

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СХОДЯЩЕЙСЯ УДАРНОЙ ВОЛНЕ В ГАЗЕ В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

**В.Ф. Куропатенко<sup>1,2</sup>, Ф.Г. Магазов<sup>2</sup>, Е.С. Шестаковская<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики им. академика Е.И. Забабахина, г. Снежинск, Российская Федерация

<sup>2</sup> Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: leshest@list.ru

Построено аналитическое решение задачи о сходящейся ударной волне в сосуде с непроницаемой стенкой, описывающее случаи плоской, цилиндрической и сферической симметрии. На границе сосуда задана отрицательная скорость, а скорость холодного идеального газа равна нулю. В начальный момент времени из этой точки начнет распространяться ударная волна к центру симметрии. Граница сосуда будет двигаться по определенному закону, согласованному с движением ударной волны. В эйлеровых переменных она движется, но в лагранжевых переменных её траектория является вертикальной линией. Получены уравнения, определяющие структуру течения газа между фронтом ударной волны и границей как функции времени и лагранжевой координаты, а также зависимость энтропии от скорости ударной волны. Для всех случаев симметрии найдены показатели автомодельности и соответствующие им значения безразмерных координат для широкого диапазона показателей адиабаты. Задача решена в лагранжевых координатах и принципиально отличается от ранее известных постановок задачи о сжатии автомодельной ударной волны к центру симметрии и её отражении от центра, которые построены для бесконечной области в эйлеровых координатах.

*Ключевые слова:* ударная волна; плоская симметрия; цилиндрическая симметрия; сферическая симметрия; идеальный газ; аналитическое решение.

### Введение

Развитие теории размерности и подобия величин механики сплошной среды позволило в разные годы XX века получить автомодельные решения задачи о фокусировке ударной волны в бесконечном идеальном газе [1–9]. Задачи, имеющие аналитическое решение, еще называют «эталонными» задачами, так как они используются для верификации математических моделей динамических процессов механики сплошных сред. Однако реальные тела имеют конечные размеры. В данной работе рассмотрена задача о сходящейся ударной волне в сосуде с непроницаемой стенкой, имеющая точное аналитическое решение, описывающее три типа одномерных движений – плоские, цилиндрически и сферически симметричные движения.

### Постановка задачи

Рассматривается сосуд с непроницаемой стенкой, в котором находится газ массой  $M_0$  и начальными при  $t = t_0$  параметрами газа  $\rho_0 = \text{const}$ ,  $U_0 = 0$ ,  $P_0 = 0$ ,  $E_0 = 0$ , где  $\rho$  – плотность,  $U$  – скорость,  $P$  – давление,  $E$  – удельная внутренняя энергия. Лагранжевой координатой является масса  $M$ . Второй независимой переменной является время  $t$ . В точке  $t_0$ ,  $M_0$  задана скорость  $U_1 < 0$ . Таким образом, в этой точке задан сильный разрыв, который при  $t > t_0$  распространяется к центру симметрии и в момент  $t_f$  фокусируется в точку  $M = 0$ . Граница сосуда при  $t > t_0$  движется в переменных  $r, t$ , но в переменных  $M, t$  её траектория является вертикальной линией. Вообще говоря, все траектории частиц являются вертикальными линиями, вдоль которых сохраняется то значение энтропии, которое возникло на ударной волне. Параметры газа между ударной волной и границей определяются системой законов сохранения Эйлера–Гельмгольца. Уравнение состояния используется в двух формах:

$$P = (\gamma - 1)\rho E, \quad P = F(s)\rho^\gamma, \quad (1)$$

где  $F(s)$  – функция от энтропии.

### Ударная волна

Законы сохранения на ударной волне (УВ) при  $U_0 = 0, P_0 = 0, E_0 = 0, F_0 = 0$  имеют вид [10]:

$$\rho_w(D - U_w) - \rho_0 D = 0, \quad (2)$$

$$\rho_0 D U_w - P_w = 0, \quad (3)$$

$$\rho_0 D \left( E_w + \frac{1}{2} U_w^2 \right) - P_w U_w = 0. \quad (4)$$

Индексом «w» обозначены величины на ударной волне,  $D$  – скорость ударной волны. Преобразуем эти уравнения к виду, содержащему зависимости  $U_w, \rho_w, F_w, P_w$  от скорости ударной волны в лагранжевых координатах. Лагранжева координата  $M_w$  ударной волны в одномерном случае связана с её эйлеровой координатой  $r_w$  уравнением

$$M_w = \frac{s_\mu}{\mu} \rho_0 r_w^\mu, \quad (5)$$

$$\text{где } \mu = \begin{cases} 1, \text{ плоская симметрия} \\ 2, \text{ цилиндрическая симметрия,} \\ 3, \text{ сферическая симметрия} \end{cases} \quad s_\mu = \begin{cases} 1, \text{ при } \mu = 1 \\ 2\pi, \text{ при } \mu = 2. \\ 4\pi, \text{ при } \mu = 3 \end{cases}$$

