau\bar{\mu}^{-1} + Re\left[(\tau + i\omega\vartheta)\left\| \begin{matrix} \bar{W}(i\omega) \\ \bar{W}(i\omega) \end{matrix} \right\|\right] \qquad (7)$$

была положительно-определенной при $0 \le \omega < \infty$.

Применительно к передаточной функции $\bar{W}(p)$ справедливо условие теоремы 2.

§ 2. В большинстве случаев структура систем управления представляет собой одноконтурную систему с несколькими нелинейными элементами, отделенными друг от друга передаточными функциями линейной части не всегда удовлетворяющими условиям фильтра. Уравнение движения одноконтурной системы с несколькими нелинейными элементами описывается дифференциальным уравнением вида

$$\dot{X}_i = A_i X_i + b_i \varphi_i(\sigma_i) \quad i = \overline{1,n}; \; \sigma_1 = c_n^* X_n, \; \sigma_j = c_{j-1}^* X_{j-1}, \; j = \overline{2,n}, \qquad (8)$$

где A_i - квадратная матрица порядка $m_i \times n_i$, X_i, b_i - векторы $m_i \times 1$, c_i^* - вектор-строка $1 \times m_i$, $\varphi_i(\sigma_i)$ - характеристики нелинейных элементов, удовлетворяющие условию $0 \le \varphi_i(\sigma_i)\sigma_i \le \mu_i \sigma_i^2 \quad i = \overline{1,n}$.

Уравнение (7) в операторной форме имеет вид

$$\sigma_1 = -W_n(p)\varphi_n(\sigma_n), \; \sigma_j = -W_{j-1}(p)\varphi_{j-1}(\sigma_{j-1}) \quad j = \overline{2,n},$$

где $W_n(p) = c_n^*(A_n - pI_n)^{-1} b_n$, $W_{j-1}(p) = c_{j-1}^*(A_{j-1} - pI_{j-1})^{-1} b_{j-1}$. Структурная схема системы имеет вид, указанный на рис.2. Справедлива следующая теорема.

Теорема I. Если полюсы передаточных функций $W_i(p)$ $i = \overline{1,n}$ лежат в левой полуплоскости и можно найти диагональные матрицы $\vartheta = diag\{\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\}$, $\tau = diag\{\tau_1, \dots, \tau_n\} > 0$ такие, что симметричная эрмитово-сопряженная матрица

$$\Pi_1(i\omega)=\left\|\begin{matrix} \tau_1\mu_1^{-1} & \frac{1}{2}\overline{(\tau_2+i\omega\vartheta_2)W_1} & 0\ \dots\ 0 & & \frac{1}{2}(\tau_1+i\omega\vartheta_1)W_n \\ \frac{1}{2}(\tau_2+i\omega\vartheta_2)W_1 & \tau_2\mu_2^{-1} & \frac{1}{2}\overline{(\tau_3+i\omega\vartheta_3)W_2} & & 0\ \dots\ 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0\ \dots\ 0 & \frac{1}{2}(\tau_{n-1}+i\omega_{n-1})W_{n-2} & \tau_{n-1}\mu_{n-1}^{-1} & & \frac{1}{2}\overline{(\tau_n+i\omega\vartheta_n)W_{n-1}} \\ \frac{1}{2}(\tau_1+i\omega\vartheta_1)W_n & 0\ \dots\ 0 & \frac{1}{2}(\tau_n+i\omega\vartheta_n)W_{n-1} & & \tau_n\mu_n^{-1} \end{matrix}\right\| > 0 \quad (9)$$

при $0\le\omega<\infty$, то положение равновесия системы (8) асимптотически устойчиво в целом.

Аналогично теореме 2 можно сформулировать следующую теорему.

<u>Теорема 2.</u> Если полюсы смещенных передаточных функций $W_i(p-\alpha)$ лежат в левой полуплоскости, то область заданного затухания в пространстве параметров системы, где $|X_i(t)|\le C_i e^{-\alpha t}$ можно выделить на основе частотного критерия $\Pi_1(i\omega-\alpha)>0$ при $0\le\omega<\infty$, $\vartheta=0$.

В случае, когда передаточные функции линейной части системы содержат интегрирующие и неустойчивые звенья, а характеристики нелинейных элементов удовлетворяют условию $\nu_i\sigma_i^2\le\varphi_i(\sigma_i)\sigma_i\le\mu_i\sigma_i^2$ справедлива следующая теорема.

<u>Теорема 3.</u> Если

$$\bar{\bar{A}}=\left\|\begin{matrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & b_1\nu_1c_n^* \\ b_2\nu_2c_1^* & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_3\nu_3c_2^* & A_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots\ b_n\nu_nc_{n-1}^* & A_n \end{matrix}\right\|$$

устойчивая матрица, то для асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы (8) достаточно, чтобы симметричная эрмитово-сопряженная матрица

$$\Pi_2(i\omega)=\tau\bar{\mu}^{-1}+Re[(\tau+i\omega\vartheta)\bar{\bar{W}}(i\omega)]>0 \qquad (10)$$

при $0\le\omega<\infty$.

В условиях теоремы $\bar{\bar{W}}(i\omega)=C^*(\bar{\bar{A}}-i\omega I)^{-1}B^*$, а $\bar{\mu}^{-1}=$ $=diag\{(\mu_1-\nu_1)^{-1},(\mu_2-\nu_2)^{-1},\dots,(\mu_n-\nu_n)^{-1}\}$.

Условие теоремы 2 остается справедливым, если заменить $W_i(p-\alpha)$ элементами матрицы $\bar{\bar{W}}(p-\alpha)$ и потребовать выполнения условия $\Pi_2(i\omega-\alpha)>0$, $\vartheta=0$ при $0\le\omega<\infty$.

§ 3. Первым шагом к расширению области абсолютной устойчивости является использование дополнительных сведений о нелинейности $\varphi_i(\sigma_i)$ кроме $0 \le \varphi_i(\sigma_i)\sigma_i \le \mu_i \sigma_i^2$. Поскольку часто встречаются нелинейности не только непрерывные, но и дифференцируемые, то в качестве дополнительных данных лучше использовать условие $d\varphi_i / d\sigma_i \ge \alpha_i$ $i=\overline{1,n}$, где $\alpha_i \ge 0$ постоянные числа.

Условие $d\varphi_i/d\sigma_i \ge \alpha_i$ также как первое условие является гибким условием, поскольку не требует аналитического выражения $\varphi_i(\sigma_i)$, а лишь налагает ограничения, что при всех разбросах производные от характеристики нелинейных элементов оставались больше или меньше некоторого числа α_i.

Рассмотрим систему автоматического управления, описываемую системой дифференциальных уравнений вида

$$\dot{X} = AX + B^*\varphi\ , \ \sigma = C^*X, \tag{11}$$

где матрицы A, B^*, C^* соответственно порядка $N \times N$, $N \times n$, $n \times N$, а X, φ, σ – векторы порядка $N \times 1$, $n \times 1$, $n \times 1$ соответственно.

Характеристики нелинейных элементов $\varphi_i(\sigma_i)(i=\overline{1,n})$ – дифференцируемые в каждой точке функции, удовлетворяющие условиям

$$0 \le \sigma_i \varphi_i(\sigma_i) \le \mu_i \sigma_i^2\ , \ \varphi_i'(\sigma_i) \ge \alpha_i \quad (\mu_i < \infty) \quad i=\overline{1,n}.$$

В операторной форме уравнение (11) имеет вид $\sigma = -W(i\omega)\varphi(\sigma)$, где $W(i\omega) = C^*(A - i\omega I)^{-1}B^*$. Для формулировки основной теоремы введем диагональные матрицы

$$\vartheta = diag\{\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n\}\ , \ \tau = diag\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\},$$
$$\alpha = diag\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}.$$

<u>Теорема 1</u>. Если A – устойчивая матрица и существует диагональная матрица $\tau \ge 0$ такая, что $BC\tau$ – симметричная матрица, то для асимптотической устойчивости в целом решения $X=0$ системы (11) достаточно, чтобы эрмитово-сопряженная симметричная матрица

$$\Pi(i\omega) = \mu^{-1} + Re[(1 + i\omega\vartheta \pm \omega^2\tau)W(i\omega)] \pm \omega^2 W^*\tau\alpha W \tag{12}$$

была положительно-определенной при $0 \le \omega < \infty$.

В условии теоремы μ^{-1} – диагональная матрица с диагональными элементами μ_i^{-1}, а $W^*(i\omega)$ комплексно-сопряженная матрица относительно матрицы $W(i\omega)$. Знак минус в частотном критерии (12) относится к случаю $\varphi_i'(\sigma_i) < \alpha_i$.

Теорема I была сформулирована при условии, что полюсы передаточных функций $w_{ij}(p)$ $(W(p) = \| w_{ij}(p) \|_1^n)$ расположены в левой полуплоскости. Однако, часто на практике встречаются системы, для которых $w_{ij}(p)$ имеют полюсы на мнимой оси (интегрирующие звенья, консервативные звенья) поэтому целесообразно сформулировать частотные критерии абсолютной устойчивости для таких случаев.

Предположим, что характеристики нелинейных элемементов удовлетворяют условиям $\nu_i \sigma_i^2 \le \varphi_i(\sigma_i)\sigma_i \le \mu_i \sigma_i^2$, $\varphi_i'(\sigma_i) \ge 0$ $i = \overline{1,n}$. Тогда справедлива следующая теорема.

<u>Теорема 2</u>. Если матрица A неустойчива, но матрица $\bar{A} = A + B^* diag\,\nu\, C^*$ гурвицева, и существует диагональная матрица $\tau \ge 0$ такая, что $BC\tau$ – симметричная матрица, то для асимптотической устойчивости в целом решения $x = 0$ системы (II) достаточно, чтобы эрмитово-сопряженная матрица

$$\Pi_1(i\omega) = \bar{\mu}^{-1} + Re[(1 + i\omega\vartheta + \omega^2\tau)\overline{W}(i\omega)] + \omega^2 \overline{W}^* \tau \nu \overline{W} \qquad (13)$$

была положительно-определенной при $0 \le \omega < \infty$.

Неизвестные матрицы в условии теоремы $\overline{W}(i\omega) = C^*(\bar{A} - i\omega I)^{-1} B^*$, $\nu = diag\{-\nu_1, -\nu_2, \ldots, -\nu_n\}$, $\bar{\mu}^{-1} = diag\{(\mu_1 - \nu_1)^{-1}, (\mu_2 - \nu_2)^{-1}, \ldots, (\mu_n - \nu_n)^{-1}\}$.

Нетрудно убедиться, что когда $\vartheta = 0$, а $A + \alpha E$ – гурвицева матрица, то в области, где $\Pi(i\omega - \alpha) > 0$ при $0 \le \omega < \infty$ справедлива оценка $|x_i(t)| \le C_i e^{-\alpha t}$.

Основные положения главы I проиллюстрированы на примерах.

Глава II. Естественно возникает вопрос, нельзя ли для нелинейных систем, наряду с частотными критериями абсолютной устойчивости, создать алгебраические критерии абсолютной устойчивости, как в случае линейных систем, с целью выделения области абсолютной устойчивости в пространстве параметров системы и тем самым расширить сферу применения частотных критериев абсолютной устойчивости при проектировании систем управления.

§ I. Алгебраические критерии абсолютной устойчивости одноконтурных нелинейных систем с одним нелинейным элементом. Уравнение движения системы описывается дифференциальным уравнением вида:

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \quad \sigma = c'x, \tag{14}$$

где A – постоянная матрица порядка $n \times n$, b, c – векторы $n \times 1$, $\sigma, \varphi(\sigma)$ –скаляры. Характеристика нелинейного элемента удовлетворяет условию $\nu\sigma^2 \le \varphi(\sigma)\sigma \le \mu\sigma^2$, в частности $\nu = 0$.

Если частотную характеристику линейной части системы представить в виде

$$W(i\omega) = c'(A - i\omega E)^{-1} b = \left.\frac{C(p)}{E(p)}\right|_{p=i\omega} = \frac{A_0(\omega^2) + i\omega A_1(\omega^2)}{B_0(\omega^2) + i\omega B_1(\omega^2)},$$

то из частотного критерия абсолютной устойчивости вытекает следующий алгебраический критерий устойчивости

$$D(\lambda) = (B_0 + \nu A_0)^2 + (\mu - \nu)A_0(B_0 + \nu A_0) + \lambda\{(B_1 + \nu A_1)^2 + (\mu - \nu)A_1(B_1 + \nu A_1) + q(\mu - \nu)[A_0(B_1 + \nu A_1) - A_1(B_0 + \nu A_0)]\} > 0 \quad (0 \le \lambda < \infty), \tag{15}$$

где $\lambda = \omega^2$, $A_0(\lambda)$, $A_1(\lambda)$, $B_0(\lambda)$, $B_1(\lambda)$ – полиномы от λ.

