Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет
(Национальный исследовательский университет) »

Институт естественных и точных наук
Факультет математики, механики и компьютерных технологий
Кафедра математического анализа и МПМ

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Рецензент
к.п.н.
__________/Г.С.Кочеткова/
“_____” _________ 2019 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой,
д.ф.-м.н.,доцент
___________/В.Л.Дильман/
“_____” _________ 2019 г.

РАЗРАБОТКА УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА «ОЛИМПИАДНАЯ ПОДГОТОВКА ПО МАТЕМАТИКЕ В 5-6 КЛАССАХ»

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
ЮУрГУ – 01.04.02–2019–129-06–046. ВКР

Руководитель работы
к.ф.-м.н., доцент
___________/ М.А.Корытова/
“_____” __________2019 г.

Автор
Студентка группы ИЕТН-223
_________/Д.В. Лягун /
“_____” _________ 2019 г.

Нормоконтролер
ассистент кафедры МАиМПМ,
___________/А.Н.Пермина /
“____” __________ 2019 г.

Челябинск
2019

Оглавление

Введение

В последние годы в России проводится много различных математических олимпиад. Это традиционные (региональные), олимпиады для абитуриентов, комплексные межпредметные и другие. Традиционные олимпиады проходят, как правило, в пять туров: школьный, районный (городской), областной (краевой, республиканский), зональный (окружной) и всероссийский. Данный вид олимпиад продолжает быть самым массовым и популярным как среди учащихся, так и среди учителей. Наряду с традиционными олимпиадами большой популярностью пользуются командные олимпиады (проходящие в рамках турниров городов, математические бои). Олимпиады для абитуриентов вузов, нестандартные олимпиады, различного рода заочные олимпиады.

Популярность традиционных олимпиад высока, однако все меньше регионов проводят олимпиады для 5-6 классов, хотя именно в этом возрасте дети наиболее любознательны, восприимчивы к новой информации и проявляют интерес к участию в различных соревнованиях. Основной формой работы с наиболее способными учащимися являются кружки. Именно на таких занятиях можно рассматриваются нестандартные задачи. К ним относятся, например, задачи на раскраски, на применение принципа Дирихле, графов и т.д.

Поэтому целью данной работы было создание пособия для организации работы кружков по подготовке к математическим олимпиадам в 5-6 классах. В пособии приводятся примерные тексты олимпиадных задач, проводившихся в разное время. Задачи классифицированы по темам.

Глава 1. Олимпиадная подготовка.

1 Основные принципы в работе с одаренными детьми.

При подготовке обучающихся к олимпиадам следует придерживаться нескольких основных принципов:

1. Максимальная самостоятельность – детям нужно давать больше возможностей самим решать задачи. Наиболее глубокие знания это те, к которым ученик пришел при помощи собственных умозаключений. Этот принцип подразумевает ненавязчивый контроль учителя, групповой разбор и анализ сложных задач.
2. Принцип опережения уровня сложности. Чтобы занимать призовые места на олимпиадах, необходимо при подготовке тренироваться на достаточно сложных задачах. С точки зрения психологии, такая тактика позволит ученику чувствовать себя более уверенно на олимпиаде.
3. Анализ прошлых результатов. Анализируя предыдущие олимпиады, можно увидеть недочеты как со стороны ученика, так и со стороны педагога.
4. Принцип индивидуальности. Индивидуальный подход к ученику позволяет наиболее эффективно преподнести новую информацию, научить видеть различные варианты решений.
5. Психологический аспект. Необходимо поддерживать стремление к победе, научить ребенка верить в свои силы и верно оценивать свои возможности.

2 Психолого-педагогическое сопровождение процесса подготовки обучающихся к олимпиаде

Подготовка и участие в предметной олимпиаде – это достаточно тяжелый и напряженный процесс, требующий от ученика и педагога много сил и времени.

Возникает проблема: «Как подготовить ученика к олимпиаде, максимально реализовать его потенциал, и сохранить при этом психологическое и физическое здоровье?».

Для решения этой проблемы необходимо создать ребенку правильную среду для развития, где каждый педагог умеет грамотно работать с одаренными и способными детьми. По мнению Сафонофой И.В. к группе одарённых детей могут быть отнесены дети, которые:

- имеют более высокие по сравнению с большинством остальных интеллектуальные способности;

- имеют доминирующую, активную, не насыщаемую познавательную потребность;

- испытывают радость от умственного труда;

- для таких детей характерна высокая скорость развития интеллектуальной и творческой сфер, глубина и не традиционность мышления. [7]

Условно можно выделить следующие группы одаренности:

1. Ученики с очень высоким уровнем умственного развития.

2. Ученики с задатками умственной одаренности в конкретной области.

3. Ученики, не достигающие хороших успехов в обучении, но обладающие высокой познавательной активностью, нестандартным мышлением.