Скорость ударной волны в лагранжевых координатах есть изменение  $M_w$  со временем

$$W = \frac{dM_w}{dt} = s_\mu \rho_0 r_w^{\mu-1} D. \quad (6)$$

Заменим эйлерову координату ударной волны её лагранжевой координатой. Для этого выразим  $r_w$  из (5) и подставим в (6)

$$W = (\mu M_w)^{(\mu-1)/\mu} (s_\mu \rho_0)^{1/\mu} D. \quad (7)$$

Выразив в (7)  $D$  через  $W$  и  $M_w$  и подставив в (2)–(4), получим с помощью (1) величины на ударной волне, содержащие  $W$  и  $M_w$ :

$$\rho_w = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_0; \quad (8)$$

$$U_w = \frac{2}{\gamma + 1} (s_\mu \rho_0)^{-1/\mu} (\mu M_w)^{(1-\mu)/\mu} W; \quad (9)$$

$$P_w = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0^{(\mu-2)/\mu} s_\mu^{-2/\mu} (\mu M_w)^{2(1-\mu)/\mu} W^2. \quad (10)$$

Из (1), (8) и (10) следует выражение для  $F_w$

$$F_w = \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^\gamma \rho_0^{-(\gamma - (\mu - 2)/\mu)} s_\mu^{-2/\mu} \right] (\mu M_w)^{2(1-\mu)/\mu} W^2. \quad (11)$$

В точке  $t = t_0$   $M_w = M_0, U_w = U_{w0}, P_w = P_{w0}, F_w = F_{w0}$  выражения (9)–(11) принимают вид:

$$U_w = U_0 \left( \frac{W}{W_0} \right) \left( \frac{M_0}{M_w} \right)^{(\mu-1)/\mu}, \quad P_w = P_0 \left( \frac{W}{W_0} \right)^2 \left( \frac{M_0}{M_w} \right)^{2(\mu-1)/\mu}, \quad F_w = F_0 \left( \frac{W}{W_0} \right)^2 \left( \frac{M_0}{M_w} \right)^{2(\mu-1)/\mu}. \quad (12)$$

По аналогии с [11, 12] зададим траекторию ударной волны в виде

$$M_w = M_0 \varphi(t)^n, \quad (13)$$

где  $\varphi = (t_f - t) / (t_f - t_0)$ . Продифференцировав  $M_w$  по  $t$ , получим выражение для скорости ударной волны в лагранжевых координатах

$$W = W_0 \varphi^{n-1}, \quad (14)$$

где

$$W_0 = -\frac{M_0 n}{t_f - t_0}. \quad (15)$$

Исключив в (13) и (14) функцию от времени, получим зависимость  $W$  от  $M_w$

$$\frac{W}{W_0} = \left(\frac{M_w}{M_0}\right)^{(n-1)/n}. \quad (16)$$

С помощью соотношения (16) исключим  $W$  в (12):

$$U_w = U_{w0} \left(\frac{M_w}{M_0}\right)^{(n-\mu)/\mu n}, \quad P_w = P_{w0} \left(\frac{M_w}{M_0}\right)^{2(n-\mu)/\mu n}, \quad F_w = F_{w0} \left(\frac{M_w}{M_0}\right)^{2(n-\mu)/\mu n}. \quad (17)$$

Поскольку  $M_w$  и  $t$  связаны уравнением траектории ударной волны, то из (13) и (17) следуют зависимости  $U_w$ ,  $P_w$ ,  $F_w$  от  $t$ :

$$U_w = U_{w0} \varphi^{(n-\mu)/\mu}, \quad P_w = P_{w0} \varphi^{2(n-\mu)/\mu}, \quad F_w = F_{w0} \varphi^{2(n-\mu)/\mu}. \quad (18)$$

