

ОБ ОДНОЙ СКАЛЯРНОЙ ФОРМЕ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ШВАРЦА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯХ

В.Г. Николаев

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого, Великий Новгород, Российская Федерация

E-mail: vg14@inbox.ru

Изучена задача Шварца для 2-вектор-функций, аналитических по Дуглису с матрицей J , имеющей разные собственные числа. Проведена редукция задачи Шварца к равносильной граничной задаче для скалярного функционального уравнения. Эта редукция применена для доказательства трех теорем существования и единственности решений задачи Шварца в областях, ограниченных контуром Ляпунова.

Ключевые слова: матрица; жорданова форма; собственное число; собственный вектор; голоморфная функция; контур Ляпунова.

1. Основные определения и постановка задачи

Определение 1. [1–3] Пусть $n \times n$ -матрица J не имеет вещественных собственных чисел. Аналитической по Дуглису или J -аналитической с матрицей J называется комплексная n -вектор-функция $\phi = \phi(z) \in C^1(D)$, для которой в области $D \subset \mathbb{R}^2$ выполнено уравнение

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Замечание 1. Из (1) вытекает, что J -аналитические функции определены с точностью до вектор-постоянной.

Определение 2. В скалярном случае при $J = \lambda$, $\text{Im } \lambda \neq 0$ функцию $f = f_\lambda(z) \in C^1(D)$, для которой в области $D \subset \mathbb{R}^2$ выполнено уравнение

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial y} - \lambda \frac{\partial f_\lambda}{\partial x} = 0,$$

будем называть λ -голоморфной в области D .

В [1] показано, что система уравнений в частных производных первого порядка (1) является эллиптической. Рассмотрим для нее при $n = 2$ следующую граничную задачу Шварца [1–3].

Пусть конечная односвязная область $D \subset \mathbb{R}^2$ ограничена контуром Γ . Требуется найти J -аналитическую с матрицей J в области D 2-вектор-функцию $\phi(z) \in C(\bar{D})$, которая удовлетворяет граничному условию

$$\text{Re } \phi(z)|_\Gamma = (\psi_1, \psi_2), \quad (2)$$

где вещественная 2-вектор-функция $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in C(\Gamma)$ задана.

Как известно [1], свойства λ -голоморфных функций тождественны свойствам обычных голоморфных ($\lambda = i$) функций. В частности, однородная ($\psi \equiv 0$) задача (2) для них имеет только постоянные решения. Но при $n > 1$ это уже не так: можно построить [3] при произвольном n решения однородной задачи Шварца в виде квадратичных вектор-форм. Один из таких примеров для $n = 2$ приведен в конце статьи. Поэтому вопрос существования и единственности решений задачи (2) является нетривиальным.

В теореме 1 задача Шварца для 2×2 -матриц, имеющих разные собственные числа, преобразована к равносильному скалярному функциональному уравнению. Затем это уравнение применено к изучению неоднородной задачи Шварца – теоремы 3–5.

2. Редукция задачи Шварца к скалярному уравнению при $n = 2$

Ниже будем обозначать через f_λ и g_μ соответственно λ - и μ -голоморфные функции (см. определение 2). Символами x, y обозначаем векторы из C^2 . Соответственно, \bar{x}, \bar{y} – комплексное сопряжение векторов x, y . Обозначим через $Q = (x, y)$ жорданов базис матрицы J . Имеет место

Теорема 1. Пусть 2×2 -матрица J имеет собственный вектор y не кратный вещественному и разные собственные числа $\lambda \neq \mu$. Тогда разрешимость задачи Шварца для произвольной граничной 2-вектор-функции $\psi \in C(\Gamma)$ равносильна разрешимости скалярной задачи

$$g_\mu + \bar{f}_\lambda + l \cdot f_\lambda|_\Gamma = \varphi(t), \quad f_\lambda, g_\mu \in C(\bar{D}), \quad l = \frac{\det(x, \bar{y})}{\det(x, y)} \in \mathbb{C} \tag{3}$$

для произвольной скалярной комплексной функции $\varphi(t) \in C(\Gamma)$.

Замечание 2. Решения задачи Шварца (однородной или неоднородной) существуют одновременно для всех матриц J из условия теоремы 1 с одинаковым по модулю числом l в (3).