При подготовки одаренного ребенка необходимо отталкиваться от его индивидуальности. Основой данного процесса должна стать выработка у обучающегося индивидуального стиля деятельности, который позволяет с одной стороны рассматривать процесс подготовки к олимпиаде, как результат его индивидуальной работы, а с другой – комплексно учитывает его индивидуально-психологические особенности. Е.А.Климов рассматривал индивидуальный стиль деятельности (ИСД), как «своеобразную систему психологических средств, к которым сознательно или стихийно прибегает человек в целях наилучшего уравновешивания своей индивидуальности с требованиями деятельности. Формирование индивидуального стиля деятельности - это путь достижения оптимальной продуктивности деятельности». [3] Помочь обучающемуся выработать свой индивидуальный стиль деятельности, наполнить деятельность личностным смыслом – задача, которую необходимо ставить перед собой в процессе подготовки обучающихся к олимпиадам.

Хочется отметить важность роли учителя в олимпиадной подготовке. Именно учитель создают среду, способствующую усвоению знаний, умственном развитию. Некоторые олимпиадные задачи непросто решаются и учителем. Чтобы воспитать сильного олимпиадника, учителю необходимо обладать достаточно высоким уровнем знаний в своей дисциплине.

Благодаря своим знаниям и верной методики преподавания учитель сможет поставить посильную цель для ученика, тем самым подкрепить его интерес к получению все новой и новой информации, способствовать развитию нестандартного мышления.

В 5-6 классах очень важно, для дальнейшего успеха ученика в олимпиадной математике, сформировать базовые знания, научить чувствовать задачи. Поэтому на занятиях кружка порой разбираются на первый взгляд несложные темы. Но, на примере таких задач, ребенок изучает различные методы решения, развивает нестандартность мышления, учится применять различные подходы к решению задач.

Глава 2. Учебно-методический комплекс.

1 Арифметика и весы

Одна из начальных тем на занятиях олимпиадной подготовки, достаточно легка в понимании для детей. На данных задачах дети учатся составлять и работать со схемами, делать логические выводы из полученных равенств. Не требует особой математической подготовки. Параллельно идет отработка умения решения уравнений.

1) Три носорога весят столько же, сколько четыре бегемота и один крокодил. Кто тяжелее: носорог или бегемот? [4]

   Решение. Можно составить равенство: 3Н=4Б+1К. Левую часть оставим без изменения, а справа уберем 1 бегемота и 1 крокодила, тем самым уравняли численное значение животных. Равенство нарушится. 3Н>3Б

   А значит, один носорог тяжелее бегемота.

2) 3 карася тяжелее 4 окуней. Что тяжелее: 4 карася или 5 окуней? [4]

   Решение. 4 карася тяжелее. Составим такую схему: 3 карася > 4 окуня. Так как количество карасей меньше, но вес их больше, то значит, один карась тяжелее одного окуня. Если левую часть неравенства добавить ещё одного карася, а справа еще одного окуня, то левая часть останется больше (так как к большему добавили большее).

3) Груша и слива весят столько, сколько 2 яблока; 4 груши весят столько, сколько 5 яблок и 2 сливы. Что тяжелее: 7 яблок или 5 груш? [4]

   Решение. 5 груш тяжелее. Из условия задачи составим два равенства 2 яблока = груша + слива, 5 яблок + 2 сливы = 4 груши

   Сложив их левые и правые части соответственно, получим:

   7 яблок + 2 сливы = 5 груш + слива

   Из обеих частей равенства мы можем убрать одинаковые фрукты, не нарушив при этом само равенство:

   7 яблок + слива = 5 груш

Получается, если убрать сливу, то 5 груш будут тяжелее 7 яблок.

4) Маленькому Гоше подарили весы, и он начал взвешивать игрушки. Машину уравновесили мяч и 2 кубика, а машину с кубиком уравновесили 2 мяча. Сколько кубиков уравновесят машину? [4]

Решение. Машину уравновесят 5 кубиков. По условию машина = мяч + 2 кубика. Тогда 2 машины = 2 мяча + 4 кубика. Но также по условию 2 мяча по весу равны машине и кубику. Значит, 2 машины = машина + кубик + 4 кубика. Убираем из обеих частей "равенства" по машине: машина = 5 кубиков.

5) ООО «Метрострой» нанял двух кротов рыть туннель. Первый крот работает быстрее второго, но платят обоим одинаково, учитывая только время. Что выгоднее: чтобы первую половину тоннеля выкопал один крот, а вторую — другой; или, чтобы они начали копать с двух сторон одновременно и копали бы до встречи? [4]

Решение. Разобьем туннель на равные очень небольшие участки. За каждый участок нужно платить в зависимости от того, за какое время он прорыт: чем быстрее, тем меньше платят. Так как первый крот роет быстрее, то платить ему нужно меньше. Следовательно, выгоднее, чтобы он прорыл как можно большую часть тоннеля. Если каждый будет копать свою часть, то первым кротом будет прорыта ровно половина туннеля. А если копать до встречи, то так как первый копает быстрее, то эта встреча произойдёт на половине второго, а значит, второй пророет больше половины. [4]

6) 9 одинаковых конфет стоят 11 рублей с копейками, а 13 таких же конфет — 15 рублей с копейками. Сколько стоит одна конфета? [4]

