УДК 669.074

К ТЕОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛОВОГО РЕЖИМА ЗДАНИЙ

В.И. Панферов, Е.Ю. Анисимова, А.Н. Нагорная

Грамотный подход к исследованию и оптимизации теплового режима зданий возможен только на основе теоретического анализа закономерностей его формирования. Для решения этой задачи необходима информация о динамике возмущающих воздействий, об изменении климатических факторов. Кроме того, следует учитывать влияние теплотехнических характеристик наружных ограждений, степени остекления здания, степени заполнения здания людьми, мебелью и других факторов на процесс управления тепловым режимом. То есть, необходима разработка математической модели, отражающей динамику процессов, происходящих в здании при переходе из одного состояния в другое. Одним из основных условий построения такой модели является учет теплоты, аккумулированной зданием, так как за счет этого при временном несоответствии потерь и поступлений теплоты удается поддерживать тепловой режим зданий в определенной допустимой области, возможно, что и в зоне комфорта. На этой основе могут быть разработаны методы оптимизации теплового режима зданий.

Математические модели, детально учитывающие физику процессов используются для качественного анализа процессов и явлений. Для целей управления предпочтительнее более простые модели, обеспечивающие более экономичную и надежную систему управления с сокращенной длительностью ее подготовки и освоения. Использование достаточно подробных моделей оказывается иногда нецелесообразным из-за того, что коэффициенты в этих моделях известны весьма приближенно. Поэтому точность расчета, получаемая при помощи более простых зависимостей, оказывается сравнимой, и даже выше, точности расчета, получаемого при помощи сложных математических моделей, если при их применении не учтены реальные коэффициенты.

1. Структура математической модели теплового режима здания

В литературе широко известна модель ЕЛ. Соколова [1,2], составленная на основе теплового баланса с использованием квазистационарных приближений. При построении этой модели Е.Я. Соколов предложил считать среднюю температуру наружной стены здания равной полусумме температур внутреннего и наружного воздуха. Вместе с тем, эта величина может быть определена значительно точнее, если детальнее учесть распределение температуры по толщине ограждения [3, 4, 5].

В самом деле, используя тот же квазистационарный подход, нетрудно получить, что средняя температура наружной стены здания $\bar{t}$ будет равна

$$\bar{t}=\left(t_{\text{В}}-t_{\text{Н}}\right)\left(\frac{\delta}{2R\lambda}+\frac{1}{\alpha_{\text{Н}}R}\right)+t_{\text{Н}}, \tag{1}$$

где $t_{\text{В}}$, $t_{\text{Н}}$ - соответственно температура внутреннего и наружного воздуха; δ, R - соответственно толщина и термическое сопротивление теплопередаче наружной стены здания; λ - коэффициент теплопроводности материала; $\alpha_{\text{Н}}$ - коэффициент теплоотдачи для наружной стены здания.

Тогда из формулы (1) следует, что

$$d\bar{t}=\left(\frac{\delta}{2R\lambda}+\frac{1}{\alpha_{\text{Н}}R}\right)dt_{\text{В}}-\left(\frac{\delta}{2R\lambda}+\frac{1}{\alpha_{\text{Н}}R}\right)dt_{\text{Н}}+dt_{\text{Н}}, \tag{2}$$

поэтому уравнение теплового баланса для малого промежутка времени будет иметь вид:

$$\left[W_0-q_0V(t_{\text{В}}-t_{\text{Н}})\right]d\tau=c\rho F\delta\times\left[\left(\frac{\delta}{2R\lambda}+\frac{1}{\alpha_{\text{Н}}R}\right)dt_{\text{В}}-\left(\frac{\delta}{2R\lambda}+\frac{1}{\alpha_{\text{Н}}R}\right)dt_{\text{Н}}\right], \tag{3}$$

где W_0 - мощность системы отопления; q_0 - удельная тепловая характеристика здания; V - его объем; F - площадь наружной поверхности; ρ плотность материала стен. Таким образом, дифференциальное уравнение для температуры внутреннего воздуха будет иметь вид

$$\frac{c\rho F\delta}{q_0V}\left(\frac{\delta}{2R\lambda}+\frac{1}{\alpha_{\text{Н}}R}\right)\frac{dt_{\text{В}}}{d\tau}+t_{\text{В}}=\frac{W_0}{q_0V}+\frac{c\rho F\delta}{q_0V}\left(\frac{\delta}{2R\lambda}+\frac{1}{\alpha_{\text{Н}}R}\right)\frac{dt_{\text{Н}}}{d\tau}+t_{\text{Н}}. \tag{4}$$