<u>Теорема 1</u>. Для асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы (14) достаточно, чтобы полином $E(p) + \nu C(p) = 0$ имел нули только в левой полуплоскости, с полином $D(\lambda) > 0$ из (15) не имел вещественных корней на положительной полуоси $[0, \infty]$.

Обозначая через $W(i\omega - \alpha) = (\bar{A}_0 + i\omega\bar{A}_1)/(\bar{B}_0 + i\omega\bar{B}_1)$ и $\bar{D}(\lambda)$ полином, полученный из (15) после замены A_0, A_1, B_0, B_1 на $\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{B}_0, \bar{B}_1$ приходим к следующей теореме.

<u>Теорема 2</u>. Чтобы имела место оценка $|x(t)| \le Ce^{-\alpha t}$ для системы (14), достаточно, чтобы полином $E(p-\alpha) + \nu C(p-\alpha) = 0$ имел нули только в левой полуплоскости, а полином $\bar{D}(\lambda) > 0$ не имел вещественных корней на положительной полуоси $[0, \infty]$.

Если $\varphi(\sigma)$ – дифференцируемая функция и удовлетворяет условиям $\nu\sigma^2 \le \varphi(\sigma)\sigma \le \mu\sigma^2$ и $\varphi'(\sigma) \le \alpha_1$ или $\varphi'(\sigma) \ge \alpha_2$ то справедлива следующая теорема.

<u>Теорема 3</u>. Для асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы (14) достаточно, чтобы полином $E(p)$ был гурвицевым, а полином $D_1(\lambda)$ не имел вещественных корней на положительной полуоси. В критических случаях чтобы полином $E(p) + \nu C(p)$ был гурвицевым, а полином $D_2(\lambda) > 0$ – не имел корней на отрезке $[0, \infty]$, за исключением точки $\lambda = \omega_h^2$, где ω_h – полюсы $W(i\omega)$ на мнимой оси.

Полиномы $D_1(\lambda), D_2(\lambda)$ определяются по формуле:

$D_1(\lambda)=(1+\varepsilon\tau\lambda)(A_0B_0+\lambda A_1B_1)+\lambda\vartheta(A_0B_1-A_1B_0)+\alpha\varepsilon\tau\lambda(A_0^2+\lambda A_1^2)+\mu^{-1}(B_0^2+\lambda B_1^2)$,

$D_2(\lambda)=\mu^{-1}(B_0^2+\lambda B_1^2)+(1+\varepsilon\tau\lambda)(A_0B_0+\lambda A_1B_1)+\lambda\vartheta(A_0B_1-A_1B_0)$,

где $\varepsilon=+1$, если $\alpha=\alpha_2$; $\varepsilon=-1$ если $\alpha=\alpha_1$, $\tau\geq 0$, ϑ – произвольная постоянная.

Рассмотрим нелинейную систему, описываемую дифференциальным уравнением вида

$$\dot{X}=AX+B\varphi(\sigma)+f(t),\ \sigma=C'X, \qquad (16)$$

где $f(t)$ – внешнее возмущение, удовлетворяющее условию $|f(t)|<M$, $\nu\leq d\varphi/d\sigma\leq\mu$.

Теорема 4. Для экспоненциальной асимптотической устойчивости в целом вынужденных движений в системе (I6) с декрементом затухания не менее α, достаточно, чтобы полином $E(p-\alpha)+$ $+\nu C(p-c)=0$ был гурвицевым, а полином

$$D(\lambda)=(\bar{B}_0+\nu\bar{D}_0)^2+(\mu-\nu)\bar{A}_0(\bar{B}_0+\nu\bar{A}_0)+\lambda[(\bar{B}_1+\nu\bar{A}_1)^2+(\mu-\nu)\bar{A}_1(\bar{B}_1+\nu\bar{A}_1)]>0$$

не имел корней на отрезке $[0,\infty]$.

Для систем с чистым запаздыванием передаточной функции линейной части $W_*(p)=[C(p),E(p)]e^{-p\tau}$ справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Для абсолютной устойчивости нулевого решения системы с чистым запаздыванием, достаточно, чтобы полином $E(p)$ был гурвицевым, а полином

$$D_1(\lambda)=B_0^2+\lambda B_1^2-(1+\vartheta^2\lambda)(A_0^2+\lambda A_1^2)\mu^2>0,$$

или полином $D_2(\lambda)$, полученный путем аппроксимации $e^{-p\tau}$ рядом Падэ, не имели корней на вещественной полуоси $[0,\infty]$.

Рассмотрим случай, когда функция $\varphi(\sigma)$ кусочно-непрерывна (на любом конечном промежутке имеет лишь конечное число разрывов первого рода), имеет при $\sigma=0$ разрыв непрерывности и удовлетворяет условию $\varphi(\sigma)\sigma\geq 0$ (*) .Пусть кроме этого условия характеристика нелинейного элемента удовлетворяет условиям

$$\varphi(\sigma)\geq\varphi(+0)-\nu\sigma \text{ при } 0<\sigma\leq\varepsilon,\ \varphi(\sigma)\leq\varphi(-0)-\nu\sigma \text{ при } -\varepsilon\leq\sigma<0. \quad (**)$$

Теорема 6. Если передаточная функция линейной части системы содержит дифференцирующие звенья, а характеристика нелинейного элемента удовлетворяет условиям (*),(**), то для асимптотической абсолютной устойчивости стационарного множества достаточно, чтобы полиномы $E(p)=0$, $E(p)-\nu C(p)=0$

были гурвицевыми, а полином

$$D(\lambda)=A_0(B_0-\nu A_0)+\lambda[A_1(B_1-\nu A_1)+\nu(A_0B_1-\nu A_0A_1-A_1B_0+\nu A_0A_1)]\geq 0$$

не имел корней на положительной полуоси $[0,\infty]$ и $E(-\frac{1}{\vartheta})\neq 0$, $E(-\frac{1}{\vartheta})-\nu\Gamma(-\frac{1}{\vartheta})\neq 0$ при $\vartheta>0$.

Теорема 7. Если $W(0)>0$ и характеристика нелинейного элемента удовлетворяет условию (*), то для асимптотической абсолютной устойчивости решения $x=0$ системы (14) достаточно, чтобы полином $E(p)=0$ был гурвицевым, $E(-\frac{1}{\vartheta})\neq 0$ при $\vartheta>0$ и полином

$$D(\lambda)=A_0B_0+\lambda[A_1B_1+\vartheta(A_0B_1-A_1B_0)]\geq 0$$

не имел корней на положительной вещественной полуоси.

Предположим, что линейная часть системы содержит одно интегрирующее звено и представима в виде $W(p)=(\rho/p)+W_1(p)$. Характеристика нелинейного элемента удовлетворяет условию $\varphi(\sigma)=0$ при $\sigma_1\leq\sigma\leq\sigma_2$ $(\sigma_1\leq 0,\ \sigma_2\geq 0,\ \sigma_1<\sigma_2)$; $0<\varphi(\sigma)<\mu_0(\sigma-\sigma_2)$ при $\sigma>\sigma_2$; $\mu_0(\sigma-\sigma_1)<\varphi(\sigma)<0$ при $\sigma<\sigma_1$ $(\mu_0\leq\infty)$. В этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 8. Если характеристика нелинейного элемента удовлетворяет указанным условиям, то для асимптотической устойчивости множества $\Lambda=\{\sigma_1\leq c'x\leq\sigma_2\}$ достаточно, чтобы полином $E(p)=0$ имел один нулевой корень, и все остальные корни лежали в левой полуплоскости и $E(-\frac{1}{\vartheta})\neq 0$ и полином

$$D(\lambda)=(\mu_0^{-1}+\vartheta\rho)(\lambda B_1^2+B_0^2)-A_0\rho B_1+A_1\rho B_0+\vartheta(A_1\rho\lambda B_1+\rho A_0B_0)\geq 0$$

не имел положительных корней на отрезке $[0,\infty]$.

Предположим, что передаточная функция линейной части системы представима в виде $W(p)=\rho/p+\alpha/p^2+W_1(p)$ $\rho>0,\alpha>0$, т.е. содержит два интегрирующих звена. Характеристика нелинейного элемента удовлетворяет условию $\varphi(\sigma)=0$ при $\sigma_1\leq\sigma\leq\sigma_2$; $\varphi(\sigma)\sigma>0$ при $\sigma>\sigma_2$ и $\sigma<\sigma_1$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 9. Если характеристика нелинейного элемента удовлетворяет указанным условиям, полином $E(p)=0$ имеет двукратный нулевой корень, а все остальные корни находятся в левой полуплоскости, то для абсолютной устойчивости стационарного множества $\Lambda=\{x;\sigma_1\leq c'x\leq\sigma_2\}$ достаточно, чтобы полином

$$D(\lambda)=\rho(B_0^2+\lambda B_1^2)-\lambda(A_1B_0-A_0B_1+\rho B_1^2)-\rho B_0^2>0$$

не имел корней на вещественной полуоси.

Рассмотрим случай, когда передаточная функция линейной части содержит консервативное звено и представима в виде $W(p)=[(\alpha p+\beta)/(p^2+\omega_0^2)]+W_1(p)$, где $\alpha>0, \beta\geq 0$; $W_1(p)=[A_0^*+i\omega A_1^*]/[B_0^*+i\omega B_1^*]=C^*(i\omega)/E^*(i\omega)$. Функция $\varphi(\sigma)$ имеет при $\sigma=0$ разрыв первого рода и удовлетворяет неравенствам $\varphi(\sigma)\sigma\geq 0, \varphi(\sigma)\geq\varphi(+0)$ при $0<\sigma<\varepsilon$, $\varphi(\sigma)\leq\varphi(-0)$ при $-\varepsilon<\sigma<0$. В этом случае справедлива

<u>Теорема I0</u>. Для асимптотической устойчивости стационарного множества $\Lambda=\{X; X=A^{-1}b\xi, \ \xi\in[\varphi(-0),\varphi(+0)]\}$ достаточно, чтобы полином $E^*(p)=0$ был гурвицевым, $E^*(-\frac{\beta}{\alpha\omega_0^2})\neq 0$ и полином

$$D(\lambda)=\frac{\beta}{\omega_0^2}(B_0^{*2}+\lambda B_1^{*2})+A_0^*B_0^*+\lambda A_1^*B_1^*-\frac{\lambda\beta}{\alpha\omega_0^2}(A_1^*B_0^*-A_0^*B_1^*)\geq 0$$

не имел корней на отрезке $[0,\infty]$.

Пусть $\varphi(\sigma)$ - характеристика нелинейности типа люфт. Полюсы передаточной функции $W(p)$ расположены в левой полуплоскости. Тогда справедлива следующая

<u>Теорема II</u>. Для абсолютной устойчивости стационарного множества Λ одноконтурной системы с нелинейностью люфт в случае, когда $E(p)=0$ - гурвицевый полином, достаточно, чтобы $E(-\frac{1}{\vartheta})\neq 0$, и полином

$$D(\lambda)=\vartheta B_0(A_0+B_0)+\vartheta\lambda B_1(A_1+B_1)+B_0(A_1+B_1)-B_1(A_0+B_0)\geq 0$$

не имел корней на положительной полуоси.

Когда передаточная функция линейной части системы содержит одно интегрирующее звено, справедлива

<u>Теорема I2</u>. Для абсолютной устойчивости стационарного множества Λ системы (I4) с нелинейностью люфт в случае, когда полином $E(p)=0$ имеет один нулевой корень, а все остальные корни находятся в левой полуплоскости, достаточно, чтобы полином $D(\lambda)=(A_0+B_0)B_0-\lambda(A_1+B_1)B_1>0$ не имел корней на вещественной положительной полуоси.

Пусть $\varphi(\sigma)$ в уравнении (I4) характеристика нелинейности типа упор. Тогда справедлива следующая

<u>Теорема I3</u>. Для абсолютной устойчивости стационарного множества системы (I4) с нелинейностью типа упор в случае, когда $E(p)=0$ - гурвицевый полином, достаточно, чтобы $E(-\frac{1}{\vartheta})\neq 0$ и полином

$$D(\lambda)=B_1(A_0+B_0)-B_0(A_1+B_1)+\vartheta[\lambda B_1(B_1+A_1)+B_0(A_0+B_0)]\geq 0$$

не имел корней на положительной полуоси.