Решение. 1руб 23 коп. Используя первое условие выполним оценку. 9 конфет стоят 11 рублей с копейками, т.е. не меньше 11 рублей, что составляет 1100 копеек. Значит, одна конфета не может стоить меньше 123 копеек, т.е. 1 р. 23 коп. С другой стороны, 13 конфет стоят 15 рублей с копейками, т.е. строго меньше 16 рублей, что составляет 1600 копеек. Значит, одна конфета не может стоить больше 123 копеек, т.е. 1 р. 23 коп. [4]

7) В трёх ящиках лежат орехи. В первом на 6 орехов меньше, чем в двух других вместе, а во втором на 10 орехов меньше, чем в первом и третьем. Сколько орехов в третьем ящике? [4]

   Решение. Обозначим количество орехов в ящиках a, b, c соответственно. Тогда условие задачи можно записать так:

   $a + 6 = b + c$

   $b + 10 = a + c$.

   Сложив эти равенства, получим: $a + b + 16 = a + b + c + c$.

   Убираем одинаковые буквы-ящики: $16 = c + c$.

   А значит, одно c равно 8, т.е. в третьем ящике 8 орехов.

8) Малышу и Карлсону дали по одинаковому пирогу. Карлсон начал есть свой пирог на минуту позже Малыша, а через две минуты после этого оказалось, что Карлсон уже съел столько, сколько еще осталось съесть Малышу. Докажите, что если бы Малыш и Карлсон ели один пирог вдвоем, то они управились бы с ним меньше, чем за три минуты. [4]

   Решение. Из того что Карлсон уже съел столько, сколько еще осталось съесть Малышу, следует, что если бы они ели не два пирога, а один и тот же, то он был бы съеден. При этом в течение этих трёх минут Карлсон ел не всё время. Значит, если бы они с Малышом начали есть один пирог, причём одновременно, то они управились бы с ним меньше, чем за три минуты.

2 Четность.

Понятие четности числа одно из ключевых при развитии математической культуры ученика. Понятие достаточно несложное и не вызывает затруднений у учащихся. Однако уровень задач на эту тему достаточно разнообразен, от достаточно простых до очень сложных. На задачах данной тематики можно показывать ученикам различные подходы при решении олимпиадных задач, различные идеи (инвариант, периодичность, раскраски и др.). Четность часто используется при решении задач на игры, графы, процессы и др. Для решения задач данной тематики не требуется особых знаний, выходящих за рамки школьной программы, поэтому удобно начинать кружковые занятия. После темы «Четность» полезно рассмотреть тему «Делимость».

1) Кузнечик прыгал вдоль прямой и вернулся в исходную точку. Все прыжки имеют одинаковую длину. Докажите, что он сделал четное число прыжков. [6]

Решение: Важно понять, что чтобы вернуться в исходную точку, нужно сделать столько же прыжков, сколько уже сделано, только в противоположном направлении. Например, сделано 2 прыжка вправо и 5 влево. Тогда кузнечик вернется в исходную точку, если сделает 2 прыжка влево и 5 вправо. Таким образом получается, что кузнечик вернется в исходную точку, повторив общее количество прыжков, т.е количество прыжков будет четное.

2) Числа m и n – целые. Докажите, что число $mn(m+n)$ четно. [6]

Решение. Задача помогает вспомнить основные правила работы с четностью. Для доказательства данного утверждения нужно рассмотреть всевозможные комбинации четных и нечетных чисел и результаты от их суммы и произведения.

m	**n**	**mn**	**m+n**	**mn(m+n)**
ч	ч	ч	ч	ч
н	н	н	ч	ч
ч	н	ч	н	ч

3) Что можно сказать о четности разности двух чисел? [6]

Решение. Четность разности двух чисел подчиняется тем же правилам, что и четность суммы. Этот факт можно сформулировать как правило.

4) Сумма трех чисел нечетна. Сколько слагаемых нечетно? [6]

Решение. Важно вспомнить, что сумма двух чисел одной четности четна. Поэтому, если к двум таким числам добавить нечетное число, то получится нечетная сумма. Таким образом возможно либо 1 нечетное число, либо все 3. В качестве итога полезно будет сформулировать следующее правило: На четность суммы (разности) нескольких чисел, влияет четность количества нечетных слагаемых.

5) Не вычисляя суммы 1+2+…+2018, определить ее четность. [6]

Решение. Четные и нечетные числа чередуются, поэтому среди чисел от 1 до 2018 ровно по 1009 четных и нечетных чисел. 1009 – число нечетное, значит и вся сумма будет числом нечетным.

6) На доске написаны 613 целых чисел. Докажите, что можно стереть одно число так, что сумма оставшихся чисел будет четной. Верно ли это для 612 чисел? [6]

Решение. Рассмотрим сумму исходных 613 чисел, она либо четна, либо нечетна.

Если сумма четна, то четно и число нечетных слагаемых. Но чисел 613, значит существует хотя бы одно четное число, именно его можно стереть и при этом сумма оставшихся чисел будет четной.