Величина  $F_w$  вдоль траектории частицы с координатой  $M_w$  постоянна. Следовательно, зависимость энтропии от массы между ударной волной и границей газа имеет вид

$$F = F_{w0} \left(\frac{M}{M_0}\right)^{2(n-\mu)/\mu n}. \quad (19)$$

Из (5) следует зависимость  $r_w$  от  $M_w$

$$r_w = r_0 \left(\frac{M_w}{M_0}\right)^{1/\mu}. \quad (20)$$

Выбор траектории УВ в форме (13) определяет характер зависимостей  $W$  и  $D$  от  $M_w$ . При  $n < 1$   $W \rightarrow -\infty$ , если  $M_w \rightarrow 0$ , при  $n = 1$   $W = W_0 = \text{const}$  и при  $n > 1$  уменьшается при уменьшении  $M_w$ . Эти типы зависимостей приведены на рис. 1. Зависимость  $D$  от  $M_w$  следует из (7) и (20)

$$\frac{D}{D_0} = \left(\frac{M_w}{M_0}\right)^{(n-\mu)/\mu n}. \quad (21)$$

Из (21) следует, что при  $n < \mu$   $D \rightarrow -\infty$ , если  $M_w \rightarrow 0$ , при  $n = \mu$   $D = D_0 = \text{const}$  и при  $n > \mu$   $D \rightarrow 0$  при уменьшении  $M_w$  (рис. 2). Фактическая реализация одного из этих режимов возможна лишь при организации соответствующего течения газа между фронтом УВ и наружной границей.

### Течение газа за ударной волной

Параметры адиабатического течения за ударной волной определяются уравнениями, траектории, сохранения массы и движения:

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_M - U = 0, \quad (22)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_M + s_\mu \rho^2 \frac{\partial (r^{\mu-1} U)}{\partial M} = 0, \quad (23)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_M + s_\mu r^{\mu-1} \frac{\partial (F \rho^\gamma)}{\partial M} = 0. \quad (24)$$

Эти уравнения содержат три искоемых функции  $r$ ,  $\rho$  и  $U$ . Величина  $F$  определяется на ударной волне и зависит только от  $M$  (17).

Перейдём в (22)–(24) к новым искомым функциям

$$R = r^\mu, \quad C = r^{\mu-1}U. \quad (25)$$

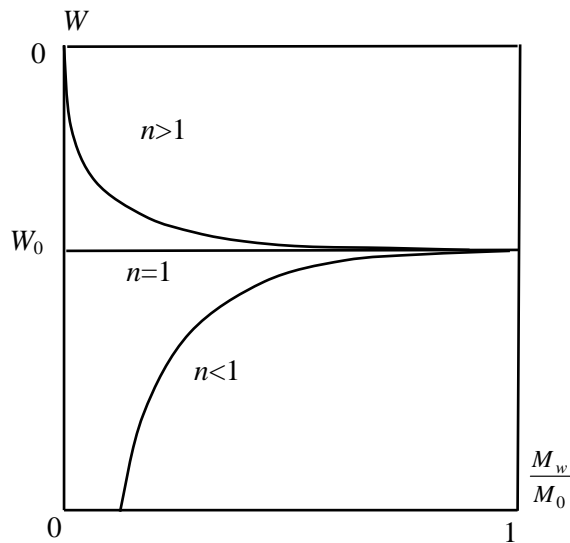


Рис. 1. Схематическое изображение  
возможных зависимостей  $W(M_w)$

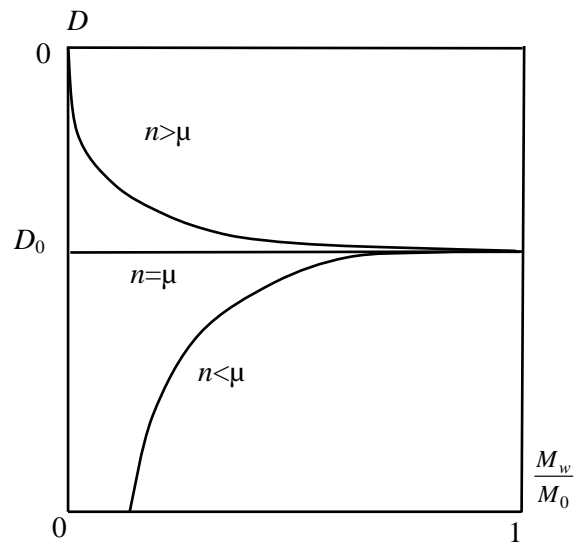


Рис. 2. Схематическое изображение  
возможных зависимостей  $D(M_w)$

После перехода к функциям  $R$  и  $C$  уравнения (22)–(24) примут вид:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)_M - \mu C = 0, \quad (26)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_M + s_\mu \rho^2 \frac{\partial C}{\partial M} = 0, \quad (27)$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_M + s_\mu R^{2(\mu-1)/\mu} \frac{\partial(F\rho^\gamma)}{\partial M} - 2C^2 R^{-1} = 0. \quad (28)$$