Когда линейная часть системы содержит одно интегрирующее звено, т.е. $W(p)=\frac{C(p)}{pE^*(p)}=\frac{A_0+pA_1}{p(B_0^*+pB_1^*)}=\frac{C(p)}{E(p)}$ справедлива

Теорема I4. Для абсолютной устойчивости стационарного множества Λ системы (I4) с нелинейностью типа упор в случае, когда $E^*(p)=0$ – гурвицевый полином, достаточно, чтобы

$$D(\lambda)=B_1^*(\lambda B_1^*-A_0)+B_0^*(A_1+B_0^*)>0$$

не имел корней на положительной полуоси.

Наконец, рассмотрим случай, когда функция $\varphi(\sigma)$ – характеристика нелинейности типа петля гистерезиса с зоной нечувствительности. Справедлива следующая

Теорема I5. Для абсолютной устойчивости стационарного множества системы (I4) с нелинейностью типа петля гистерезиса, достаточно, чтобы полином $E(p)=0$ был гурвицевым и полином

$$D(\lambda)=\mu_0^{-1}(B_0^2+\lambda B_1^2)+A_0B_0+\lambda A_1B_1\pm \vartheta\lambda(A_1B_0-A_0B_1)>0$$

не имел корней на положительной полуоси.

§ 2. Выделение области абсолютной устойчивости в пространстве параметров одноконтурной системы. Анализ полученных результатов в § I показывает, что в условиях теорем всюду требуется, чтобы некоторый полином, определяемый линейной комбинацией $E(p)$, $C(p)$ и в общем случае линейной комбинацией $E(p-\alpha)$, $C(p-\alpha)$ был гурвицевым, т.е. имел нули в открытой левой полуплоскости корней, а полином $D(\lambda)$ не имел вещественных корней на отрезке $[0,\infty]$. В случае разрывных нелинейностей еще требуется, чтобы некоторое отрицательное число $-\gamma<0$ (равно $-\frac{1}{\vartheta}$ или $-\frac{\beta}{\alpha\omega_0^2}$) не было корнем полинома $E(p)$ или полинома, являющегося линейной комбинацией $E(p)$ и $C(p)$.

Таким образом, для выделения области абсолютной устойчивости в пространстве параметров системы, необходимо решать следующие задачи: I. Найти множество R_1, где полином $F(p)=\alpha_1E(p-\alpha)+\alpha_2C(p-\alpha)$ гурвицевый полином.

Найти гиперповерхность R_2, определяемую по формуле $F(-\gamma)=0$.

3. Найти множество R_3 в пространстве параметров системы, где полином $D(\lambda)>0$ не имеет корней на отрезке $[0,\infty]$.

Если множества R_1, R_2, R_3 известны, то область абсолютной устойчивости R в пространстве параметров системы есть $R=(R_1 \cap R_3)\setminus R_2$. Определение областей R_1 и R_2 не представляет трудности. В настоящее время для определения множества R_3 существует два метода. Первый метод, предложенный автором, опирается на теорему Штурма о числе корней полинома на отрезке $[0,\infty]$, второй метод, предложенный Д.Шиляком по схеме Рауса.

Раскрывая скобки, полином $D(\lambda)$ можно представить в виде

$$D(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\dots+a_{n-1}\lambda+a_n>0 \quad (0\le\lambda<\infty), \tag{I7}$$

где $a_i=a_i(\vec{T})$ $i=0,1,\dots,n$, $T'=\|T_1,\dots,T_N\|$, T_i – параметры системы.

Условие (I7) выполняется, если корни полинома $D(\lambda)$ не лежат на положительной части вещественной полуоси и выполняются условия $a_0>0$, $a_n>0$.

Таким образом, область нахождения корней полинома $D(\lambda)$ значительно шире гурвицевой области. Системы неравенств, связывающие коэффициенты полинома $D(\lambda)$, позволяющего определить область абсолютной устойчивости R_3 в пространстве параметров системы, можно получить применяя теорему Штурма к полиному $D(\lambda)$. Действительно, пусть полиномы Штурма имеют вид

$$\begin{aligned}
D(\lambda)&=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\dots+a_{n-1}\lambda+a_n,\\
D_1(\lambda)&=b_0\lambda^{n-1}+b_1\lambda^{n-2}+\dots+b_{n-2}\lambda+b_{n-1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
D_{n-1}(\lambda)&=d_0\lambda+d_1,\\
D_n(\lambda)&=e_0.
\end{aligned}$$

Обозначая через $V(0)$ и $V(\infty)$ число перемен знаков полиномов в системах Штурма соответственно при $\lambda=0$ и $\lambda=\infty$, приходим к следующей теореме.

Теорема. Множество R_3 в пространстве параметров системы, где полином $D(\lambda)>0$ не имеет корней на положительной полуоси, определяется как объединение множеств $\bigcup_i S_i=R_3$, каждое S_i из которых определяется системами неравенств

$$S_i:\begin{cases} a_n>0,\ b_{n-1}\gtrless 0,\ \dots,\ d_1\gtrless 0,\ e_0\gtrless 0 & \text{ч.п.з. } V(0)\\ a_0>0,\ b_0>0,\ \dots,\ d_0\gtrless 0,\ e_0\gtrless 0 & \text{ч.п.з. } V(\infty)\end{cases}$$

удовлетворяющие условию $V(0)-V(\infty)=0$.

Как следует из условия теоремы, границы области абсолютной устойчивости в пространстве параметров системы определяются гиперповерхностями:

$$a_n(T)=0,\quad b_{n-1}(T)=0,\ \ldots,\ d_1(T)=0,\ e_0(T)=0,$$
$$a_0(T)=0,\quad b_0(T)=0,\ \ldots,\ d_0(T)=0.$$

Эти гиперповерхности разбивают пространство параметров на несколько подобластей. Среди этих подобластей можно найти такие подобласти, для которых разность $V(0)-V(\infty)=0$; эти подобласти и есть S_i.

Основные положения этого параграфа проиллюстрированы на нескольких классических примерах.

§ 3. Выделение области абсолютной устойчивости в пространстве параметров многомерной системы. Элементы матрицы $W(p)$ можно представить в виде

$$w_{jk}(p)=[a_0^{(jk)}p^n+a_1^{(jk)}p^{m-1}+\cdots+a_m^{(jk)}]/[b_0^{(jk)}p^l+b_1^{(jk)}p^{l-1}+\cdots+b_l^{(jk)}].$$

Подставляя значения $w_{jk}(i\omega)$ в частотный критерий абсолютной устойчивости $\Pi(i\omega)>0$ нетрудно убедиться, что главные миноры матрицы $\Pi(i\omega)$ имеют вид: $\Delta^{(1)}(\lambda)=\frac{D^{(1)}(\lambda)}{|*|^2}$, $\Delta^{(2)}(\lambda)=\frac{D^{(2)}(\lambda)}{|*|^2|**|^2},\ldots,\Delta^{(n)}(\lambda)=\frac{D^{(n)}(\lambda)}{|*|^2\ldots|*\cdots*|^2}$, где $|*\cdots*|^2$ – квадрат модуля некоторой комплексной величины.

Из положительной определенности матрицы $\Pi(i\omega)$ вытекает положительность всех главных миноров матрицы, т.е.

$$\Delta^{(i)}(\lambda)>0\quad i=\overline{1,n}\quad \text{либо}\quad D^{(k)}(\lambda)>0\quad k=\overline{1,n}.$$

Систему неравенств, позволяющих определить область абсолютной устойчивости в пространстве параметров системы, можно получить, применяя методику, изложенную в § 2. Действительно, пусть $D^{(k)}(\lambda)$ имеет вид $D^{(k)}(\lambda)=a_0^{(k)}\lambda^m+a_1^{(k)}\lambda^{m-1}+\cdots+a_{m-1}^{(k)}\lambda+a_m^{(k)}$. Тогда на основе рекуррентной формулы можно составить систему Штурма вида:

$$D^{(k)}(\lambda)=a_0^{(k)}\lambda^m+a_1^{(k)}\lambda^{m-1}+\cdots+a_{m-1}^{(k)}\lambda+a_m^{(k)},$$
$$D_1^{(k)}(\lambda)=b_0^{(k)}\lambda^{m-1}+b_1^{(k)}\lambda^{m-2}+\cdots+b_{m-2}^{(k)}\lambda+b_{m-1}^{(k)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$D_{m-1}^{(k)}(\lambda)=e_0^{(k)}\lambda+e_1^{(k)},$$
$$D_m^{(k)}(\lambda)=f_0^{(k)}.$$

Обозначая через $V^{(k)}(0)$ число перемен знаков в ряде коэффициентов $a_m^{(k)}, b_{m-1}^{(k)}, \ldots, e_1^{(k)}, f_0^{(k)}$, а через $V^{(k)}(\infty)$ число перемен знаков в ряде коэффициентов $a_0^{(k)}, b_0^{(k)}, \ldots, e_0^{(k)}, f_0^{(k)}$ приходим к следующей теореме.

Теорема. Для абсолютной устойчивости положения равновесия многомерной нелинейной системы с непрерывными нелинейными элементами достаточно, чтобы полиномы $E_{jh}(p) = b_0^{(jh)} p^{\ell} + b_1^{(jh)} p^{\ell-1} + \cdots + b_\ell^{(jh)} = 0$ $j,h = \overline{1,n}$ были гурвицевыми и число перемен знаков в указанных рядах удовлетворяли условию $V^{(k)}(0) - V^{(k)}(\infty) = 0$ для всех $k = \overline{1,n}$ $(a_0^{(k)} > 0,\ a_m^{(k)} > 0 \quad k = \overline{1,n})$.

Пусть S_{jh} – множество, где полином $E_{jh}(p) = 0$ – гурвицевый полином, а S_k – множество, где $D^{(k)}(\lambda) > 0$ $0 \leq \lambda < \infty$; тогда область абсолютной устойчивости $R = (\bigcap_{j,h} S_{jh}) \cap (\bigcap_k S_k)$.

Аналогичным путем получены алгебраические критерии абсолютной устойчивости двухмерных систем с несколькими нелинейными элементами, одноконтурных систем с несколькими нелинейными элементами, нелинейных систем с несколькими нелинейными элементами с неединственным положением равновесия.

Глава Ш. При фиксированных значениях произвольных постоянных можно выделить некоторое подмножество $\bar{R}$ области абсолютной устойчивости R, определяемое частотным критерием абсолютной устойчивости $\bar{R} \subset R$. Возникает задача: Нельзя ли найти такое значение произвольной постоянной, при котором область, выделяемая по алгоритму, приведенному в Гл.П, совпадает с областью R.

§ I. Решение этой задачи тесно связано с обобщением частотного критерия В.М.Попова. Это обобщение состоит в том, что произвольное действительное число q, фигурирующее в частотном критерии устойчивости является некоторой функцией от конструктивных параметров системы $T = \| T_1, \ldots, T_N, \mu \|$. Тогда алгебраический критерий абсолютной устойчивости имеет вид:

$$[a_0(T) + q(T) a_1(T)]\lambda^n + [b_0(T) + q(T) b_1(T)]\lambda^{n-1} + \cdots + [c_0(T) + q(T) c_1(T)]\lambda + d_0 > 0 \quad (18)$$

Когда $q(T) \to 0$ (условие устойчивости вынужденных движений) из (18) имеем

$$a_0(T)\lambda^n + b_0(T)\lambda^{n-1} + \cdots + c_0(T)\lambda + d_0(T) > 0.$$

Когда $q(T) \to \infty$ из (18) имеем

$$a_1(T)\lambda^n + b_1(T)\lambda^{n-1} + \dots + c_1(T) > 0.$$

Область абсолютной устойчивости, соответствующая значениям функций $q(T)\to 0$ и $q(T)\to\infty$ в пространстве параметров можно выделить, используя методику, изложенную в Гл.II. В дальнейшем эти множества обозначим Ω_0 и Ω_∞.