Если же сумма всех 613 чисел нечетное число, то нечетно и число нечетных слагаемых. Можно сделать вывод, что нечетных чисел больше 0, т.к. 0 число четное. Поэтому мы всегда сможем сделать четное количество нечетных чисел, убрав одно из них. Тем самым сумма оставшихся 612 чисел будет четный. Таким образом, вне зависимости от четности исходной суммы, убрать одно число и оставить четную суммы мы сможем всегда.

Если же изначально слагаемых 612, то можно привести пример, показывающий, что сделать четную сумму невозможно. Если все 612 числе нечетные, то при стирании любого числа сумма оставшихся будет нечетна.

7) В ряд выписаны все числа от 1 до 2018. Требуется расставить между ними знаки «+» и «-» так, чтобы полученное выражение равнялось нулю. Удастся ли это сделать? [6]

Решение. Нет. Вспомним, что на четность числа не влияет знак «+» или «-», а только количество нечетных чисел в ряду. 1009 нечетных чисел говорит нам о том, что в любом случае сумма будет нечетна. Поэтому 0 (четное число) получить невозможно.

8) Возможно ли 33 компьютера соединить между собой проводами так, чтобы каждый был соединен с 13?

Решение. Предположим, что это возможно. Подсчитаем тогда число соединений: $33 \cdot 13 = 429$. Компьютеры соединяются между собой проводами, но у одного провода два конца, следовательно и два соединения. Таким образом число соединений должно быть четным (не существует провода, подсоединенного только к одному компьютеру). 429 – нечетно. Получили противоречие.

9) Можно ли числа 1, …, 21 разбить на несколько групп так, чтобы в каждой из них максимально число равнялось сумме остальных? [6]

Решение. Нельзя. При таком разбиении на группы, сумма чисел в каждой группе будет четной. А значит сумма всех сумм групп тоже будет числом четным, но $1 + 2 + \cdots + 21 = (1 + 21) \cdot 10 + 11 = 231$- нечетное. Получили противоречие, значит невозможно.

10) На столе лежат шесть столбиков монет. В первом столбике одна монета, во втором – две монеты, … , в шестом – шесть. Разрешается на любые два столбика положить по монете. Можно ли за несколько таких операций сделать все столбики одинаковыми? [6]

Решение. Нельзя. Сделать все столбики одинаковыми, значит уравнять количество монет. Т.е. всего монет в шести столбиках должно получится четное количество. Подсчитаем исходное количество монет: 1+2+3+4+5+6=21 – нечетно. Добавляя каждую операцию по 2 монеты, четность общего количества монет останется прежней. Значит невозможно уравнять все столбики, добавляя каждый раз только 2 монеты.

11) Как изменится ответ, если в последнем столбике не шесть монет, а семь? [6]

Решение. Можно. Подсчитав общее количество монет (22) можно предположить, что возможно уровнять, однако этого недостаточно. Необходимо привести пример.

1. Добавим по 1 монете к первому и пятому столбцу.
2. Добавим по 1 монете к третьему и пятому столбцу

Получили следующую расстановку: 1-2, 2-2, 3-4, 4-4, 5-7, 6-7.

Осталось к первым двум столбикам добавить по 5 монет, к 3 и 4 столбикам – по 3 монеты.

12) Числа 1, 2, …., 714 записаны по порядку. Разрешается менять местами числа, стоящие через одно (например 3 и 5). Можно ли с помощью таких перестановок расположить все числа в обратном порядке? [6]

Решение. Нельзя. Можно заметить, что при таких перестановках четные числа меняются местами с четными, а нечетные - с нечетными. Расположить числа в обратном порядке, значит число 1 поставить на место числа 714. Но эти два числа разной четности, значит мы не сможем поменять их местами.

13) На доске написаны числа 1, 2, …,101. Разрешается стереть любые два числа и написать вместо них их разность. Так продолжается до тех пор, пока на доске не останется одно число. Может ли это быть 0? [6]

Решение. Нет. Для начала заметим, что сумма чисел на доске нечетная (51 нечетное число, 50 четных). Рассмотрим два случая.

1. Если мы будем убирать числа разной четности. Разность этих чисел будет числом нечетным, соответственно такой операцией мы из общего количества убрали одно четное, а нечетное заменили другим нечетным. Нечетность суммы сохраниться.

2. Если убирать числа одной четности, то все четные числа уйдут, а из нечетных останется одно число (точно не 0).

Получается, какие бы два числа не стирали, 0 получить не получится.

14) Круг разбит на 6 секторов. В секторах стоят фишки (сначала в каждом по одной). За один ход разрешается передвинуть две фишки на один сектор в противоположных направлениях. Можно ли за несколько ходов собрать все фишки в одном секторе? Если секторов 12? [6]

Решение. Нельзя ни для 6, ни для 12 секторов.

Занумеруем сектора цифрами 1, 2, …, 5, 6. Будем считать, что фишка имеет тот же номер, что и сектор, в котором она находится. Таким образом, изначально у нас есть фишки с номерами 1,2,…6. Посмотрим что происходит с номерами фишек при передвижении. Т.к. они перемещаются на соседний сектор в противоположных направлениях, то номера каждой фишки меняют четность на противоположную, однако четность суммы всех номеров фишек остается неизменной. (Нечетной. Изначально 1+2+…+6=21.) Если бы все фишки стояли в одном секторе, то сумма номеров была бы четная (6 одинаковых номеров).