Из (17), (19) и (25) следуют зависимости  $R_w$  и  $C_w$  от  $M_w$ :

$$R_w = R_0 \frac{M_w}{M_0}, \quad C_w = C_0 \left(\frac{M_w}{M_0}\right)^{(n-1)/n}. \quad (29)$$

Уравнения (26)–(28) являются основными для отыскания  $R$ ,  $C$  и  $\rho$  в области интегрирования  $M_w \leq M \leq M_0$ ,  $t_0 \leq t \leq t_f$ .

Перейдём от переменных  $t, M$  к переменным  $t, \xi(t, M)$ . С помощью уравнений для производных

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_M = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\xi + \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_M, \quad \left(\frac{\partial}{\partial M}\right)_t = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial M}\right)_t$$

преобразуем уравнения (26)–(28)

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)_\xi + \left(\frac{\partial R}{\partial \xi}\right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_M - \mu C = 0, \quad (30)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_\xi + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_M + s_\mu \rho^2 \left(\frac{\partial C}{\partial \xi}\right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial M}\right)_t = 0, \quad (31)$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_\xi + \left(\frac{\partial C}{\partial \xi}\right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_M - \frac{(\mu-1)C^2}{R} + s_\mu R^{2(\mu-1)/\mu} \left[ \rho^\gamma \left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial M}\right)_t + \gamma F \rho^{\gamma-1} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial M}\right)_t \right] = 0. \quad (32)$$

Зависимость  $\xi(t, M)$  зададим так, чтобы на ударной волне было  $\xi = 1$ . Из (13) следует, что проще всего взять такую зависимость в виде

$$\xi = \frac{M}{M_0} \varphi^{-n}. \quad (33)$$

Для разделения переменных представим  $R$ ,  $\rho$  и  $C$  в виде произведений функций от времени на функции от  $\xi$

$$R = \alpha_R(t)T(\xi) \quad \rho = \alpha_\rho(t)\delta(\xi) \quad C = \alpha_C(t)Z(\xi). \quad (34)$$

Поскольку на ударной волне  $\xi = 1$ , то значения  $T_1 = T(1)$ ,  $\delta_1 = \delta(1)$ ,  $Z_1 = Z(1)$  должны быть постоянными. Из (29) и (33) следует зависимость  $R_w(t)$

$$R_w = R_0 \varphi^n. \quad (35)$$

Сравнив эту зависимость с (34) на ударной волне, получим выражение для  $\alpha_R$

$$\alpha_R(t) = R_0 \varphi^n T_1^{-1}. \quad (36)$$

Аналогично для  $\alpha_\rho$  и  $\alpha_C$  получаем соотношения

$$\alpha_\rho = \rho_0 \left( \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \delta_1^{-1}, \quad \alpha_C(t) = C_0 \varphi^{n-1} Z_1^{-1}. \quad (37)$$

Подставив (34)–(37) в (30)–(32) и воспользовавшись (15), получим три уравнения для  $T$ ,  $\delta$  и  $Z$ :

$$\xi T' = A_1, \quad (38)$$

$$\delta_1 B_1 Z' - \xi Z_1 \delta' = 0, \quad (39)$$

$$-\frac{\xi}{Z_1} Z' + \frac{C_1 \gamma \xi}{\delta_1} \delta' = C_2, \quad (40)$$

где штрих означает дифференцирование по  $\xi$ . Коэффициенты уравнений (38)–(40)  $A_1, B_1, C_1, C_2$  с помощью (5), (6), (12) и (23) преобразуются к виду

$$A_1 = T - \frac{2ZT_1}{(\gamma+1)Z_1}, \quad B_1 = \frac{2\delta^2}{(\gamma-1)\delta_1^2}, \quad C_1 = \frac{\delta^{\gamma-1} T^{2(\mu-1)/\mu} \xi^{-((\mu-2)n+2\mu)/\mu n}}{\delta_1^{\gamma-1} T_1^{2(\mu-1)/\mu}}, \quad (41)$$

$$C_2 = \frac{2(\mu-1)Z^2 T_1}{\mu(\gamma+1)Z_1^2 T} - \frac{(n-1)Z}{nZ_1} - C_1 \frac{2(n-\mu)\delta}{\mu n \delta_1}.$$