▷ Действительно, пусть известно, что (3) выполнено при некотором $l' \in \mathbb{C}$, и пусть $l \in \mathbb{C}$ – другое число, причем $|l|=|l'|$. Умножим обе части левого уравнения (3) на такое число $a \in \mathbb{C}$, чтобы $l = al'/a$. Тогда первое уравнение в (3) примет следующий вид:

$$a\varphi|_\Gamma = a g_\mu + a \bar{f}_\lambda + al' f_\lambda = a g_\mu + \bar{a} f_\lambda + \frac{a}{a} \cdot l' \cdot \bar{a} f_\lambda. \tag{4}$$

Переобозначим в (4):

$$g_\mu = a g_\mu, \quad f_\lambda = \bar{a} f_\lambda, \quad l = \frac{a}{a} l', \quad \varphi = a\varphi. \tag{5}$$

Из (4) и (5) вытекает, что (3) выполняется одновременно для l и l' , где $|l|=|l'|$, если граничная функция φ – произвольная. ◁

Доказательство теоремы 1. Пусть $J_1 = \text{diag}(\lambda, \mu)$ – жорданова форма матрицы J . По условию $Q = (x, y)$ – жорданов базис матрицы J . Разложим вектор \bar{y} по базису x, y :

$$\bar{y} = l_1 x + l y, \quad l_1, l \in \mathbb{C}, \quad l = \frac{\det(x, \bar{y})}{\det(x, y)}. \tag{6}$$

В (6) использованы формулы Крамера. Поскольку $Jx = \lambda x$, $Jy = \mu y$, то

$$J\bar{y} = J(l_1 x + l y) = \lambda l_1 x + \mu l y + \lambda l y - \lambda l y = \lambda(l_1 x + l y) + (\mu - \lambda)l y = \lambda \bar{y} + (\mu - \lambda)l y.$$

Таким образом, матрица $J_1 = (Q')^{-1} J Q'$ оператора J в базисе $Q' = (\bar{y}, y)$ будет иметь следующий вид:

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ (\lambda - \mu)l & \mu \end{pmatrix}. \tag{7}$$

После подстановки $J = Q' J_1 (Q')^{-1}$ в (1) и умножения обеих частей на $(Q')^{-1}$ получим с учетом (7) следующие два равенства:

$$\frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ (\lambda - \mu)l & \mu \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = 0, \quad (f, g)^T = (Q')^{-1} \phi. \tag{8}$$

Из первого равенства в (8) вытекает, что

$$f = f_\lambda = u + i v, \quad g = g_\mu + l \cdot f_\lambda = p + i q, \tag{9}$$

где функции u, v, p, q – вещественные.

Допустим, что $\phi = \phi(z) \in C(\bar{D})$ во втором уравнении в (8) – решение задачи Шварца с некоторой граничной функцией $\psi \in C(\Gamma)$. Тогда функции f, g в (9) известны *a priori*. Обозначим вектор $y = (a_1, a_2)$, где $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. Тогда решение $\phi(z)$ с учетом (8) можно записать в виде

$$\phi(z) = Q' \cdot (f, g)^T = (\bar{y}, y) \cdot (f, g)^T = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & a_1 \\ \bar{a}_2 & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u + i v \\ p + i q \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Теперь граничное условие (2) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \text{Re} [\bar{a}_1(u + i v) + a_1(p + i q)]|_\Gamma = \psi_1, \\ \text{Re} [\bar{a}_2(u + i v) + a_2(p + i q)]|_\Gamma = \psi_2. \end{cases} \tag{11}$$

Заметим, что для $k = 1, 2$ справедливо тождество

$$\operatorname{Re}[\bar{a}_k(u+iv) + a_k(p+iq)]|_{u=-p, v=q} = \operatorname{Re}[\bar{a}_k(-p+iq) - \overline{\bar{a}_k(-p+iq)}] = 0. \quad (12)$$

Поэтому единственное решение (11) как алгебраической системы относительно u, v можно найти в виде:

$$u = -p + r(\psi_1, \psi_2), \quad v = q + h(\psi_1, \psi_2), \quad (13)$$

где $r(\cdot), h(\cdot)$ – линейные функции своих переменных.