Занумеруем сектора цифрами 1, 2, ..., 11,12. Сумма номеров фишек изначально четная. Рассуждая аналогично, можно прийти к выводу, что можно. Но рассмотрим номера фишек при передвижении более внимательно. У одной фишки номер увеличивается на 1, а у другой уменьшается на ту же 1. Т.е. сумма номеров остается неизменной. Кроме нескольких узких моментов:

1. Фишка с номером 12 становится в сектор 1 (номер стал меньше на 11), а другая фишка уменьшила свой номер на единицу.

2. Фишка с номером 1 становится в сектор 12 (номер стал больше на 11), а другая фишка увеличила свой номер на единицу.

В обоих случаях сумма номеров фишек изменилась на 12, а 12 кратно 4. Т.е. если такая ситуация возможна (все 12 фишек в одном секторе), то исходная сумма номеров тоже должна быть кратна 4 , но это не так ($1+2+\cdots+12=6\cdot 13$).

15) Произведение 22 целых чисел равно 1. Докажите, что их сумма ненулевая. [6]

(На примере данной задачи необходимо сформулировать правила поведения знака «-» при умножении, провести аналогию с четностью)

Решение. Очевидно, что все числа равны ± 1. Пойдем от противного, пусть сумма равна нулю. Тогда среди всех чисел поровну (по 11) отрицательных и положительных единиц. Но если умножить между собой все -1, то произведение получится отрицательным. Получили противоречие.

16) Имеется таблица размером 17×17. В каждой клетке написано какое-то число. Произведение чисел в каждой строке отрицательно. Докажите, что найдется столбец, произведение чисел в котором тоже отрицательно. [6]

Решение. Из условия понятно, что в каждой строке нечетное количество отрицательных чисел и 0 нет. Строк 17, а значит таблица в целом содержит нечетное число отрицательных чисел. Следовательно, найдется хотя бы один столбец с нечетным числом отрицательных чисел и произведение чисел этого столбца будет отрицательным.

3 Делимость.

Прежде чем приступить к решению задач, необходимо вспомнить с признаки делимости, некоторые из них изучаются на уроках математики в 5 классе.

Натуральное число делится на 3 тогда и только тогда, когда его сумма цифр делится на 3.

Натуральное число делится на 9 тогда и только тогда, когда его сумма цифр делится на 9.

Натуральное число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра чётна.

Натуральное число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра равна 0 или 5.

Натуральное число делится на 4 тогда и только тогда, когда число, образованное его двумя последними цифрами (в том же порядке), делится на 4.

Натуральное число делится на 8 тогда и только тогда, когда число, образованное его тремя последними цифрами (в том же порядке), делится на 8**.** [1]

После формулировок принципов, полезно необходимо обсудить с детьми свойства делимости:

I. Если A делится на M и B делится на M, то A+B делится на M.

II. Если A делится на M, B – любое число, то AB делится на M.

III. Если A делится на B, а B делится на M, то A делится на M.

IV. Если AB делится на M, и числа B и M взаимно простые, то A делится на M.

1) Вовочка написал в тетради число 65349*0712 в качестве примера числа, которое делится: **а)** на 9; **б)** на 3. (На месте звёздочки когда-то была написана цифра, а теперь там пятно от сладкого чая.) Помогите Вовочке восстановить пропущенную цифру. Укажите все возможные варианты! [1]

Решение а) 8; б) 2, 5 или 8. Сумма известных цифр числа равна 37. а) Чтобы число делилось на 9, нужно, чтобы его сумма цифр делилась на 9. Это возможно, только если на месте звёздочки стоит цифра 8. б) Чтобы число делилось на 3, нужно, чтобы его сумма цифр делилась на 3. Это возможно, только если на месте звездочки стоит одна из цифр 2, 5, 8.

2) Запишем подряд цифры от 1 до 9, получим число 123456789. Простое оно или составное? Изменится ли ответ в задаче, если каким-то образом поменять порядок цифр в этом числе? [1]

Решение. Составное; не изменится. Легко проверить, что сумма цифр этого числа равна 45 и делится на 9. Значит, в силу признака делимости на 9 и само число делится на 9 и потому составное. При любой перестановке цифр числа сумма этих цифр не изменяется, поэтому число будет по-прежнему делиться на 9 (а значит, будет составным).

3) Делится ли число 32561698 на 12? Решите эту задачу:

а) с помощью признака делимости на 4;

б) с помощью признака делимости на 3. [1]

Решение. Не делится. а) Число оканчивается на 98, а 98 не делится на 4. Поэтому по признаку делимости на 4 число на делится на 4. Но любое число, делящееся на 12, должно делиться и на 4.

б) Сумма цифр числа равна 40, а 40 не делится на 3. Поэтому по признаку делимости на 3 число на делится на 3. Но любое число, делящееся на 12, должно делиться и на 3.