Если воспользоваться принятыми в теории автоматического управления обозначениями, то уравнение (4) запишется следующим образом

$$T_{\text{В}}\frac{dt_{\text{В}}}{d\tau}+t_{\text{В}}=kW_0+T_{\text{Н}}\frac{dt_{\text{Н}}}{d\tau}+t_{\text{Н}}, \tag{5}$$

где

$$T_{\text{В}}=\frac{c\rho F\delta}{q_0V}\left(\frac{\delta}{2R\lambda}+\frac{1}{\alpha_{\text{Н}}R}\right)$$

- постоянная времени для температуры внутреннего воздуха, $T_{\text{Н}}$ - постоянная времени дифференцирования для температуры наружного воздуха, в данном случае при выводе уравнения получилось, что $T_{\text{В}}=T_{\text{Н}}$, $k=1/q_0V$ - коэффициент передачи по каналу «мощность системы отопления - температура внутреннего воздуха». Как видно из уравнения (4) коэффициент передачи по каналу «температура наружного воздуха - температура внутреннего воздуха» равен 1.

Если пользоваться терминологией ЕЛ. Соколова, то постоянную времени $T_В$ следовало бы назвать «коэффициентом тепловой аккумуляции здания», причем соотношение между постоянной времени $T_в$ и коэффициентом тепловой аккумуляции здания по Е.Я. Соколову является таким:

$$T_В = T_1\left(\frac{\delta}{R\lambda}+\frac{2}{R\alpha_Н}\right), \quad (6)$$

где

$$T_1 = \frac{c\rho F\delta}{2q_0V} \quad (7)$$

- коэффициент тепловой аккумуляции здания.

Модель (5) описывает динамический (нестационарный) тепловой режим здания. Поскольку статический (стационарный) режим является частным случаем динамического режима, то его модель должна содержаться в уравнении (5). Действительно, если положить, что $t_В = \mathrm{const}$ и $t_Н = \mathrm{const}$, то

$$q_0V(t_В - t_Н) = W_0. \quad (8)$$

Полученное выражение - это известное и широко используемое уравнение теплового баланса для стационарного режима. Таким образом, адекватность модели (5) подтверждается для стационарного режима.

Систему отопления можно представить эквивалентным отопительным прибором, мощность которого равна мощности системы отопления.

Мощность водяного отопительного прибора, как это хорошо известно, может быть определена по следующему уравнению

$$W = KF\Delta\bar{t}, \quad (9)$$

где K - коэффициент теплоотдачи отопительного прибора; F - площадь поверхности отопительного прибора; $\Delta\bar{t}$ - среднее значение температурного напора.

В литературе по расчету систем отопления $\Delta\bar{t}$ принято находить по следующей формуле:

$$\Delta\bar{t} = \frac{1}{2}\left(t_{вх}+t_{вых}\right) - t_В, \quad (10)$$

поэтому уравнение мощности отопительного прибора (9) может быть представлено в виде:

$$W = \frac{KF(t_{вх}-t_В)}{1+\dfrac{KF}{2cG_m}}. \quad (11)$$

Подставив данное соотношение в уравнение (5), получим следующую структуру математической модели

$$T_В\frac{dt_В}{d\tau}+t_В = T_Н\frac{dt_Н}{d\tau}+t_Н + k\frac{KF(t_{вх}-t_В)}{1+\dfrac{KF}{2cG_m}}. \quad (12)$$

В модели отопительного прибора (11) в неявном виде содержится допущение, что температура теплоносителя распределяется по прямой вдоль поверхности теплообмена. Если, следуя [6], считать что температура теплоносителя вдоль поверхности теплообмена распределяется по экспоненте, то получается, что

$$W = (t_{вх}-t_В)cG_m\left\{1-\exp\left(-\frac{KF}{G_mc}\right)\right\}. \quad (13)$$

Тогда математическая модель теплового режима будет иметь вид:

$$T_В\frac{dt_В}{d\tau}+t_В = T_Н\frac{dt_Н}{d\tau}+t_Н +$$
$$+k(t_{вх}-t_В)cG_m\left\{1-\exp\left(-\frac{KF}{G_mc}\right)\right\}. \quad (14)$$

Если же учесть, что коэффициент теплопередачи отопительного прибора не является постоянной величиной, а зависит от среднего значения температурного напора и расхода [7]

$$K = m\Delta t^n \bar{G}^p_{отн}, \quad (15)$$

где *m, n и p*-эмпирические числовые показатели, зависящие от типа прибора и характера циркуляции в нем воды; Δt - текущий температурный напор; $\bar{G}_{отн}$ - относительный расход воды.