Уравнения (38)–(40) образуют относительно  $T'$ ,  $\delta'$ ,  $Z'$  систему линейных неоднородных уравнений. Определитель системы равен

$$\Delta = B_1 C_1 \gamma \xi - \xi^2.$$

Если  $\Delta \neq 0$ , то решение системы (37)–(39) существует и имеет вид

$$T' = \frac{A_1}{\xi}, \quad \delta' = \frac{B_1 C_2 \delta_1}{\Delta}, \quad Z' = \frac{\xi C_2 Z_1}{\Delta}. \quad (42)$$

Интегрирование системы уравнений (42) начинается в точке  $\xi = 1$  (на ударной волне). Расчёты показывают, что существует промежуток значений  $n$  таких, что определитель в ноль не обращается. При некотором значении  $n_*$  определитель обращается в ноль при  $\xi = \xi_*$ . В этой точке решение существует, если  $C_2$  тоже обращается в ноль. Каждому значению  $\gamma$  соответствует одно значение  $n_*$  (таблицу). В этой же таблице приведены значения  $\xi_*$ , при которых одновременно  $\Delta(\xi_*) = 0$ ,  $C_2(\xi_*) = 0$ .

В лагранжевых координатах построено аналитическое решение одномерной задачи о сходящейся ударной волне для трех типов симметрии, и для широкого диапазона показателей адиабаты идеального газа найдены соответствующие показатели автомодельности.

Значения  $n_*$  и  $\xi_*$ , соответствующие различным значениям показателя адиабаты  $\gamma$

$\mu$	$\gamma$	1,1	1,2	4/3	1,4	5/3
1	$n_*$	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
	$\xi_*$	4,691312	3,464715	2,828906	2,646222	2,236450
2	$n_*$	1,770501	1,722331	1,684516	1,670651	1,631252
	$\xi_*$	6,768540	4,873946	3,896265	3,616019	2,990161
3	$n_*$	2,387916	2,271434	2,183068	2,151532	2,065135
	$\xi_*$	7,959997	5,717071	4,559431	4,227062	3,481885

Статья выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление № 211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.A03.21.0011.

#### Литература

1. Guderley, G. Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstöße in der Nahe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse / G. Guderley // Luftfahrtforschung. – 1942. – Т. 19, № 9. – С. 302–312.
2. Седов, Л.И. О неустановившихся движениях сжимаемой жидкости / Л.И. Седов // Доклады Академии наук СССР. – 1945. – Т. 47, № 2. – С. 94–96.
3. Станюкович, К.П. Автомодельные решения уравнений гидромеханики, обладающих центральной симметрией / К.П. Станюкович // Доклады Академии наук СССР. – 1945. – Т. 48, № 5. – С. 331–333.
4. Брушлинский, К.В. Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики / К.В. Брушлинский, Я.М. Каждан // Успехи математических наук. – 1963. – Т. 18, № 2. – С. 3–23.
5. Седов, Л.И. Методы подобия и размерности в механике / Л.И. Седов. – Москва: Гостехиздат, 1954. – 328 с.
6. Сидоров, А.Ф. Процессы безударного конического сжатия и разлета газа / А.Ф. Сидоров, О.Б. Хайруллина // Прикладная математика и механика. – 1994. – Т. 58, № 4. – С. 81–92.
7. Сидоров, А.Ф. Об оптимальном безударном сжатии газовых слоев / А.Ф. Сидоров // Доклады Академии наук СССР. – 1990. – Т. 313, № 2. – С. 283–287.
8. Крайко, А.Н. Сферически и цилиндрически симметричное нестационарное сжатие идеального газа / А.Н. Крайко // VII Забабахинские научные чтения, Снежинск, 8–12 сентября 2003. <http://www.vniitf.ru/rig/konfer/7zst/reports/s6/6-1.pdf>
9. Крайко, А.Н. Быстрое цилиндрически и сферически симметричное сильное сжатие идеального газа / А.Н. Крайко // Прикладная математика и механика. – 2007. – Т. 71, № 5. – С. 744–760.
10. Куропатенко, В.Ф. Модели механики сплошных сред / В.Ф. Куропатенко. – Челябинск: Челябинский государственный университет, 2007. – 302 с.
11. Куропатенко, В.Ф. Динамическое сжатие холодного газового шара / В.Ф. Куропатенко, Е.С. Шестаковская, М.Н. Якимова // Доклады академии наук. – 2015. – Т. 461, № 5. – С. 530–532.
12. Kuropatenko, V.F. Analytical solution of the problem of a shock wave in the collapsing gas in Lagrangian coordinates. / V.F. Kuropatenko, E.S. Shestakovskaya // AIP Conference Proceedings. – 2016. – Vol. 1770, Issue 1. – P. 030069.