▷ Действительно, обозначим $a_1 = a + bi, a_2 = c + di, a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Тогда после подстановки (13) в (11) имеем в силу (12):

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[\bar{a}_1(r+ih)] = \operatorname{Re}[(a-bi)(r+ih)]|_{\Gamma} = ar + bh = \psi_1, \\ \operatorname{Re}[\bar{a}_2(r+ih)] = \operatorname{Re}[(c-di)(r+ih)]|_{\Gamma} = cr + dh = \psi_2. \end{cases}$$

Так как по условию собственный вектор $y = (a_1, a_2) = (a + bi, c + di)$ матрицы J не кратен вещественному, то определитель

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поэтому алгебраическая система

$$\begin{cases} a \cdot r + b \cdot h = \psi_1, \\ c \cdot r + d \cdot h = \psi_2, \end{cases} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad (14)$$

имеет единственное решение относительно переменных r, h , откуда и вытекает (13). ◁

Далее заметим, что пара равенств вещественных функций (13) равносильна одному комплексному функциональному уравнению

$$u - iv + (p+iq)|_{\Gamma} = r - ih, \quad (15)$$

которое имеет место на контуре Γ . С учетом (9) равенство (15) можно записать в виде:

$$\bar{f}_{\lambda} + g_{\mu} + l \cdot f_{\lambda}|_{\Gamma} = r(\psi_1, \psi_2) - ih(\psi_1, \psi_2) = \varphi(t), \quad f_{\lambda}, g_{\mu} \in C(\bar{D}), \quad (16)$$

что совпадает с первым уравнением в (3).

Число l в (16) задано формулой (6), совпадающей с (3). Таким образом, существование решения $\phi(z)$ задачи Шварца означает разрешимость (16) для некоторой граничной функции φ . Но если граничная вектор-функция $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ в (2) при этом произвольна, то и $\varphi = (r, -h)$ в (16), т. е. и в (3), будет произвольной. Действительно, взаимосвязь между парами вещественных функций r, h и ψ_1, ψ_2 определяется неособой системой (14). Напомним, что коэффициенты (14) определяются по вектору $y = (a + bi, c + di)$ – собственному вектору матрицы J .

В обратную сторону: пусть задача (16), т. е. и (3), разрешима для любой граничной функции φ . Найдем по заданной функции $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ с помощью (14) функцию $\varphi = r - ih$. Пусть f_{λ}, g_{μ} – решение (16) с этой функцией φ . Тогда в силу (8) и (9) решение задачи Шварца дается формулой

$$\phi(z) = Q' \cdot (f, g)^T = (\bar{y}, y) \cdot (f_{\lambda}, g_{\mu} + l \cdot f_{\lambda})^T. \quad (17)$$

Теорема 1 доказана.

3. Применение теоремы 1 к доказательству существования решений задачи Шварца при $n = 2$

Применим уравнение (3) к неоднородной задаче Шварца. Вместо произвольного контура $\Gamma = \partial D$ будем рассматривать кривую Ляпунова. Все решения будем искать в классе функций, непрерывных по Гельдеру. В связи с этим напомним известное

Определение 3. Гладкая кривая $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ называется кривой (контуром) Ляпунова, если существуют такие два вещественных числа $a > 0$ и $b, 0 < b \leq 1$, что для любых двух точек $z_1, z_2 \in \Gamma$ выполняется условие Ляпунова

$$|\theta| < a \cdot |z_1 - z_2|^b,$$

где θ – угол между касательными или нормальными к Γ точкам z_1, z_2 .

Ниже будет использован следующий результат, полученный А.П. Содатовым в [2].

Теорема 2. Пусть кривая $\Gamma = \partial D$ – кривая Ляпунова, пусть $(\text{Im } \lambda) \cdot (\text{Im } \mu) < 0$. Тогда для любой граничной функции φ из класса Гельдера $H^\sigma(\Gamma)$, $0 < \sigma < 1$ решение задачи

$$f_\lambda(z) + g_\mu(z)|_\Gamma = \varphi(z), \quad f_\lambda, g_\mu \in H^\sigma(\bar{D})$$

существует и единственно (с точностью до постоянной).

Из теорем 1, 2 вытекают три приведенные ниже теоремы.

Теорема 3. Пусть в условиях теоремы 1 $\Gamma = \partial D$ – контур Ляпунова. При этом собственные векторы матрицы J комплексно сопряжены: $x = \bar{y}$. Тогда для любой граничной функции $\psi \in H^\sigma(\Gamma)$, $0 < \sigma < 1$ решение задачи Шварца в классе $\phi \in H^\sigma(\bar{D})$ существует и единственно с точностью до вектор-постоянной.

Доказательство. Положим в (3) $x = \bar{y}$, тогда $l = 0$. В результате для (3) оказывается выполненным утверждение теоремы 2. Поэтому из теоремы 1 вытекает утверждение настоящей теоремы.