В случае, когда $q(T)\neq 0$ и $q(T)\neq\infty$ после замены $q(T) = -\frac{a_0(T)}{a_1(T)} + \frac{\varepsilon(T)}{a_1(T)}$ из (I8) имеем

$$\varepsilon(T)\lambda^n + [b_0'(T) + \varepsilon(T)b_1'(T)]\lambda^{n-1} + \dots + [c_0'(T) + \varepsilon(T)c_1'(T)]\lambda + d_0(T) > 0,$$

где $b_0'(T) = [a_1 b_0 - a_0 b_1]/a_1$, $b_1'(T) = b_1(T)/a_1(T)$, .., $c_0'(T) = [a_1 c_0 - a_0 c_1]/a_1$, $c_1'(T) = c_1(T)/a_1(T)$.

<u>Теорема</u>. Область абсолютной устойчивости в пространстве параметров системы, доставляемая частотным критерием абсолютной устойчивости, определяется по формуле

$$R = \{\Sigma_*(T)\ \ 0, D_*[\Sigma_*(T), T] > 0\} \cup \Omega_0 \cup \Omega_\infty.$$

В условии теоремы $D_*[\Sigma_*(T), T]$, $\Sigma_*(T)$ – значения полинома $D(\lambda)$ и $\varepsilon(T)$, найденные из условия $\min\limits_{\varepsilon(T)}\min\limits_{*} D(\lambda)$.

Произвольное действительное число q можно считать параметром системы. В тех случаях, когда область абсолютной устойчивости положения равновесия рассматривается в плоскости двух действительных параметров системы, направление сдвига линии границ, при изменении произвольного действительного числа q, можно найти построением огибающей к однопараметрическому семейству уравнений границ. Уравнение огибающей определяется путем исключения q из системы уравнений типа

$$e_i(q, T_1, T_2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial q} e_i(q, T_1, T_2) = 0.$$

§ 2. Пусть в пространстве параметров системы задана некоторая точка T_*, выбранная из конструктивных соображений проектируемой системы. Предположим, что точка T_* лежит в области Ω_i^*. Ставится задача: Найти такое значение q, чтобы область Ω_i^*, содержащая T_*, была наибольшей в смысле выбранной целевой функции.

Для решения задачи рассмотрим сферу с центром в точке T_*, вписанную в область Ω_i^*, определяемую формулой:

$$\sum_{i=1}^{l} (T_i - T_i^*)^2 + (\mu - \mu^*)^2 = R^2.$$

Площадь поверхности сферы будет пропорциональна квадрату радиуса и будет являться некоторой функцией от параметров системы, равной $S(T)=\alpha\left[\sum_{i=1}^{N}(T_i-T_i^*)^2+(\mu-\mu^*)^2\right]$. Тогда определение произвольного параметра в частотных критериях устойчивости сводится к решению задач нелинейного программирования с сепарабельными функциями цели следующего содержания: Найти значения параметров T и q, доставляющих функций цели

$$\max_T S(T)\sim\max_T\left[\sum_{i=1}^{N}(T_i-T_i^*)^2+(\mu-\mu^*)^2\right]$$

при условии неравенств, составленных из уравнений границ Ω_i^* а также $T_i\geq 0\ \ i=\overline{1,N}\ ,\ \mu>0$ – если конструктивные параметры системы принимают только положительные значения.

Приведены решения задачи как для одноконтурных, так и для многомерных нелинейных систем управления.

§ 3. На практике часто требуется найти не только области абсолютной устойчивости, а области, где некоторый квадратичный функционал от фазовых переменных принимал бы значение меньше некоторой константы.

Рассмотрим систему, описываемую дифференциальным уравнением вида

$$\dot{X}=AX+b\varphi(\sigma)\ ,\ \sigma=C'X\ ,\ 0\leq\sigma\varphi(\sigma)\leq K\sigma^2\leq\frac{K}{1-\beta}\sigma^2\ (0<\beta<1),\quad (I9)$$

где A – гурвицева матрица порядка $n\times n$, b,C,X – векторы порядка $n\times 1$, $\varphi(\sigma)$ – скаляр. Характеристика нелинейного элемента, дифференцируемая в каждой точке функции, удовлетворяющая условиям $d\varphi/d\sigma\leq\alpha_1$ или $d\varphi/d\sigma\geq\alpha_2$.

<u>Теорема I</u>. Для системы (I9) в области пространства параметров $\bar{\bar{\Omega}}=\{C_*(X(0))>0\}\cap\bar{\Omega}$ имеет место интегральная квадратичная оценка $J=\int_0^\infty\varphi^2(t)dt\leq\frac{K}{\beta}C_*(X(0))$.

Множество $\bar{\Omega}=\{T;(A_0B_0+\lambda A_1B_1-\lambda\vartheta_*(A_1B_0-A_0B_1)+\frac{1-\beta}{K}(B_0^2+\lambda B_1^2)>0$ $0\leq\lambda<\infty\}\cap\Omega$, где множество $\Omega=\{T\ ;\ E(p)=0$ – гурвицевый полином$\}$. Функция $C_*(X(0))=R_2+(R_1+R_3)\vartheta_*+\vartheta_*^2R_4$, $\vartheta_*=-[R_1+R_3]/2R_4$, $R_1=\int_0^{\sigma(0)}\varphi(\sigma)d\sigma$, $R_2=\frac{1}{4}\int_0^\infty[C'e^{At}X(0)]^2dt$, $R_3=\frac{1}{2}\int_0^\infty C'e^{At}X(0)C'Ae^{At}X(0)dt$,

$R_4=\frac{1}{4}\int_0^\infty[C'Ae^{At}X(0)]^2dt$. Теорема I остается справедливой, когда $\varphi(\sigma)$ непрерывная, но недифференцируемая функция.

<u>Теорема 2</u>. Для системы (I9) в области пространства парамет-

ров $\Omega=\{\tau\,;\ D(\lambda)>0,\ 0\le\lambda<\infty\,;\ E(p)=0$ гурвицевый полином$\}$ имеет место интегральная квадратичная оценка $J=\int_0^\infty[\gamma_0\varphi^2+\varphi\sum_{i=1}^n\gamma_i x_i+$ $+\gamma_{n+1}\varphi\dot\varphi+\gamma_{n+2}\varphi(\sigma)\int_t^\infty(\alpha(\tau-t)X(\tau)+\beta(\tau-t)\varphi(\tau))d\tau]dt\le C(\vartheta_*,\delta_*,x(0))$.

Где γ_i $i=0,1,\dots,n+2$ – известные величины, $C(\vartheta_*,\delta_*,x(0))$ – известная функция, определяемая через параметры системы и начальное отклонение.

Глава IУ. Пусть в системе автоматического управления имеются m – нелинейных элементов и столько же линейных блоков и уравнения движения системы в операторной форме имеют вид

$$\sigma_1=-W_1(p)\varphi_1(\sigma_m)\ ,\ \sigma_i=W_i(p)\varphi_i(\sigma_{i-1})\quad i=2,\dots,m, \tag{20}$$

где $W_i(p)=B_i(p)/C_i(p)$ $i=\overline{1,m}$ – передаточные функции линейных динамических блоков. Причем $B_i(p)=b_0^{(i)}p^{q_i}+b_1^{(i)}p^{q_i-1}+\dots+b_{q_i-1}^{(i)}p+b_{q_i}^{(i)}$, $C_i(p)=p^{s_i}+c_1^{(i)}p^{s_i-1}+\dots+c_{s_i-1}^{(i)}p+c_{s_i}^{(i)}$. Предположим, что линейные динамические звенья устойчивы, т.е. $\Delta_1^{(i)}>0,\Delta_2^{(i)}>0,\dots,\Delta_{s_i-1}^{(i)}>0,\Delta_{s_i}^{(i)}>0$, где $\Delta_k^{(i)}$ $k=\overline{1,s_i}$ – определители Гурвица и характеристики нелинейных элементов удовлетворяют условиям $0\le|\varphi_1(\sigma_m)|\le k_1|\sigma_m|$, $0\le|\varphi_i(\sigma_{i-1})|\le k_i|\sigma_{i-1}|$ $i=\overline{2,m}$. Дифференциальное уравнение движения системы (20) имеет вид

$$\dot X_i=A_iX_i+b_0^{(i)}\varphi_i e_i\quad i=\overline{1,m}, \tag{21}$$

где X_i – вектор порядка $S_i\times 1$.

<u>Теорема I</u>. Для того, чтобы система автоматического управления, описываемая дифференциальным уравнением вида (21) или операторным уравнением (20) была устойчива, достаточно, чтобы матрица

$$C=\begin{Vmatrix} -\dfrac{\mu_1}{2\lambda_{12}} & 0 & \dots & \dfrac{2k_1^2(b_0^{(1)})^2\sum_{k=1}^{s_1}(n_{ks_1}^{(1)})^2}{\mu_1\lambda_{m1}} \\ \dfrac{2k_2^2(b_0^{(2)})^2\sum_{k=1}^{s_2}(n_{ks_2}^{(2)})^2}{\mu_2\lambda_{11}} & -\dfrac{\mu_2}{2\lambda_{22}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dfrac{2k_m(b_0^{(m)})^2\sum_{k=1}^{s_m}(n_{ks_m}^{(m)})^2}{\mu_m\lambda_{m1}} & -\dfrac{\mu_m}{2\lambda_{m2}} \end{Vmatrix}$$

была устойчива, т.е. полином $|C-pE|=0$ был гурвицевым, где E – единичная матрица порядка $m\times n$.

В условии теоремы $\mu_i=\min(\Delta_1^{(i)},\Delta_2^{(i)},\dots,\Delta_{s_i-1}^{(i)},\Delta_{s_i}^{(i)})$, матрица $N_i=\|n_{kj}\|$ решение матричного уравнения $A_i'N_i+N_iA_i=-D_i$, где $D_i=diag\{\Delta_1^{(i)},\dots,\Delta_{s_i}^{(i)}\}$, λ_{i1} и λ_{i2} –

наименьшие и наибольшие корни полинома $|N_i - pE_i| = 0$.

Теперь рассмотрим случай, когда на вход каждого линейного динамического блока поступает сигнал с выхода других линейных динамических блоков.

Уравнения движения системы в операторной форме имеют вид:

$$\sigma_i = W_i(p)\Big(\sum_{\substack{k=1\\ i\neq k}}^{m} \varphi_k^{(i)}(\sigma_k)\Big) \quad i=\overline{1,m}, \quad |\varphi_k^{(i)}(\sigma_k)| \leq \beta_k^{(i)}|\sigma_k| \quad k=\overline{1,m}. \tag{22}$$

В этом случае справедлива

Теорема 2. Для асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы (22) достаточно, чтобы матрица $C = \| c_{ik} \|$, где

$$c_{ik} = \begin{cases} -\dfrac{\mu_i}{2\lambda_{i2}} & \text{при } i = k, \\ \dfrac{2}{\mu_i \lambda_{k1}} (b_0^{(i)})^2 \sum\limits_{j=1}^{s_i} (n_{js_i}^{(i)})^2 \sum\limits_{\substack{q=1\\ q\neq i}}^{m} (\beta_q^{(i)})^2 & \text{при } i \neq k, \end{cases}$$

была устойчивой матрицей.

Для двухмерных систем с перекрестными нелинейными элементами, описываемых уравнениями в операторной форме

$$\sigma_1 = -W_{11}(p)[\varphi_{21}(\sigma_2) + \varphi_{11}(\sigma_1)], \quad \sigma_2 = -W_{22}(p)[\varphi_{12}(\sigma_1) + \varphi_{22}(\sigma_2)] \tag{23}$$

справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Для асимптотической устойчивости в целом положения равновесия системы (23) достаточно, чтобы выполнялись неравенства:

$$\frac{\mu_1'}{2\lambda_{12}} + \frac{\mu_2'}{2\lambda_{22}} > 0, \quad \mu_1' > 0, \quad \mu_2' > 0,$$

$$\frac{\mu_1'\mu_2'}{4\lambda_{12}\lambda_{22}} - \frac{4K_{12}^2 K_{21}^2 (b_0^{(1)})^2 (b_0^{(2)})^2}{\mu_1'\mu_2'\lambda_{21}\lambda_{11}} \Big(\sum_{j=1}^{s_1} (n_{js_1}^{(1)})^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^{s_2} (n_{js_2}^{(2)})^2 > 0.$$

Наконец, рассмотрим систему, описываемую дифференциальным уравнением (3), когда характеристики нелинейных элементов удовлетворяют условиям $|\varphi_{ij}(\sigma_i)| \leq \mu_{ij}|\sigma_i| \quad i,j = 1,2$. В этом случае справедлива

Теорема 4. Для асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы (3) достаточно, чтобы полином

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{\mu_1'}{2\lambda_{12}} - p & 0 & \dfrac{\alpha}{\mu_1'\lambda_{31}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{\mu_2'}{2\lambda_{22}} - p & 0 & \dfrac{\beta}{\mu_2'\lambda_{41}} \\ 0 & \dfrac{\gamma}{2\lambda_{22}} & -\dfrac{\mu_3'}{2\lambda_{32}} - p & \dfrac{\delta}{\mu_3\lambda_{41}} \\ \dfrac{\omega}{\mu_4\lambda_{11}} & 0 & \dfrac{\theta}{\mu_4\lambda_{31}} & -\dfrac{\mu_4}{2\lambda_{12}} - p \end{vmatrix} = 0$$

был гурвицевым.