Тогда, учитывая данную зависимость в выражении для температурного напора [6], получаем следующую структуру математической модели:

$$T_В\frac{dt_В}{d\tau}+t_В = T_Н\frac{dt_Н}{d\tau}+t_Н + kcG_m \times$$
$$\times\left\{t_{вх}-t_В-\left[\frac{mn}{Gc}\bar{G}^pF+(t_{вх}-t_В)^{-n}\right]^{-1/n}\right\}. \quad (16)$$

Получены четыре варианта для структуры математической модели теплового режима. Характерной особенностью первого варианта является то, что в качестве управляющего воздействия принята мощность системы отопления. Во всех остальных случаях управляющих воздействий два: это температура теплоносителя на входе в систему отопления и расход. Первый вариант структуры математической модели имеет более широкую область применения, чем все другие, поскольку ориентирован не только на водяные, но и на любые системы отопления, в частности электрические.

2. Параметрическая идентификация математической модели

Для указанных структур математической модели решалась задача параметрической идентификации. Вследствие равенства величин $T = T_В = T_Н$ модель (5) можно записать в компактном виде, введя понятие избыточной температуры $\theta(\tau) = t_{\text{В}} - t_{\text{Н}}$,

$$T\frac{d\theta(\tau)}{d\tau} + \theta(\tau) = kW_0 . \qquad (17)$$

При настройке модели (17) необходимо определить фактические значения постоянной времени T и удельной тепловой характеристики здания q_0. Это обусловлено тем, что теплофизические свойства ограждающих конструкций здания, а также коэффициенты теплоотдачи $\alpha_{\text{н}}$ и $\alpha_{\text{в}}$, непостоянны и зависят от многих факторов. Например, хорошо известно, что с течением времени происходит изменение свойств ограждений, вследствие старения здания, увлажнения материалов и т.п. Поэтому эти параметры лучше всего определять по экспериментальным данным.

Исследование режима охлаждения помещения при $W_0 = 0$ позволяет определить фактическое значение постоянной времени T. Для данного случая решение уравнения (17) представляется следующим соотношением:

$$\theta(\tau) = \theta(0) \times \exp(-\tau / T), \qquad (18)$$

где $\theta(0)$ - начальное значение избыточной температуры.

С помощью параметрической идентификации данного уравнения определили постоянную времени T. Для упрощения процедуры идентификации к уравнению (18) применили линеаризующее преобразование, т.е. прологарифмировали его, тогда получили, что

$$\ln\theta(\tau) = \ln\theta(0) - \tau / T.$$

Параметрическая идентификация этого уравнения проводилась методом наименьших квадратов, т.е. исходя из минимума по Г следующего критерия:

$$I = \sum_{i=1}^{n}\left[\ln\theta^{\text{Э}}(\tau_i) - \ln\theta(0) + \tau_i / T\right]^2 \to \min_{T},$$

где $\theta^{\text{Э}}$ - экспериментальные значения избыточной температуры, τ_i - используемые при идентификации моменты времени, и - число экспериментальных точек.

Решая задачу параметрической идентификации, нашли, что оптимальное значение постоянной времени определяется по формуле:

$$T = -\sum_{i=1}^{n}\tau_i^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n}[\ln\theta^{\text{Э}}(\tau_i) - \ln\theta(0)] \times \tau_i .$$

Для параметрической идентификации модели проводился эксперимент по исследованию теплового режима помещения путем отключения его системы отопления. Эксперимент проводился в помещении лаборатории отопления кафедры теплогазоснабжения и вентиляции ЮУрГУ, состав отопительного оборудования которого позволяет полностью отключаться от системы централизованного теплоснабжения. В процессе эксперимента измерялась температура внутреннего воздуха в представительной точке и температура наружного воздуха. Измерения проводились через каждые 30 минут, продолжительность эксперимента составила 12 часов.

На рис. 1 приведена теоретическая кривая, построенная для найденной по результатам эксперимента постоянной времени, точками отмечены экспериментальные данные. Видно что, расчетная кривая достаточно хорошо аппроксимирует экспериментальные данные, что свидетельствует об адекватности построенной модели.