4) Даша и Таня по очереди выписывают на доску цифры шестизначного числа. Сначала Даша выписывает первую цифру, затем Таня — вторую, и так далее. Таня хочет, чтобы полученное в результате число делилось на три, а Даша хочет ей помешать. Кто из них может добиться желаемого результата независимо от ходов соперника? [1]

Решение. Таня. У Тани есть следующая выигрышная стратегия: после очередного хода Даши она должна дописать к числу такую цифру, чтобы в результате сумма цифр числа делилась на 3.Это всегда можно сделать (более того, для этого Тане достаточно использовать цифры 0, 1 и 2). Тогда после каждого хода Тани (в том числе после последнего) написанное на доске число будет делиться на 3, и Таня выиграет.

Упражнение. Попробуйте доказать, что Тане для выигрыша достаточно правильно сделать последний ход (независимо от её предыдущих ходов).

5) В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр — названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9? [1]

Решение. Нельзя. Город 9 соединён авиалиниями только с городами 3 и 6, а города 3 и 6 соединены только между собой и с городом 9. (Это можно проверить непосредственно, а можно упростить проверку, пользуясь признаком делимости на 3.) Поэтому от города 9 нельзя добраться до города 1. Стало быть, невозможно добраться и из города 1 в город 9.

6) Чтобы открыть сейф, нужно ввести код — семизначное число, состоящее из двоек и троек. Сейф откроется, если двоек в коде больше, чем троек, а сам код делится и на 3, и на 4.Какой код может открывать сейф? [1]

Решение. В силу признака делимости на 4 код может оканчиваться только цифрами 32 (другие двузначные числа, составленные из цифр 2 и 3, не делятся на 4).

Двоек в коде больше, чем троек; значит, двоек не меньше четырёх, а троек не больше трёх. Если в коде четыре двойки и три тройки, то сумма цифр кода равна $2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 17$ и не делится на 3, поэтому и сам код не делится на 3.По аналогичной причине код не может состоять из пяти двоек и двух троек (тогда сумма цифр была бы равна $2 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 16$). Значит, код может состоять только из одной тройки и шести двоек (тогда сумма цифр равна $2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 = 15$ и код делится на 3).

Положение единственной тройки в коде мы уже определили, а остальные цифры · двойки. Значит, подходит только код 2222232.

7) Замените звездочки в записи числа 72*4* цифрами так, чтобы это число делилось на 45. Укажите все возможные варианты! [1]

Ответ.72540, 72045, 72945.

8) Докажите, что произведение двух последовательных чётных чисел всегда делится на 8.

Решение: Из двух последовательных чётных чисел одно к тому же обязательно делится на 4 (докажите это аккуратно, пользуясь признаком делимости на 4), поэтому их произведение делится на 8.

9) Может ли произведение четырех последовательных натуральных чисел оканчиваться на 116? [1]

Решение. Среди четырёх последовательных натуральных чисел всегда будут два последовательных чётных числа, так что их произведение должно делиться на 8 по пункту а. А число 116 не делится на 8. Значит, оно не может быть образовано тремя последними цифрами числа, делящегося на 8.

10) Докажите, что из любых семи различных цифр можно составить число, которое делится на четыре. [1]

Решение. Достаточно доказать, что среди любых 7 различных цифр найдутся две, из которых можно составить число, кратное 4. Тогда это число можно будет поставить в конец числа, а остальные цифры расставить в произвольном порядке перед ними. Полученное число будет делиться на 4 в силу признака делимости на 4.Среди 7 различных цифр обязательно найдутся по крайней мере две чётных (иначе среди них было бы по крайней мере 6 нечётных цифр, а нечётных цифр всего 5).Числа, кратные 4, можно составить из «хороших» пар чётных цифр (0, 2), (0, 4), (0, 6), (0, 8), (2, 4), (2, 8), (4, 6), (4, 8) и (6, 8).Остаётся ещё «плохая» пара (2, 6).Если других чётных цифр в наборе нет, то в нём должны содержаться все нечётные цифры (в том числе 1). Тогда, используя имеющиеся в наборе в этом случае цифры 1 и 6,можно составить число 16, кратное 4. Если же в наборе есть другие чётные цифры, то есть по крайней мере одна из «хороших» пар чётных цифр, а этот случай рассмотрен выше.

11) Может ли произведение числа и суммы его цифр равняться 4704? **[1]**

Решение. Не может. Если число делится на 3, то в силу признака делимости и его сумма цифр делится на 3. Тогда произведение числа и суммы его цифр делится на 9.Если же число не делится на 3, то и сумма его цифр не делится на 3, значит, и произведение числа и суммы его цифр не делится на 3.

Таким образом, произведение числа на сумму его цифр либо делится на 9, либо не делится на 3. А число 4704 делится на 3, но не делится на 9.

Упражнение. В условии задачи не сказано, что число должно быть целым. Проверьте, что ответ останется тем же и для дробных чисел, записанных при помощи конечных десятичных дробей.

12) Может ли натуральное число, записываемое с помощью 10 нулей, 10 единиц и 10 двоек, быть квадратом некоторого другого натурального числа? [1]

Решение. Не может. Сумма цифр числа, составленного из таких цифр, равна $10 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 10 \cdot 2 = 30$.Значит, в силу признаков делимости это число делится на 3, но не делится на 9.