§ 2. В ряде случаев на поведение системы управления существенное влияние оказывает источник энергии, особенно на подвижнчх объектах и в САУ большой мощности. Одна и та же система автоматического управления становится неработоспособной, если она подключается к другому источнику питания, хотя вполне работоспособна при исходном источнике питания. Причина такого поведения связана с тем, что в проектировании систем автоматического управления зачастую де.ается пренебрежение системами дифференциальных уравнений, описывающих динамику источника питания, считая источник питания неограниченной мощности.

Уравнения возмущенного движения комплекса ИП и САУ в операторной форм имеют вид

$$x_1+(\mathcal{L}p+\gamma_1)y_1+\gamma_2\theta_1+\beta\vartheta_1 y_1=0,\quad \kappa_1 W_1(p)x_1=\theta_1,\quad x_1=W_2(p)y_1. \tag{24}$$

Структурная схема такой системы приведена на рис.3,4.

<u>Теорема I</u>. Для системы (24) параметры установившегося движения, относительно переменной $x_1=x_0+A\sin\omega_* t+B\cos 2(\omega_* \cdot +\varphi)$ определяются по формуле $x_0=-\dfrac{Re[W_5(i\omega_*)\overline{W}_6(i\omega_*)]}{\kappa_1\beta|W_6(i\omega_*)|^2}$,

$$A=\sqrt{\frac{2B}{\beta|\kappa_1 W_1(i\omega_*)||W_3(i\omega_*)|}},\quad B=\frac{x_0+\gamma_2\theta_0+\gamma_1 y_0+\beta y_0\theta_0}{\cos[\varphi_1(\omega_*)-\varphi_3(\omega_*)]},$$

а частота ω_* - из условия $Im[W_5(i\omega_*)\overline{W}_6(i\omega_*)]=0$.

Где $W_3(i\omega)=1/W_1(i\omega)$, $W_4(i\omega)=\gamma_1+i\omega\mathcal{L}$, $W_5(i\omega)=1+\gamma_2\kappa_1 W_1(i\omega)+W_3(i\omega)W_4(i\omega)$, $\overline{W}_6(i\omega)=W_1(0)W_3(i\omega)+W_3(0)W_1(i\omega)$. По известной x_1 нетрудно определить y_1 и θ_1.

Дифференциальное уравнение возмущенного движения системы (24) имеет вид: $\dot{z}=Az+Z(z)$, где $A=\|a_{ij}\|_1^n$, z вектор размерности $n\times 1$, $Z'(z)=\|0,\ldots,\sum_i\sum_j c_{ij}z_i z_j\|$,Обозначим через $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0,\ldots,\Delta_n>0$ определители Гурвица для полинома $|A-pE|=0$ и определим матрицу $B=\|b_{ij}\|_1^n$ из матричного уравнения $A'B+BA=D$ где $D=diag\{-\Delta_1,-\Delta_2,\ldots,-\Delta_n\}$. Тогда справедлива следующая теорема.

<u>Теорема 2.</u> Для системы (24) начало координат $z=0$ является точкой притяжения, если фазовые траектории лежат в об-

ласти

$$\mu_1 < b_{1n} z_1 + b_{2n} z_2 + \dots + b_{nn} z_n < \mu_2 ,$$

где $\mu_1 < 0$ и $\mu_2 > 0$ – известные постоянные.

Глава V. При определении устойчивости систем автоматического управления необходимо учитывать влияние производственных допусков на элементы и узлы системы; а также случайные условия настройки, изменения окружающей среды, технологического процесса и др. Поэтому целесообразно определить вероятность абсолютной устойчивости системы. Конечная цель определения вероятности абсолютной устойчивости – оценить надежность работы системы.

§ I. Если линейная часть системы содержит случайные параметры, то можно рассмотреть некоторую совокупность обратных амплитудно-фазовых характеристик. Чтобы получить область расположения семейства случайных ОАФХ, соответствующих заданной вероятности P нахождения модуля ОАФХ, внутри этой области, целесообразно определить плотность распределения модуля.

Переход от частотной характеристики линейной части системы к обратной вызван тем, что во многих случаях мнимая и действительная части ОАФХ являются многочленами от случайных параметров системы.

Обратную амплитудно-фазовую характеристику линейной части системы можно представить в виде

$$\hat{Y}(i\omega) = A(\omega) e^{i\varphi(\omega)} \hat{\gamma} \Pi(1+p\hat{T}_i)\Pi(\hat{T}_j p-1)\Pi(\hat{T}_k^2 p^2 + 2\hat{\xi}_k \hat{T}_k p+1)\Pi(\hat{T}_u^2 p^2+1)\Big|_{p=i\omega} , \quad (25)$$

где $\hat{\gamma}$, $\hat{T}_i$, $\hat{T}_j$, $\hat{T}_k$, $\hat{\xi}_k$, $\hat{T}_u$ – случайные параметры. Считаем, что совместная плотность распределения или числовые характеристики случайных параметров известны.

Представим ОАФХ в виде суммы

$$\hat{Y}(i\omega) = \bar{Y}(i\omega) + |\mathring{Y}(i\omega)| e^{i\hat{\varphi}(\omega)} , \quad (26)$$

где $\bar{Y}(i\omega)$ – математическое ожидание ОАФХ, $\hat{\varphi}(\omega)$ – случайная фаза, $|\mathring{Y}(i\omega)|$ – модуль центрированной ОАФХ.

Если полагать, что случайная фаза $\hat{\varphi}(\omega)$ распределена равномерно, то вероятность нахождения $\mathring{Y}(i\omega)$ P внутри круга радиусом R, равна вероятности P нахождения модуля $|\mathring{Y}(i\omega)|$ на отрезке $0 \le |\mathring{Y}(i\omega)| \le R$ (рис.5).

Из (25) и (26) нетрудно установить, что

$$|\mathring{Y}(i\omega)| = A(\omega)\sqrt{\hat{X}}, \quad \hat{X} = [\hat{R}e_\tau - M[\hat{R}e_\tau]]^2 + [\hat{I}m_\tau - M[\hat{I}m_\tau]]^2,$$

где $\hat{R}e_\tau$, $\hat{I}m_\tau$ – действительная и мнимая части сомножителя в (25), содержащие случайные параметры. Для ОАФХ вида (25) можно определить центральные моменты $\hat{X}$ т.е. $\mu_2[\mathring{X}]$, $\mu_3[\mathring{X}], \ldots, \mu_n[\mathring{X}]$ и $M[\hat{X}] = \bar{X}$.

Тогда плотность распределения центрированного модуля ОАФХ можно представить в виде ряда

$$f_{|\mathring{Y}|}(\omega, y) = \frac{2y}{A^2}\left\{\frac{1}{\sigma_x}\left[\varphi(z) - \frac{1}{3!}\frac{\mu_3[\mathring{X}]}{\sigma_x^3}\varphi^{(3)}(z) + \frac{1}{4!}\left(\frac{\mu_4[\mathring{X}]}{\sigma_x^4} - 3\right)\varphi^{(4)}(z) - \cdots\right]\right\},$$

где $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}z^2)$, $z = \dfrac{\frac{y^2}{A^2} - \bar{X}}{\sigma_x}$.

Вероятность P нахождения ОАФХ внутри круга с радиусом R определяется по формуле $P = P(0 \le |\mathring{Y}(i\omega)| < R) = \int_0^R f_{|\mathring{Y}|}dy = F(\omega, R)$.

При известной $\bar{Y}(i\omega)$ и $R = F^{-1}(\omega, P)$ нетрудно установить положение границ (как огибающих к окружностям рассеивания) к семейству случайных ОАФХ и определить вероятность абсолютной устойчивости системы (рис.6).

Если определена область абсолютной устойчивости Ω в пространстве случайных параметров системы (методом, предложенным во второй главе) и известны плотности распределения случайных параметров, то $P = \int\limits_\Omega \cdots \int f(\hat{\gamma}, \hat{T}_1, \ldots, \hat{T}_n)\, d\hat{\gamma}\, d\hat{T}_1 \ldots d\hat{T}_n$,
где $f(\hat{\gamma}, \hat{T}_1, \ldots, \hat{T}_n)$ – плотность распределения системы $(\hat{\gamma}, \hat{T}_1, \ldots, \hat{T}_n)$.

Когда часть параметров системы случайные, заданные динамические свойства системы достигаются путем выбора неслучайных параметров при заданной вероятности устойчивости системы. Нетрудно убедиться, чтобы полином $D(s)$ не имел корней на отрезке $[0, \infty]$, достаточно, чтобы функция Михайлова $M_н(is) = D(is) = a_0(is)^n + a_1(is)^{n-1} + \ldots + a_n = A + iB$ проходила последовательно n квадрантов.

Тогда действительная и мнимая части функции Михайлова минимальной по модулю, как огибающие к окружности рассеивания с радиусом $R = \alpha\sigma(s)$, определяются по формулам

$$E(s, T_1, T_2) = A - \frac{\alpha\sigma(\alpha\sigma\dot{A} + \dot{B}\sqrt{\dot{A}^2 + \dot{B}^2 - \alpha^2\dot{\sigma}^2})}{\dot{A}^2 + \dot{B}^2},$$

$$F(s,T_1,T_2)=B-\frac{\alpha\sigma(\alpha\dot\sigma\dot B-\dot A\sqrt{\dot A^2+\dot b-\alpha^2\dot\sigma^2}}{\dot A^2+\dot B^2},$$

где $\dot\sigma$, $\dot B$, $\dot A$ – производные от σ, B, A по s, $\sigma^2(s)$ – дисперсия функции Михайлова.

Условия $E(s,T_1,T_2)=0$ и $F(s,T_1,T_2)=0$ (рис.7) можно использовать для построения области абсолютной устойчивости в плоскости двух неслучайных параметров T_1 и T_2 при $\alpha=1;2;3$.

§ 2. Рассмотрим нелинейную систему, описываемую дифференциальным уравнением вида

$$\dot X=AX+B\varphi(\sigma)+ef(t),\ \sigma=C^*X, \tag{27}$$

где A – устойчивая матрица порядка $n\times n$; B, e, C – векторы $n\times 1$, $f(t), \varphi(\sigma)$ – скаляры. Причем $f(t)$ – случайная стационарная функция, а элементы матрицы A, векторов B, e, C могут быть случайными величинами. Необходимо найти вероятность устойчивости системы по математическому ожиданию и определить числовые характеристики фазовых координат. После применения метода статистической линеаризации из (27) получим следующие дифференциальные уравнения относительно математического ожидания m_x и высокочастотной центрированной составляющей X°:

$$\dot m_x(t)=Am_x(t)+BK_0C^*m_x(t)+em_f(t),\ \dot X^\circ(t)=AX^\circ+BK_1C^*X^\circ+ef^\circ(t). \tag{28}$$

Тогда математическое ожидание m_x в установившемся режиме определяется из системы нелинейных алгебраических уравнений $Am_x+BK_0(m_x,\sigma_x)C^*m_x+em_f=0$. Решая систему уравнений, определяем $m_x=\alpha(\hat T_1,\hat T_2,\ldots,\hat T_N)$, где α – вектор порядка $n\times 1$. На основе уравнений (28) определяем дифференциальное уравнение возмущенного движения для ма.ых отклонений от α, равное

$$\dot z(t)=[A+BK_0(\alpha,\sigma_x)C^*+BC^*\alpha\beta^*]z(t), \tag{29}$$

где $z(t)=m_x(t)-\alpha$, $\beta=grad\,K_0(m_x,\sigma_x)|_{m_x=\alpha}$

Из уравнения (29) получим условие устойчивости по математическому ожиданию в виде гурвицевости полинома:

$$|A+BK_0(\alpha,\sigma_x)C^*+BC^*\alpha\beta^*-pE|=0. \tag{30}$$

Из уравнений (28) следует, что $X^\circ=[pE-A-BK_1C^*]^{-1}ef^\circ$. Тогда как известно из статистической динамики линейных сис-

тем
$$C_x^2 = 2\int_0^{\infty} |[pE - A - B\kappa_1 c^*]^{-1} e|^2 S_f(\omega)d\omega. \quad (31)$$

При известной спектральной плотности $S_f(\omega)$, вычисляя несобственный интеграл (31), определяем $\sigma_x = \beta(\hat{T}_1, \ldots, \hat{T}_N)$.