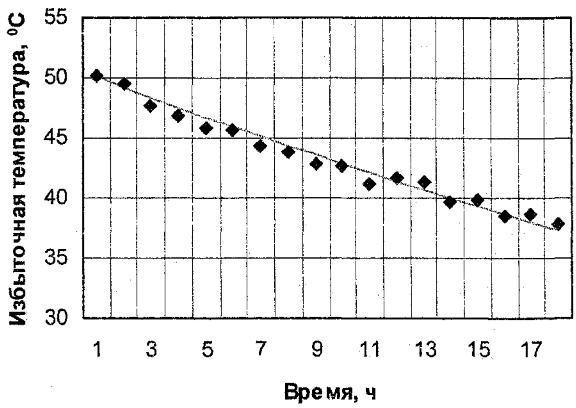

Рис. 1. Экспоненциальная кривая избыточной температуры

Для нахождение удельной тепловой характеристики q_0 необходимо решить задачу параметрической идентификации модели (17) по данным какого-либо режима отопления при $W_0 \neq 0$. Проблема заключается в том, что в реальных условиях достаточно сложно определить фактическую мощность системы отопления. В связи с этим для решения задачи параметрической идентификации был использован метод эталонной модели: с помощью эталонной модели рассчитывается температурный режим помещения для выбранного графика изменения мощности системы отопления W_0. Затем в расчетные данные вводились помехи и были полученные таким образом результаты, использовались для параметрической идентификации модели (17).

Результаты параметрической идентификации иллюстрируются рис. 2. На рис. 2 представлены значения температуры внутреннего воздуха, полученные в результате решения уравнения (17) методом Рунге-Кутта с введением в расчет помех ±2 °С. Эти значения приняты в качестве экспериментальных данных.

В результате решения были определены фактические значения постоянной времени T и коэффициента $к$. Для полученных значений рассчитан температурный режим в помещении и построена теоретическая кривая $t_{\text{В}}^{\text{теор}}(\tau)$. Из рис. 2 видно достаточно точное наложение экспериментальных точек на расчетную кривую, что свидетельствует о применимости используемого метода идентификации. Задача идентификации в данном случае решалась методом покоординатного спуска, со «встроенным» методом золотого сечения.

Изучение экспериментальных данных, как собственных, так и приводимых в литературе [8], показало, что $T_В = T_Н$, как правило, имеет место для нетеплоемких конструкций. Вместе с тем, для массивных ограждающих конструкций, с коэффициентом теплопередачи близким к нормативному, постоянные времени $T_В$ и $T_Н$, вероятнее всего, должны различаться, поэтому их следует отыскивать независимо.

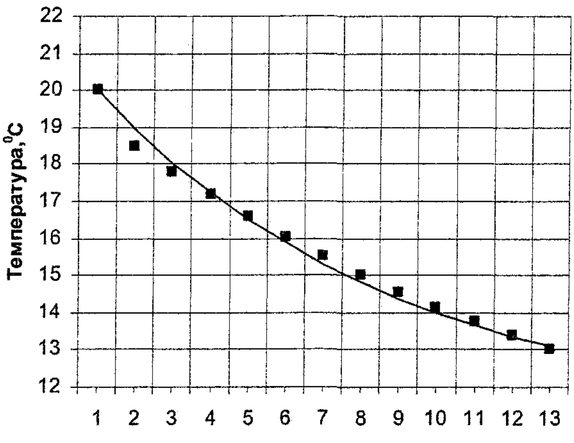

Рис. 2. Кривая изменения температуры внутреннего воздуха, построенная по результатам вычислительного эксперимента

Задача параметрической идентификации модели (5), где необходимо отыскать две разные постоянные времени $T_В$ и $T_Н$ решается аналогично предыдущей тем же методом, только при этом критерий параметрической идентификации I зависит от трех аргументов

$$I = f(k, T_В, T_Н).$$

Для решения задачи параметрической идентификации можно применить и следующий подход [9]. Если в течение определенного временного интервала параметры наружного воздуха не меняются, то при неизменной мощности системы отопления W_0 (неизвестная величина) наступает стационарный режим. Если после наступления стационарного режима включить в помещении источник теплоты с известной мощностью ΔW_0 (например электронагреватель), то температура внутреннего воздуха начнет увеличиваться не величину $\Delta t_В$.