Поступила в редакцию 18 сентября 2017 г.

**ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF A CONVERGENT SHOCK  
IN GAS FOR ONE-DIMENSIONAL CASE****V.F. Kuropatenko<sup>1,2</sup>, F.G. Magazov<sup>2</sup>, E.S. Shestakovskaya<sup>2</sup>**<sup>1</sup> Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Scientific Research Institute of Technical Physics, Snezhinsk, Russian Federation<sup>2</sup> South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: leshest@list.ru

The analytical solution of the problem of a convergent shock in the vessel with an impermeable wall is constructed for the cases of planar, cylindrical and spherical symmetry. The negative velocity is set at the vessel boundary. The velocity of cold ideal gas is zero. At the initial time the shock spreads from this point into the center of symmetry. The boundary moves under the particular law which conforms to the movement of the shock. In Euler variables it moves but in Lagrange variables its trajectory is a vertical line. Equations that determine the structure of the gas flow between the shock front and the boundary as a function of time and the Lagrange coordinate as well as the dependence of the entropy on the shock wave velocity are obtained. Self-similar coefficients and corresponding critical values of self-similar coordinates were found for a wide range of adiabatic index. Thus, the problem is solved for Lagrange coordinates. It is fundamentally different from previously known formulations of the problem of the self-convergence of the self-similar shock to the center of symmetry and its reflection from the center which has been constructed for the infinite area in Euler coordinates.

*Keywords:* shock wave; planar symmetry; cylindrical symmetry; spherical symmetry; ideal gas; analytical solution.

**References**

1. Guderley G. *Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstöße in der Nahe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse*. Luftfahrtforschung, 1942, Vol. 19, no. 9, pp. 302–312.
2. Sedov L.I. *Doklady Akademii nauk SSSR*, 1945, Vol. 47, no. 2, pp. 94–96. (in Russ.).
3. Stanyukovich K.P. *Doklady Akademii nauk SSSR*, 1945, Vol. 48, no. 5, pp. 331–333. (in Russ.).
4. Brushlinskiy K.V., Kazhdan Ya.M. *Russian Mathematical Surveys*, 1963, Vol. 18, no. 2, pp. 1–22. DOI: 10.1070/RM1963v018n02ABEH001133
5. Sedov L.I. *Metody podobiya i razmernosti v mekhanike*. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1954, 328 p. (in Russ.).
6. Sidorov A.F., Khayrullina O.B. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1994, Vol. 58, no. 4, pp. 81–92. (in Russ.).
7. Sidorov A.F. *Doklady Akademii nauk SSSR*, 1990, Vol. 313, no. 2, pp. 283–287. (in Russ.).
8. Krayko A.N. Sfericheski i tsilindricheski simmetrichnoe nestatsionarnoe szhatie ideal'nogo gaza (Spherically and cylindrically symmetric nonstationary compression of an ideal gas). *VII Zababakhinskie nauchnye chteniya* (Proc. VII Zababakhin Scientific Talks Conference), Snezhinsk, 2003. <http://www.vniitf.ru/rig/konfer/7zst/reports/s6/6-1.pdf> (in Russ.).
9. Krayko A.N. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2007, Vol. 71, no. 5, pp. 744–760. (in Russ.).
10. Kuropatenko V.F. *Modeli mekhaniki sploshnykh sred* [Models of continuum mechanics]. Chelyabinsk: Chelyabinskiy gosudarstvennyy universitet Publ., 2007, 302 p. (in Russ.).
11. Kuropatenko V.F., Shestakovskaya E.S., Yakimova M.N. Dynamic compression of a cold gas sphere. *Doklady Physics*, 2015, Vol. 60, Issue 4, pp. 180–182. DOI: 10.1134/S1028335815040059
12. Kuropatenko V.F., Shestakovskaya E.S. Analytical solution of the problem of a shock wave in the collapsing gas in Lagrangian coordinates. *AIP Conference Proceedings*, 2016, Vol. 1770, Issue 1, p. 030069. DOI:10.1063/1.4964011

*Received September 18, 2017*