Если параметры системы сохраняют случайный характер от процесса к процессу, то найденное математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение являются случайными функциями от случайных параметров. Математическое ожидание фазовых координат нелинейной системы по совокупности отдельных процессов определяется по формуле
$$M_x = M[\alpha(\hat{T}_1, \ldots, \hat{T}_N)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\hat{T}_1, \ldots, \hat{T}_N) f(\hat{T}_1, \ldots, \hat{T}_N) d\hat{T}_1 \ldots d\hat{T}_N.$$
Математическое ожидание среднеквадратичного отклонения нелинейной системы равно
$$\sum_x = M[\sigma_x] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(\hat{T}_1, \ldots, \hat{T}_N) f(\hat{T}_1, \ldots, \hat{T}_N) d\hat{T}_1 \ldots d\hat{T}_N.$$
Вероятность устойчивости исходной системы по математическому ожиданию можно определить следующими путями

а) На основе алгебраического критерия устойчивости, т.е. из условия гурвицевости полинома (30). Заменяя в нем $m_x = \alpha(\hat{T}_1, \ldots, \hat{T}_N)$, $\sigma_x = \beta(\hat{T}_1, \ldots, \hat{T}_N)$, получим $\sum_{i=0}^{n} a_i(\hat{T}_1, \ldots, \hat{T}_N, \alpha, \beta)p^i = 0$. Используя критерий устойчивости Гурвица, определяем область устойчивости D в пространстве параметров системы $\hat{T}_1, \ldots, \hat{T}_N$. Тогда вероятность устойчивости системы можно определить по формуле $P = \int \cdots \int_D f(\hat{T}_1, \ldots, \hat{T}_N) d\hat{T}_1 \ldots d\hat{T}_N$.

б) На основе критерия устойчивости Михайлова.

Рассмотрим уравнение (28), составленное для математических ожиданий случайных процессов
$$\dot{m}_x(t) = Am_x(t) + Bm_\varphi + em_f, \quad m_\sigma(t) = C^* m_x(t). \quad (32)$$
Выше было рассмотрено дифференциальное уравнение возмущенного движения для малых отклонений, теперь рассмотрим асимптотическую устойчивость в целом вынужденных движений в системе (32). Уравнение (32) в операторной форме можно представить в виде $m_\sigma = -W_1(p)m_\varphi + W_2(p)m_f$, где $W_1(p) = C^*(A - pE)^{-1}B$, $W_2(p) = C^*(pE - A)^{-1}e$. Чтобы применить к уравнению (32) частотный критерий абсолютной устойчивости вынужденных движений, необходимо выполнение условия

$$\Gamma < m_\sigma \frac{\partial K_0}{\partial m_\sigma} + K_0(m_\sigma, \sigma_x) < K. \qquad (33)$$

Если параметры системы меняются от процесса к процессу, то условие (33) должно выполняться при всех разбросах параметров системы, т.е. необходимо указать область Ω, где с вероятностью, равной единице, находятся m_σ, σ_x.

Ранее было получено $\sigma_x = \beta(\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_N)$; Σ_x , тогда нетрудно определить среднеквадратичное отклонение σ_x

$$\delta^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \beta^2(\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_N) f(\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_N) d\hat{T}_1 \dots d\hat{T}_N - \Sigma_x^2 .$$

Тогда, учитывая неравенство Чебышева, получим

$$\Omega = \{ m_\sigma, \sigma_x ; -\infty < m_\sigma < +\infty, \Sigma_x - 3\delta \le \sigma_x \le \Sigma_x + 3\delta \}.$$

Далее задачу можно решать с использованием ОАФХ или алгебраического критерия устойчивости, приведенных в § I.

Приведены примеры, иллюстрирующие основные положения Главы У.

Глава УI. В работе Калмана [I5] найдено оптимальное управление для линейной нестационарной системы. Причем оптимальное управление зависит только от значений коэффициентов уравнения в данный момент времени t и от фазовых координат $X(t)$. Поскольку рассмотренный выше класс нелинейных систем эквивалентен некоторой линейной нестационарной системе, то уместно поставить следующую задачу: Найти вектор-управление $\sigma = \sigma(X)$ из условия минимума функционалов

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T [X'QX + \varphi' R \varphi] dt \quad (34) \quad \text{или} \quad J = \frac{1}{2}\int_0^T [X'QX + \sigma' R \sigma] dt \quad (35)$$

в силу дифференциального уравнения $\dot{X} = A \cdot X + B\varphi(\sigma)$, где Q - неотрицательно-определенная матрица порядка $N \times N$. R - положительно-определенная матрица порядка $n \times n$, A - постоянная матрица порядка $N \times N$, B - постоянная матрица порядка $N \times n$, $\varphi(\sigma)$ - вектор-столбец $n \times 1$, X - вектор $N \times 1$.

В начале определяем оптимальное управление из условия минимума функционалов (34) и (35) при предположении, что входы и выходы нелинейных элементов физически измеримы. То есть с помощью делительного устройства можно найти матрицу $diag\, u(t)$ для текущего момента времени и $\varphi(\sigma)$ представить в виде $\varphi(\sigma) = diag\, u(t) \sigma(t)$, где $diag\, u(t) = diag\{u_1(t),$

$u_2(t),\dots,u_n(t)\}$, $\varphi'(\sigma)=\|\varphi_1(\sigma_1),\dots,\varphi_n(\sigma_n)\|$, $\sigma'=\|\sigma_1,\dots,\sigma_n\|$.

Тогда согласно результатов работы Калмана [15], оптимальный вектор-управление для функционала (34) определяется по формуле:

$$\sigma(t)=-\mathcal{L}^{-1}C'K(t)X(t),$$

где $\mathcal{L}^{-1}=[diag U(t) R\, diag U(t)]^{-1}$, $C'=[B\, diag U(t)]'$, а симметричная матрица $K(t)$ порядка $N\times N$ является решением уравнения Риккати

$$\dot{K}(t)=-KA-A'K+KB\, diag U(t)\mathcal{L}^{-1} diag U(t) B'K-Q, \qquad (36)$$

с граничным условием $K(T)=0$.

Рассмотрим частный случай, когда $R=diag\{R_1,\dots,R_n\}$ $(R_i>0)$. При этом нетрудно убедиться, что $\mathcal{L}^{-1}=diag\{1/u_1^2R_1,\dots,1/u_n^2R_n\}$, а $diag U(t)\mathcal{L}^{-1} diag U(t)=R^{-1}$ и уравнение (36) имеет вид:

$$\dot{K}(t)=-KA-A'K+KBR^{-1}B'K-Q.$$

Тогда как следует из результата Калмана $K(t)=\hat{K}$ $(T\to\infty)$, где $\hat{K}$ - постоянная симметричная положительно-определенная матрица, являющаяся решением нелинейного матричного алгебраического уравнения

$$-\hat{K}A-A'\hat{K}+\hat{K}BR^{-1}B'\hat{K}-Q=0.$$

<u>Теорема I</u>. Если матрица R - диагональная положительно-определенная матрица, то оптимальный вектор-управление $\sigma=\sigma(X)$, минимизирующий функционал (34) определяется по формуле $\sigma(t)=-[diag U(t)]^{-1}R^{-1}B'\hat{K}X(t)$.

Структурная схема системы указана на рис.8. Аналогичным путем можно определить вектор-управление для функционала (35).

<u>Теорема 2</u>. Оптимальное вектор-управление, минимизирующее функционал (35) в силу дифференциального уравнения $\dot{X}=AX+B\varphi$ определяется по формуле

$$\sigma(t)=-R^{-1}diag U(t) B'K(t)X(t),$$

где $K(t)$ - решение уравнения Риккати

$$\dot{K}(t)=-KA-A'K+KB\, diag U(t) R^{-1} diag U(t) B'K-Q$$

с ограниченным условием $\lim\limits_{T\to\infty} K(T)=\check{K}$.

Матрица $\check{K}$ определяется из нелинейного матричного уравнения

$$-\check{K}A-A'\check{K}+\check{K}B\, diag u_0 R^{-1} diag u_0 B'\check{K}-Q=0,$$

где $diag\,u_0 = diag\{u_0^{(1)}, \ldots, u_0^{(n)}\}$, $u_0^{(i)} = d\varphi_i / d\sigma_i$ при $\sigma_i \to 0$. Структурная схема системы приведена на рис.9.

Наконец рассмотрим случай оптимального управления системы $\dot{X} = AX + B\varphi(\sigma)$ путем введения дополнительных нелинейностей.

Обозначая $\varphi(\sigma) = V$ $(\varphi_i(\sigma_i) = V_i)$ на основе результата работы Летова А.М. [I6] определяем вектор-управление

$$V = -R^{-1} B' K X(t), \tag{37}$$

где K – постоянная, симметричная положительно-определенная матрица порядка $N \times N$, являющаяся решением нелинейного матричного алгебраического уравнения

$$-KA - A'K + KBR^{-1}B'K - Q = 0.$$

Поскольку вектор-функция $\varphi(\sigma)$ – характеристика нелинейного элемента, являющегося неотъемлемой частью системы, то для выполнения условия $V = \varphi(\sigma)$, необходимо ввести в систему дополнительные нелинейности $\sigma = \sigma(V)$, определяемые по формуле

$$\sigma = \sigma(V) = \varphi^{-1}(V)^{*} \ (\sigma_i = \varphi_i^{-1}(V_i) \ \ i = \overline{1,n}), \tag{38}$$

где $\varphi_i^{-1}(V_i)$ – обратная функция, относительно функции $V_i = \varphi_i(\sigma_i)$.

Ввиду практической важности рассмотрим отдельно случай, когда вектор-функция $\varphi(\sigma)$ имеет зону насыщения, т.е. $|\varphi_i(\sigma_i)| \leq \varphi_m^{(i)}$ $i = \overline{1,n}$. Если ввести обозначения $S = -R^{-1}B'K = \| S_{ij} \|$. $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,N}$, то оптимальное управление, определяемое по формуле (37) и (38) минимизирует функционал (35) вдоль всей фазовой траектории, если фазовая траектория целиком лежит внутри области, ограниченной гиперплоскостями

$$-\varphi_m^{(i)} \leq \sum_{j=1}^{N} S_{ij} X_j \leq +\varphi_m^{(i)} \quad i = \overline{1,n}.$$

В случае насыщения дополнительные нелинейности определяются по формуле $\sigma_i(V_i) = \{-\sigma_*^{(i)}$ при $V_i \leq -\varphi_m^{(i)}$; $\varphi_i^{-1}(V_i)$ при $|V_i| \leq \varphi_m^{(i)}$; $\sigma_*^{(i)}$ при $V_i \geq \varphi_m^{(i)}\}$.

Поскольку передаточная функция линейной части системы от входа $-\varphi(\sigma)$ к выходу V равна $W(p) = \| W_{ij} \|_1^n = K^{-1}B'K(pE - A)^{-1}B$, то для абсолютной асимптотической устойчивости тривиального решения достаточно выполнение условия

$$1 + Re(1 + i\omega\vartheta)R^{-1}B'K(i\omega E - A)^{-1}B \geq 0 \text{ при } 0 \leq \omega < \infty.$$

Следует отметить, что если фазовая траектория начинается с внутренней точки сферы, определяемой по формуле $\|X\| \le \varphi_m^{(i_*)} / \|S_{i_*}\|$, где $\varphi_m^{(i_*)} = \inf\{\varphi_m^{(i)}\}$, $S_{i_*} = \| S_{i_* 1}, \ldots, S_{i_* N} \|$, то вся фазовая траектория будет оптимальной фазовой траекторией.

Приведены примеры и кривые переходного процесса рис. I0, II.

Глава УП. В этой главе рассматриваются вопросы оптимального управления класса нелинейных систем, рассмотренного в главе УI, в случае, когда имеются случайные возмущения в объекте управления, и фазовые координаты наблюдаются с помехой.