Причем нетрудно видеть, что $\Delta t_В$ будет подчиняться следующему уравнению:

$$T_В \frac{d\Delta t_В}{d\tau} + \Delta t_В = k\Delta W_0,$$

поэтому если на определенном промежутке времени зафиксировать $\Delta t_{эксп}$, то по этим данным можно найти значения T и k. В этом случае критерий идентификации будет иметь вид:

$$I = \int_0^{\tau_K} \left(\Delta t_{эксп} - \Delta t_{расч}\right)^2 d\tau \to \min_{k,T}, \qquad (20)$$

где $\Delta t_{эксп}$, $\Delta t_{теор}$ – соответственно экспериментальные и расчетные значения приращений температур внутреннего воздуха. Эта задача решается тем же методом.

На рис. 3 приведены экспериментальные точки и расчетная кривая $\Delta t = \Delta t(\tau)$. Как видно из рис. 3, решение задачи параметрической идентификации модели теплового режима помещения можно считать вполне удовлетворительным.

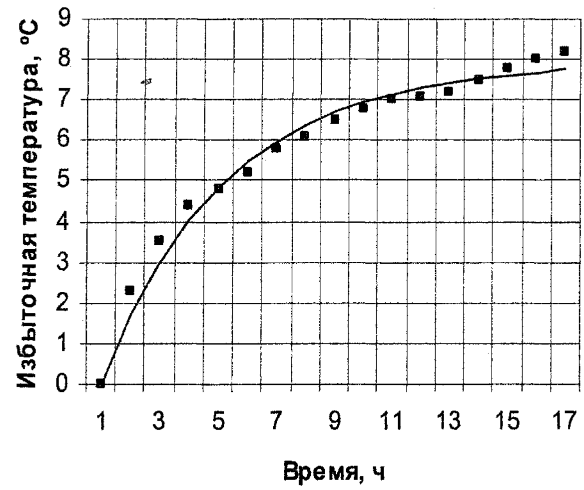

Рис. 3. Кривая изменения температуры внутреннего воздуха в помещении при натопе

Выводы

В работе найдена структура математической модели которая позволяет точнее учитывать физику теплового режима здания. Найдена формула для постоянной времени здания, характеризующей инерционные свойства процесса переноса теплоты. Построенная модель позволяет, в частности, учитывать и нестационарность температуры наружного воздуха. Кроме того, рассмотрены вопросы параметрической идентификации предложенной модели.

Литература

*1. Соколов Е.Я. Теплофикация и тепловые сети: учебник для вузов. - 6-е изд., перераб. - М.: Изд-во **МЭИ, 1999.** - 472 с.*

***2.** Соколов Е.Я., Извеков А.В., Рожков Н.Н. Экспериментальная проверка расчетной модели температурного режима отапливаемых помещений// Изв. вузов. Энергетика. - 1987. - № 8. - С. 75-81.*

*3.Панферов В.И., Нагорная А.Н., Пашнина Е.Ю. О структуре математической модели теплового режима здания// **VIII** Международная научно-практическая конференция Экология и жизнь: Сборник научных трудов. - Пенза, 2005.*

4.Панферов В.И., Нагорная А.Н., Пашнина Е.Ю. Моделирование и управление тепловым режимом здания// Теоретические основы теплогазоснабжения и вентиляции: Сборник трудов Межд. научно-техн. конф. - М.: Московский государственный строительный университет, 2005. -280 с.

5. Панферов В.И., Нагорная А.Н., Пашнина Е.Ю. Математическая модель теплового режима зданий (тезисы)// Энергетики и металлурги настоящему и будущему России: Тез. докл. 5-й Всероссийской научно-техн. конф. - Магнитогорск: МГТУ, 2004.

6.Панферов В.И, Дегтярь А.Б., Денисенко Ю.Н. Погрешность определение среднего значения температурного напора отопительного прибора// Энергосбережение в городском хозяйстве, энергетике, промышленности. Сборник трудов. Т 1. - Ульяновск, 2006.

7. Сканави А.Н., Махов Л.М. Отопление: учебник для вузов. - М.: Изд. Ассоциации строительных вузов, 2002. - 575 с.

8. Проблемы строительной теплофизики// Труды межвузовской научной конференции совместно с работниками промышленности, научно-исследовательских и проектных институтов и НТО стройиндустрии СССР 1-4 февраля, 1964 г. - Минск: Высшая школа, 1965. — 527с.

Я.Панферов В.И., Нагорная А.Н., Пашнина Е.Ю. Экспериментальное определение удельной тепловой характеристики здания// Энергетики и металлурги настоящему и будущему России: тез. докл. 7-й Всероссийской научно-техн. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых. - Магнитогорск: МГТУ, 2006.