Теорема 4. Пусть в условиях теоремы 1 $\Gamma = \partial D$ – контур Ляпунова. При этом матрица J имеет вещественный собственный вектор x . Тогда выполнено утверждение теоремы 3.

Если при этом граничная функция $\psi \in C^2(\Gamma)$, то решение $\phi = \phi(z)$ задачи Шварца обладает свойством

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \in H^\sigma(\bar{D}). \quad (18)$$

Доказательство. Если в (3) вектор x вещественный, то $|l| = 1$.

Покажем, что при каждом таком $l \in \mathbb{C}$ решение задачи (3) всегда существует и единственно, если Γ – контур Ляпунова и $\varphi \in H^\sigma(\Gamma)$.

▷ В силу замечания 2 достаточно рассмотреть случай $l = 1$. Обозначим: $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, $f_\lambda = u + iv$, $g_\mu = p + iq$. Тогда (3) запишется в виде

$$p + iq + u - iv + u + iv = p + iq + 2u|_\Gamma = \varphi_1 + \varphi_2 i. \quad (19)$$

Из (19) имеем: $q|_\Gamma = \varphi_2$. Согласно известной теореме [4], μ -голоморфная функция $g_\mu(z) \in H^\sigma(\bar{D})$ может быть единственным образом (с точностью до постоянной) восстановлена по граничному значению своей мнимой части $\varphi_2 \in H^\sigma(\Gamma)$. Тот же результат будет и для реальной части.

Тогда из (19) станет известно граничное значение реальной части функции f_λ , т. е. $u|_\Gamma = 1/2(\varphi_1 - p) \in H^\sigma(\Gamma)$. Отсюда в силу той теоремы из [4] можно однозначно восстановить функцию $f_\lambda \in H^\sigma(\bar{D})$. <

Таким образом, в силу теоремы 1 для произвольного l , $|l| = 1$ справедливо и утверждение теоремы 3.

Пусть теперь $\psi \in C^2(\Gamma)$. Это означает с учетом (14), что первые производные функций $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ и $\varphi = (r, -h)$ непрерывны по Гельдеру на Γ . Отсюда согласно [4] восстановленные из (19) функции f_λ, g_μ будут обладать свойством

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial x}, \frac{\partial f_\lambda}{\partial y}, \frac{\partial g_\mu}{\partial x}, \frac{\partial g_\mu}{\partial y} \in H^\sigma(\bar{D}). \quad (20)$$

Из (20) в силу (17) вытекает (18). Теорема 4 доказана.

Теорема 5. Пусть в условиях теоремы 1 $\Gamma = \partial D$ – контур Ляпунова. При этом матрица J имеет комплексно сопряженные собственные числа $\mu = \bar{\lambda}$. Тогда при $l \neq 0$ в (3) выполнено утверждение теоремы 3

Доказательство. В данном случае задача (3) примет вид:

$$g_{\bar{\lambda}} + \bar{f}_{\lambda} + l \cdot f_{\lambda} |_{\Gamma} = \varphi, \quad g_{\bar{\lambda}}, f_{\lambda} \in H^{\sigma}(\bar{D}), \quad l \neq 0. \quad (21)$$

Функция $g_{\bar{\lambda}} + \bar{f}_{\lambda}$ будет $\bar{\lambda}$ -голоморфной. Поскольку $(\text{Im } \lambda) \cdot (\text{Im } \bar{\lambda}) < 0$, то для задачи (21) при $l \neq 0$ выполнена теорема 2. Отсюда в силу теоремы 1 справедливо утверждение теоремы 3. Теорема 5 доказана.

Замечание 3. Условие $l \neq 0$ в (21) соответствует матрице J , не имеющей комплексно сопряженных собственных векторов. Из (21) следует, что при $l = 0$ решение задачи Шварца для матриц из условия теоремы 5 не единственно и не всегда существует.

Теоремы 3 и 4 означают в частности, что при $\lambda \neq \mu$ и при $l = \{0; 1\}$ однородное ($\varphi \equiv 0$) уравнение (3) имеет только тривиальные решения. Покажем, что такое его свойство справедливо не для всех l .

Пример 1. Пусть

$$J = \begin{pmatrix} 4i & 12 \\ \frac{1}{2} & -i \end{pmatrix}, \quad \phi(z) = \begin{pmatrix} -2x^2 - 16y^2 + 1 + 8xyi \\ (x^2 + 2y^2) \cdot i \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Матрица J имеет разные собственные числа $\lambda = i$ и $\mu = 2i$. Функция $\phi(z)$ будет согласно определению 1 J -аналитической с матрицей J . При этом $\text{Re } \phi(z)|_{\Gamma} = 0$ на эллипсе $\Gamma: 2x^2 + 16y^2 = 1$.