Разбивая фиксированный промежуток времени T на N частей и рассматривая состояние системы лишь в дискретные моменты времени $t = \vartheta\tau \quad \vartheta = 0, 1, 2, \ldots, N$,исходную задачу можно привести к виду:

$$x_{\vartheta+1} = A_* x_\vartheta + B_\vartheta \sigma_\vartheta + f_\vartheta , \quad y_\vartheta = H x_\vartheta + \eta_\vartheta , \tag{39}$$

$$J = \sum_{\vartheta=1}^{N} x'_\vartheta Q_1 x_\vartheta + \sum_{\vartheta=0}^{N-1} \sigma'_\vartheta \, diag U_\vartheta R_1 \, diag U_\vartheta \sigma_\vartheta , \tag{40}$$

$$J = \sum_{\vartheta=1}^{N} x'_\vartheta Q_1 x_\vartheta + \sum_{\vartheta=0}^{N-1} \sigma'_\vartheta R \sigma_\vartheta , \tag{41}$$

где $A_* = E + \tau A$, $B_\vartheta = \tau B \, diag U_\vartheta$, $diag U_\vartheta = diag U(\vartheta\tau)$, $U_i(\vartheta\tau) = \dfrac{\varphi_i(\sigma_i(\vartheta\tau))}{\sigma_i(\vartheta\tau)}$, $x_\vartheta = x(\vartheta\tau)$, $f_\vartheta = \tau f(\vartheta\tau)$, $\eta_\vartheta = \eta(\vartheta\tau)$, $\sigma_\vartheta = \sigma(\vartheta\tau)$,
$y_\vartheta = y(\vartheta\tau)$, $Q_1 = \frac{1}{2}\tau Q$, $R_\vartheta = diag U_\vartheta \tau R \, diag U_\vartheta$.

Поскольку предполагаем, что входы и выходы нелинейных элементов физически измеримые, то с помощью дискретных делительных устройств можно определить $U_\vartheta^{(i)} = U^{(i)}(\vartheta\tau) \quad i = \overline{1, r}$.

Относительно гауссовских шумов f_ϑ и η_ϑ предполагаем, что известны

$$M[f_\vartheta] = 0, \; M[f_\vartheta f_i] = \delta_{\vartheta i} S_\vartheta \; ; \; M[\eta_\vartheta] = 0, \; M[\eta_\vartheta \eta_j] = \delta_{\vartheta j} V_\vartheta .$$

К уравнению (39) с функционалами (40) или (4I) можно применить методику, предложенную Аоки М. [I7].

<u>Теорема I</u>. Оптимальный вектор-управление, минимизирующий математическое ожидание функционала (40) определяется по формуле

$$\sigma_\vartheta^* = -[R_\vartheta + B'_\vartheta (Q_1 + E_{N-\vartheta-1}) B_\vartheta]^{-1} (Q_1 + E_{N-\vartheta-1}) A_* \bar{x}_\vartheta , \tag{42}$$

где $E_{N-\vartheta} = A'_* (Q_1 + E_{N-\vartheta-1}) A_* - \alpha_{N-\vartheta}$, $\alpha_{N-\vartheta} = A'_*(Q_1 + E_{N-\vartheta-1}) B_\vartheta [R_\vartheta + B'_\vartheta (Q_1 + E_{N-\vartheta-1}) B_\vartheta]^{-1} B'_\vartheta (Q_1 + E_{N-\vartheta-1}) A_*$, $\bar{x}_{\vartheta+1} = A_* \bar{x}_\vartheta + B_\vartheta \sigma_\vartheta^* +$

$+K_{\vartheta+1}H'V^{-1}_{\vartheta+1}[y_{\vartheta+1}-H(A_*\bar{x}_\vartheta+B_\vartheta\sigma^*_\vartheta)]$, $K^{-1}_{\vartheta+1}=H'V^{-1}_{\vartheta+1}H+$ $+(S_\vartheta+A_*K_r A'_*)^{-1}$.

Теорема 2. Оптимальный вектор-управление, минимизирующий математическое ожидание функционала (4I) определяется по формуле (42) путем замены R_ϑ на R.

Далее, рассмотрена эта же задача, когда $\varphi(\sigma)$ – скаляр и математические ожидания λ_1, λ_2 случайных вектор-функций f_ϑ, η_ϑ неизвестные величины с известными априорными плотностями распределения: $p_a(\lambda_1)$ с математическим ожиданием α, ковариационной матрицей M; $p_a(\lambda_2)$ с математическим ожиданием β и ковариационной матрицей N.

Теорема 3. Оптимальное управление σ^*_{N-K}, минимизирующее $M[J]$ функционала (40) определяется из соотношения:

$$\Lambda_{N-r}+\sigma^*_{N-K}\frac{1}{\gamma_{N-K}}+\frac{\partial}{\partial\sigma_{N-K}}\int\limits_{\Omega_1}S^*_{N-K+2}\,p(y_{N-K+1}/\sigma^{N-K},y^{N-K})dy_{N-K}=0,$$

где $\Lambda_{N-K}=\iiint\limits_{\Omega}\int[B'_{N-K}Q_1A_*x_{N-K}+B'_{N-K}Qf_{N-K}]p(f_{N-K}/\lambda_1)p(x_{N-K},\lambda_1/y^{N-K})\cdot$

$$\cdot dx_{N-K}df_{N-K}d\lambda_1,\ \gamma_{N-K}=\frac{1}{r_{N-K}\cdot B'_{N-K}Q_1B_{N-K}},\ S^*_{N-K+2}=\min_{\rho_{N-K+1}}M[J_{N-K+2}/y^{N-K+1}]\ K=\overline{2,N}.$$

Найдены условные плотности распределения $p(x_{N-K},\lambda_1/y^{N-K})$, $p(y_{N-K+1}/y^{N-K})$. Аналогичным путем можно найти оптимальное управление, минимизирующее $M[J]$ функционала (4I) путем замены $r_\vartheta=r\tau u^2_\vartheta$ на $\bar{r}=r\tau$. Приведены примеры.

Глава УШ. Приведены примеры исследований устойчивости конкретных нелинейных электромеханических систем автоматического регулирования на основе предлагаемой методики.

Рассмотрены абсолютная устойчивость положения равновесия и абсолютная устойчивость вынужденных движений динамического стенда для физического моделирования с нелинейностью типа сухое трение.

Получены алгебраические критерии абсолютной устойчивости положения равновесия вынужденных движений и построены области абсолютной устойчивости и области заданного затухания в плоскости параметров корректирующего контура. Построена область абсолютной устойчивости в плоскости двух случайных параметров: момента инерции двигателя $\hat{J}$ и сопротивления якорной цепи $\hat{R}$, которая позволила определить вероятность абсолютной устойчивости вынужденных движений в системе.

Применение результатов главы У позволило выбрать параметры корректирующего контура не только по заданному затуханию интересующих координат САУ, а также по величине требуемой вероятности устойчивости системы.

В качестве второго примера рассмотрена задача релейного управления в системе "тиристорный преобразователь-двигатель" с учетом запаздывания, возникающего при использовании раздельного управления мостами. Нелинейный элемент имеет петлю гистерезиса и зону нечувствительности.

Основные выводы: I. Для двухмерных систем с перекрестными нелинейными элементами, а также для одноконтурных систем с несколькими нелинейными элементами получены частотные критерии абсолютной устойчивости, позволяющие найти область абсолютной устойчивости в пространстве параметров системы, где фазовые переменные затухают не меньше, чем некоторая экспонента Получены частотные критерии устойчивость для случаев, когда передаточные функции линейной части содержат интегрирующие и неустойчивые звенья.

2.Получен частотный критерий абсолютной устойчивости многомерных систем с учетом дифференцируемости нелинейностей.Показано, что известные ранее полученные результаты вытекают из найденного критерия.Рассмотрены случаи,когда линейная часть многомерных систем имеет полюсы:на мнимой оси и в правой полуплоскости.Показана возможность выделения области заданного затухания.

3. Получены алгебраические критерии устойчивости для одноконтурных нелинейных систем: а) с непрерывными элементами, б) с дифференцируемыми нелинейными элементами, в) с непрерывными нелинейными элементами с чистым запаздыванием, г) с разрывными нелинейными элементами с неединственным положением равновесия; д) с неоднозначными нелинейными элементами. Получены алгебраические критерии устойчивости для многомерных нелинейных систем управления. Показано, что,как в случае линейных систем, для выявления устойчивости нелинейных систем можно найти,наряду с частотными критериями, алгебраические критерии устойчивости, основанные на наличии и отсутствии корней полинома в некотором множестве.

4. Предложен метод выделения области абсолютной устойчивости в пространстве параметров системы на основе алгебраического критерия устойчивости,как одноконтурных,так и многомерных

нелинейных систем. Метод основан на теореме Штурма, позволяющей найти число корней полинома на некотором отрезке. Сравнивается метод, предложенный автором и метод Д.Шиляка, основанный на схеме Рауса. Несмотря на то, что эти методы появились независимо друг отдруга одновременно, метод, предлагаемый автором более целесообразно использовать в инженерных расчетах.

5. Приведены два метода определения области абсолютной устойчивости в пространстве параметров системы, определяемой частотными критериями абсолютной устойчивости в случае, когда уравнения границ области абсолютной устойчивости зависят от произвольной постоянной. Предложен метод определения произвольной постоянной, когда интересующая нас область была наибольшей в смысле выбранной целевой функции, на основе нелинейного программирования.

6. Предлагается метод, позволяющий выделить подмножества области абсолютной устойчивости, где некоторый квадратичный функционал от нелинейности и фазовых переменных меньше, чем некоторая функция. Причем эта функция зависит от начального отклонения и от произвольной постоянной, фигурирующей в частотном критерии устойчивости. Показано, что из условия минимума этой функции можно найти произвольную постоянную.

7. На основе вектор-функции Ляпунова получены достаточные условия асимптотической устойчивости в целом одноконтурных и многомерных нелинейных систем при предположении, что характеристики нелинейных элементов удовлетворяют более общим условиям, нежели нелинейности, рассматриваемые в частотных критериях абсолютной устойчивости. Найдены уравнения границы области притяжения в фазовом пространстве комплекса "регулируемый источник питания - система автоматического управления". Получены формулы, позволяющие определить параметры возможных автоколебаний в комплексе.

8. Для нелинейных систем, у которых мнимые и действительные части обратных амплитудно-фазовых характеристик (ОАФХ) являются многочленами от случайных параметров, найдена плотность распределения центрированного модуля ОАФХ, определен радиус окружности рассеивания, соответствующий заданной

вероятности нахождения ОАФХ внутри этого круга. Это позволяет определить вероятность абсолютной устойчивости системы.

Приведена общая методика определения вероятности выполнения заданных динамических свойств системы на основе алгебраического критерия устойчивости. Переход от алгебраического критерия устойчивости к функциям Михайлова позволяет построить область абсолютной устойчивости в плоскости двух неслучайных параметров, поскольку, когда система содержит случайные параметры, заданные динамические свойства с определенной вероятностью достигаются путем выбора неслучайных параметров.

9. Для нелинейной системы со случайными параметрами, когда на вход системы приложено возмущение в виде случайной стационарной функции, получены формулы, позволяющие определить вероятность устойчивости системы по математическому ожиданию на основе метода статистической линеаризации, а также частотного критерия абсолютной устойчивости. Приведены формулы для определения математических ожиданий и среднеквадратичных отклонений фазовых координат системы.

10. Предполагая, что вход и выход безинерционного нелинейного элемента $\varphi(\sigma)$ физически измеримы, получены оптимальные управления, минимизирующие квадратичные функционалы. Получено оптимальное управление на некоторой части фазового пространства, содержащего начало координат, путем введения дополнительной нелинейности в систему. Предлагаемая методика распространяется для многомерных нелинейных систем.

11. Показано, что если предполагать входы и выходы нелинейных элементов физически измеримыми, то оптимальное управление указанного класса нелинейных систем сводится к оптимальному управлению линейной нестационарной системой. Найден оптимальный вектор-управление для квадратичных функционалов, когда вектор-возмущение является случайным гауссовским шумом и фазовые координаты наблюдаются с помехой, а начальное условие распределено по нормальному закону.

Получен алгоритм оптимального управления для нелинейной системы при предположении, что возмущение $f(t)$ и помеха $\eta(t)$ имеют неизвестные математические ожидания с известными априорными плотностями распределения, а начальное условие системы-случайное с нормальным распределением. Приведены формулы, позволяющие определить условные плотности распределения, необходимые для определения оптимального управления.