Предположим, что искомое число m является квадратом числа n, то есть $m = n^2 = n \cdot n$. Если m кратно 3, то и n кратно 3, а тогда $m = n \cdot n$ должно быть кратно 9.

13) Натуральное число B обладает следующим свойством: для любого числа A, которое делится на B, на B также делятся и все числа, полученные из A перестановкой цифр. Докажите, что B может быть равно только 1, 3 или 9. [1]

Решение. Пусть число B — k-значное. Тогда среди чисел от 10^{k+1} до 10^{k+1}+B ровно одно число делится на B. Пусть это число имеет вид $10m_km_{k-1}...m_1$(в этом решении такая запись означает не произведение нескольких чисел, а одно число, состоящее из цифр1, 0, m_k, m_{k-1}, ..., m_1).Раз делимость на B не зависит от порядка цифр числа, то на B делятся также числа $m_km_{k-1}...m_1 10$ и $m_km_{k-1}...m_1 01$. Значит, и разность этих двух чисел, равная 9, должна делиться на B.А это возможно только при B = 1, B = 3 или B = 9.

14) Написали подряд два раза трехзначное число. Докажите, что полученное число делится на 7, 11 и 13.

Решение. $abcabc = 1000abc + abc = abc(1000 + 1) = 1001abc = 7 \cdot 11 \cdot 13abc$.

15) Написали подряд три раза двузначное число. Докажите, что полученное число делится на 3, 7, 13 и 37.

Решение. $ababab = 101010a + 10101b = 10101(10a + b) = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37(10a + b)$.

4 Принцип Дирихле.

Принцип Дирихле, названный именем автора, немецкого ученого Петера Лежена Дирихле (1805 – 1859), формируется в виде следующей теоремы.

Теорема. Если в n клетках сидят (kn+1) кроликов, то хотя бы в одной клетке кроликов не менее k+1.

Доказательство. Предположим противное: пусть в каждой клетке находятся не более k кроликов, тогда всего в n клетках не более kn кроликов, а их по условию kn+1. Получили противоречие.

Принцип достаточно непрост применимо к задачам, у детей возникают некоторые трудности. Важно понять в условии задачи что есть кролики, а что есть клетки.

1) Восемь кроликов посадили в семь клеток. Докажите, что есть клетка, в которой оказалось по крайней мере два кролика. [5]

Решение. Если бы ни в какой клетке не было двух кроликов, то всего их было бы не больше, чем клеток, то есть, максимум 7. Но кроликов 8, противоречие.

2) За победу в математической регате команда из 4 человек получила 10 конфет. Дети поделили конфеты между собой, не разламывая их. Определите, верны ли следующие утверждения:

а) «кому-то досталось по крайней мере две конфеты»;

б) «кому-то досталось по крайней мере три конфеты»;

в) «двум людям досталось по крайней мере две конфеты»;

г) «каждому досталась хотя бы одна конфета». [5]

Ответ: а) и б) верны, в) и г) нет.

Решение. а) Если бы никому не досталось две конфеты, то конфет всего было бы не больше 4. Но их 10, противоречие.

б) Если бы никому не досталось три конфеты, то конфет всего было бы не больше $2 \cdot 4 = 8$. Но их 10, противоречие.

в, г) Теоретически, все конфеты мог забрать, например, один человек.

3) **а)** В темной комнате стоит шкаф, в котором лежат 24 чёрных и 24 синих носка. Какое минимальное количество носков нужно взять из шкафа, чтобы из них заведомо можно было составить по крайней мере одну пару носков одного цвета?

б) Какое минимальное количество носков нужно взять, чтобы заведомо можно было составить хотя бы одну пару чёрных носков?

в) Как изменится решение задачи, если в ящике лежат 12 пар чёрных и 12 пар синих ботинок и требуется составить пару одного цвета (как в пункте а) и пару черного цвета (как в пункте б)? (Ботинки, в отличие от носков, бывают левыми и правыми.) [5]

Ответ: а) 3; **б)** 26; **в)** 25 и 37.

Решение. а) Если взять только два носка, то они могут оказаться разных цветов, и составить из них пару не получится. А из трёх носков два точно будут одного цвета.

б) Если взять 25 носков, то 24 из них могут оказаться синими, и составить чёрную пару не получится. Если же взять 26 носков, то синих среди них не может быть больше 24, поэтому точно будут два чёрных.

в) Если взять 24 ботинка, то все они могут оказаться левыми, и составить пару из них не получится. Разобьём все 48 ботинок на пары. Пар будет 24. Если взять 25 ботинок, то два из них точно будут из одной пары. Если взять 36 ботинок, то 24 из них могут оказаться синими, а остальные 12 — левыми чёрными, и составить из них чёрную пару не получится. Если взять 37 ботинок, то хотя бы 13 из них будут чёрными, а значит, будет точно хотя бы один чёрный левый и хотя бы один чёрный правый.