Таким образом, (22) доставляет пример нетривиального решения однородной задачи Шварца (2), которому в силу (14) соответствует $\varphi \equiv 0$ в (3).

Прямые вычисления показывают, что для матрицы J (22) собственные векторы x, y и число l (3) имеют, соответственно, вид:

$$x = (2i, \frac{1}{2}), \quad y = (3i, \frac{1}{2}), \quad l = \frac{\det(x, \bar{y})}{\det(x, y)} = 5.$$

Следовательно, в силу теоремы 1 и замечания 2 при $|l| = 5$ однородное уравнение (3) имеет решение в виде квадратичных функций $f_{\lambda}(z)$ и $g_{\mu}(z)$.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания (проект 1.6644.2017/БЧ).

Литература

1. Солдатов, А.П. Функции, аналитические по Дуглису / А.П. Солдатов. – Изд-во НовГУ, 1995. – 196 с.
2. Николаев, В.Г. О решении задачи Шварца для J -аналитических функций в областях, ограниченных контуром Ляпунова / В.Г. Николаев, А.П. Солдатов / Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 7. – С. 965–969. DOI: 10.1134/S0374064115070158
3. Николаев, В.Г. О некоторых свойствах J -аналитических функций / В.Г. Николаев // Вестник СамГУ, естественнонаучная серия. – 2013. – Т. 3(104). – С. 25–32.
4. Мусхелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 342 с.

Поступила в редакцию 13 октября 2016 г.

**ONE FORM OF THE SCALAR TWO-DIMENSIONAL SCHWARZ PROBLEM
AND ITS APPLICATIONS**

V.G. Nikolaev

Federal State-Funded Educational Institution of Higher Vocational Education "Yaroslav-the-Wise Novgorod State University", Velikiy Novgorod, Russian Federation

E-mail: vg14@inbox.ru

The paper deals with the problem of existence and uniqueness of the Schwarz problem solution for 2-vector-functions, being analytic on Douglis, in regions bounded by the Lyapunov contour, and in classes of functions that are Holder continuous. However, the matrix J should have different eigenvalues λ , μ , and at least one eigenvector that is not multiple of the real one.

At the beginning of the paper, the inhomogeneous Schwarz problem with a boundary function ψ is transformed. As a result of the performed reduction the Schwarz problem turns into an equivalent boundary problem for an inhomogeneous scalar functional equation. It connects boundary values of λ - and μ -holomorphic functions f , g , defined in the plane region D , with a certain boundary function φ , which is constructed by ψ .

This functional equation for different matrices J is distinguished only by a complex coefficient l , which is calculated using the matrix J . In this case the following circular property is found: the Schwarz problem is solvable or not simultaneously for all matrices, which coefficient module is equal. That's why without loss of generality l can be considered a real number. It's proved that the studied functional equation for cases $l = 0$ and $|l| = 1$ has a unique solution for any right side of φ . The matrices J having complex conjugate eigenvectors and one real eigenvector correspond to these two cases. Therefore, for these matrices the inhomogeneous Schwarz problem in case of any boundary function ψ has the unique solution. We consider absolutely and irrespectively the case when the matrix J has complex conjugate eigenvalues.

At the end of the paper it's shown that in case of $|l| = 5$ the homogeneous ($\varphi = 0$) functional equation has a nontrivial solution.

Keywords: matrix; Jordan canonical form; eigenvalue; eigenvector; holomorphic function; Lyapunov contour.

References

1. Soldatov A.P. *Funktsii, analiticheskie po Duglisu* (Functions being analytic on Douglis). NovGU Publ., 1995, 196 p. (in Russ.).
2. Nikolaev V.G., Soldatov A.P. On the solution of the Schwarz problem for J -analytic functions in a domain bounded by a Lyapunov contour. *Differential Equations*, 2015, Vol. 51, no. 7, pp. 962–966. DOI: 10.1134/S0012266115070150
3. Nikolaev V.G. On some properties of J -analytical functions. *Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser.*, 2013, no. 3(104), pp. 25–32. (in Russ.).
4. Muskhelishvili N.I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* (Singular integral equation). Moscow, Nauka Publ., 1968, 342 p. (in Russ.).

Received October 13, 2016