I2. Предлагаемая методика расчета применена при проектировании электромеханических систем типа : динамический стенд физического моделирования с нелинейностью типа сухое трение со случайными параметрами; релейное управление в системе тиристорный преобразователь-двигатель.

Отдельные результаты работы были представлены на ряде совещаний и конференций, в частности:

I. На Второй Четаевский конференции по аналитической механике, устойчивости движения и оптимальному управлению, Казань, I973.
2. На Ш Всесоюзном совещании по статистическим методам теории управления, Вильнюс, I973.
3. На П Всесоюзном совещании по статистическим методам теории управления, Ташкент, I97I.
4. На Второй Поволжской конференции по автоматическому управлению, Казань, I974.
5. На Всесоюзном семинаре в Высшем техническом училище им.Баумана, Москва, I970.

По теме диссертации опубликовано 26 работ. Основное содержание диссертации изложено в следующих работах:

I. Айсагалиев С.А. Об определении области абсолютной устойчивости вынужденных движений в нелинейных системах. Изв.АН СССР, "Техническая кибернетика", № 5, I969.
2. Айсагалиев С.А. Об абсолютной устойчивости нелинейных систем со случайными стационарными параметрами. Изв. АН СССР, "Техническая кибернетика", № 6, I970.
3. Айсагалиев С.А., Черноруцкий Г.С. Оценка вероятности устойчивости линейных систем со случайными параметрами. Изв.АН СССР, "Техническая кибернетика", № 5, I970.

4. Айсагалиев С.А. Об определении области абсолютной устойчивости систем управления во несколькими нелинейными элементами."Автоматика и телемеханика",№ I2, 1970.
5. Айсагалиев С.А.,Сибрин А.П. Об абсолютной устойчивости динамического стенда с нелинейностью типа сухое трение. Изв.ВУЗ-ов, "Электромеханика", № 3, 1971.
6. Айсагалиев С.А. Об определении области абсолютной устойчивости нелинейных систем с неединственным положением равновесия. Изв.АН КазССР, серия физико-математическая, № 5, 1971.
7. Айсагалиев С.А., Яковлев Б.С. Об устойчивости нелинейных систем, содержащих блок произведения фазовых координат. Изв.АН СССР,"Техническая кибернетика", № 2,1972.
8. Айсагалиев С.А.,Яковлев Б.С. Определение параметров автоколебаний комплекса "Регулируемый источник питания - САУ".Изв.ВУЗ-ов,"Приборостроение", № 4, 1972.
9. Айсагалиев С.А. Об определении области абсолютной устойчивости нелинейных систем с запаздыванием. Изв.ВУЗ-ов, "Приборостроение", № 2, 1973.
I0. Айсагалиев С.А. Об устойчивости двухмерных систем с перекрестными нелинейными связями. Изв.АН СССР,"Техническая кибернетика", № 3, 1972.
II. Айсагалиев С.А. Абсолютная устойчивость нелинейных систем с несколькими нелинейными элементами с условием на производную. Труды второй Четаевской конференции.Казань,1973.
I2. Айсагалиев С.А. К статистической динамике нелинейных автоматических систем . Изв.АН КазССР, серия физико-математическая, № I, 1973.
I3. Айсагалиев С.А. Выделение областей абсолютной устойчивости нелинейных систем. Изв.АН СССР, "Техническая кибернетика", № 5, 1973.
I4. Айсагалиев С.А. Выделение области заданного качества и определение произвольных постоянных в частотных критериях абсолютной устойчивости. МВ и ССО КазССР, серия "механика и математика",вып.2, 1973.
I5. Айсагалиев С.А. Синтез адаптивного управления для одного класса нелинейной стохастической системы. МВиССО КазССР, серия:"Механика и математика", вып.4, 1973.

I6. Айсагалиев С.А., Бияров Т. Синтез оптимального управления для одного класса нелинейной детерминированной системы. Труды Второй Поволжской конференции по автоматическому управлению, КАИ, Казань, I974.

ЛИТЕРАТУРА

I. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, I950.

2. Попов В.М. Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования. "Автоматика и телемеханика", т.I7, № 8, I96I.

3. Айзерман М.А.,Гантмахер Ф.Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. Изд-во АН СССР, I963.

4. Наумов Б.Н., Цыпкин Я.З. Частотный критерий устойчивости процессов в нелинейных системах автоматического управления. "Автоматика и телемеханика", т.25, № 6, I964.

5. Якубович В.А. Частотные условия абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками. "Автоматика и телемеханика", № 6, I967.

6. Гелиг А.Х. Устойчивость многосвязных нелинейных регулируемых систем с неединственным положением равновесия. "Автоматика и телемеханика", № I, I970.

7. Джури Э., Ли Б. Абсолютная устойчивость систем со многими нелинейностями. "Автоматика и телемеханика", т.I6, № 6, I965.

8. Siljak D.D. Nonlinear Systems. The parameter Analysis and Design. New York. Wiley, 1969.

9. Попов В.М. Критерий качества нелинейных регулируемых систем. Труды I-го конгресса ИФАК, т.I. Теория непрерывных систем. Изд-во АН СССР, I96I.

I0. Баркин А.И. Интегральные оценки качества абсолютно устойчивых систем."Автоматика и телемеханика", № 7, I972.

II. Bailey F.N. The application of Lyapunov's second method to interconnected systems. S. Soc. industr. and Appl. Math. 1965, A3 №3.

I2. Пиоятковский А.А., Рутковская Л.Д. Исследование некоторых задач теории устойчивости мс помощью метода векторной функции Ляпунова. "Автоматика и телемеханика", № 10, 1967.

I3. Казаков И.Е., Доступов Б.Г. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем. М., Физматгиз, 1962.

I4. Черноруцкий Г.С. Анализ устойчивости автоматических систем со случайными параметрами. Изв.АН СССР, "Техническая кибернетика", № 4, 1965.

I5. Kalman R. Contributions to the Theory of optimal control. Boletin de la Scieded Matematica Mexicana, V.5, Segunda serie, №1, 1960.

I6. Летов А.М. Динамика полета и управления. Изд."Наука", 1969.

I7. Аоки М. Оптимизация стохастических систем. Изд-во "Наука", 1971.

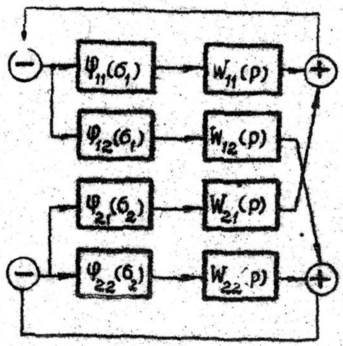

рис. 1

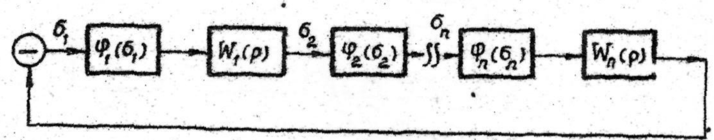

рис. 2

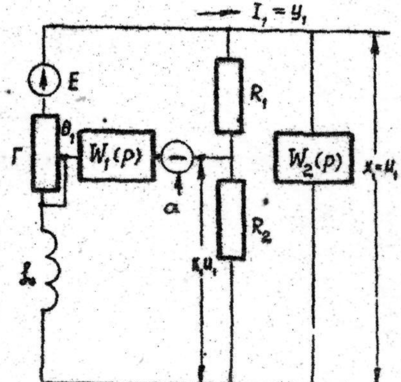

рис. 3

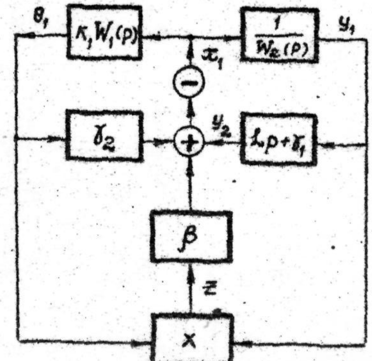

рис. 4

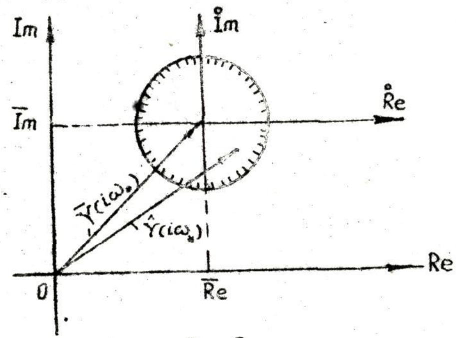

Рис.5.

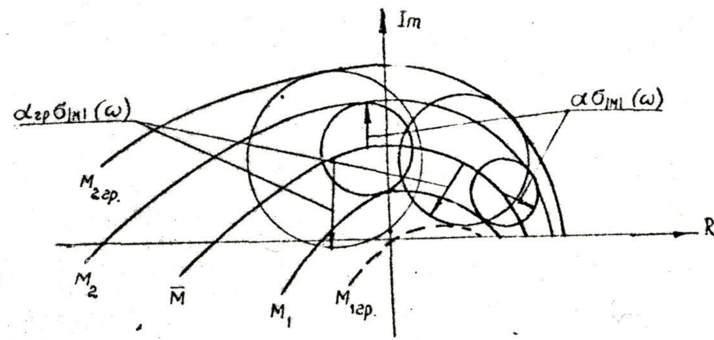

Рис.7

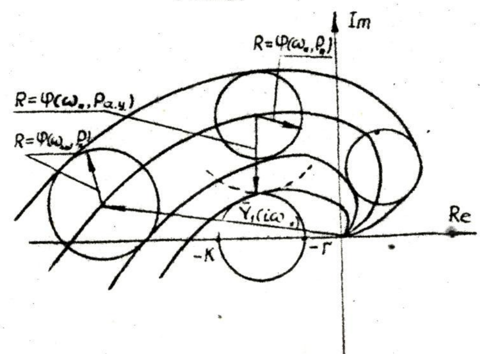

Рис.6

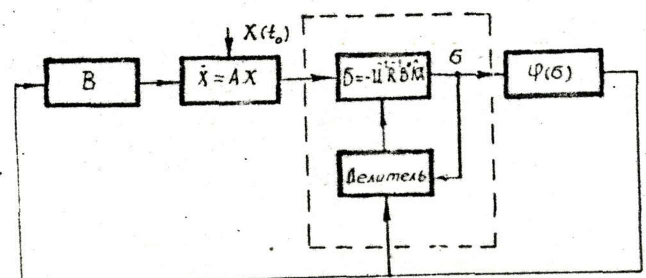

Рис.8

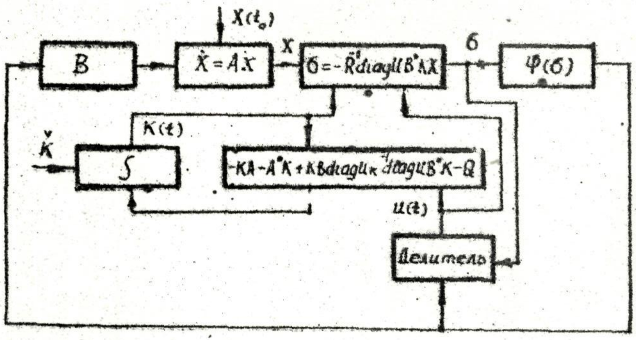

Рис. 9

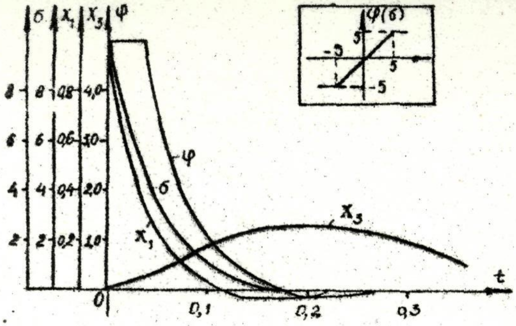

Рис. 10

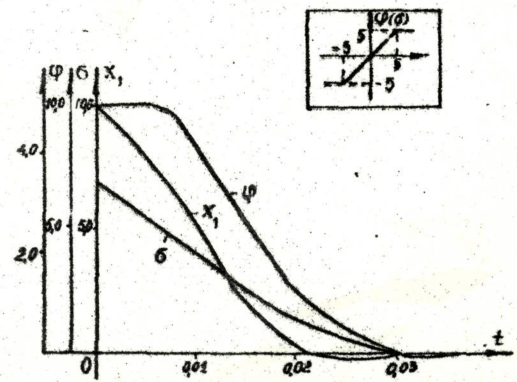

Рис. 11