4) В лесу растут миллион ёлок. Известно, что на каждой из них не более 600000 иголок. Докажите, что есть две ёлки с одинаковым количеством иголок. [5]

Решение. У ёлки может быть 0, 1, 2, . . . , 600000 иголок — всего600001 возможный вариант, а ёлок больше (1000000). Значит, какой-то вариант точно повторяется, т.е. найдутся две ёлки с одинаковым количеством иголок.

5) В школе 30 классов и 1000 учащихся. Докажите, что есть класс, в котором не менее 34 учеников. [5]

Решение. Если такого класса нет, то учеников в школе не может быть больше, чем $33 \cdot 30 = 990 < 1000$, противоречие. 32

6) В квадратном ковре со стороной 4 метра моль проела 15 дырок. Докажите, что из этого ковра можно вырезать коврик со стороной 1 метр, в котором дырок не будет. [5]

Решение. Разобьём ковёр на 16 маленьких ковриков размером 1×1. Так как дырок всего 15, хотя бы один квадратик окажется без дырок. Его и можно вырезать.

7) В финале школьного чемпионата по баскетболу команда 5А забила 9 мячей. Докажите, что найдутся 2 игрока этой команды, забившие поровну мячей. (В команде по баскетболу 5 игроков.) [5]

Решение. Предположим, что такие два игрока не найдутся. Тогда все пять игроков забили разное количество мячей. Пусть первый игрок ничего не забил, второй забил один мяч, третий — два, четвёртый — три, пятый — четыре. Тогда всего игроки забили 10 мячей. Если же кто-то забил больше, чем мы предположили, то и всего мячей было забито больше. Но поскольку по условию игроки забили 9 мячей, наше предположение неверно. Значит, есть два игрока, забившие поровну.

9) Верно ли, что в вашей аудитории есть по крайней мере два человека, имеющие одинаковое число друзей в этой аудитории? Верно ли это для любой аудитории лицея? [5]

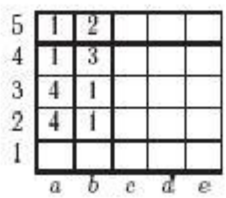
Решение. Да, верно. Проведём рассуждения сразу для любой аудитории. Пусть в аудитории n человек, и у всех из них разное количество друзей. Друзей может быть 0, 1, 2, . . . , $(n - 1)$. Всего n возможных вариантов. А так как человек тоже n, то все эти варианты используются. Значит, есть человек, у которого 0 друзей, т. е. который ни с кем не дружит. И есть человек, у которого ($n-1$) друг, т.е. который дружит со всеми. Однако этого быть не может, т.к. эти два человека должны одновременно и дружить, и не дружить друг с другом. Получаем противоречие. Значит, два человека с одинаковым количеством друзей всегда найдутся.

10) Каждая клетка таблицы 2011×2011 покрашена в один из 2010 цветов. За ход можно взять строку или столбец и, если там есть две клетки одного цвета, перекрасить эту строку или столбец в этот цвет. Всегда ли можно за несколько ходов покрасить всю таблицу в один цвет?

Решение. Возьмём любую строку. Так как цветов 2010, а клеток в строке — 2011, есть по крайней мере две клетки одного цвета. Значит, мы можем перекрасить всю строку в этот цвет. Воспользуемся этим и покрасим каждую строку в какой-нибудь цвет. Теперь у нас есть 2011 строк, покрашенные в 2010 цветов. Значит, по крайней мере две строки покрашены в один цвет (допустим, красный). То есть, в любом столбце есть две красные клетки. Покрасим все столбцы в красный цвет — все клетки доски будут покрашены в один цвет.

11) Можно ли клетки доски 5×5 покрасить в четыре цвета так, чтобы клетки, стоящие на пересечении любых двух строк и любых двух столбцов, были покрашены не менее, чем в три цвета? [9, 110083]

Решение. Нельзя. Предположим, что существует раскраска таблицы 5×5, удовлетворяющая условию. Рассмотрим эту таблицу.



В каждом столбце найдется цвет, в который покрашены по крайней мере две клетки этого столбца. Назовем такой цвет *преобладающим* для данного столбца (возможно, у какого-то столбца будет два преобладающих цвета).

Аналогично, какой-то цвет (назовем его **1**) будет преобладающим для двух столбцов. Поскольку от перестановки строк и столбцов ничего не зависит, будем считать, что это столбцы a и b. Также можем считать, что в первом столбце цветом **1** покрашены клетки a4 и a5. Тогда клетки b4 и b5 должны быть покрашены какими-то двумя различными цветами, отличными от цвета **1**. Пусть они покрашены цветами **2** и **3**, а поскольку цвет **1** — преобладающий для столбца b, можем считать, что клетки b2 и b3 покрашены цветом **1**. Рассмотрим клетку a3. Выбрав 3 и 4 строку и столбцы a и b, мы получим, что клетка a3 не может быть покрашенной цветами **1** и **3**. Выбрав 3 и 5 строку и столбцы a и b, мы получим, что клетка a3 не может быть покрашенной цветами **1** и **2**. То есть клетка a3 покрашена цветом **4**. Но из аналогичных рассуждений мы получаем, что и клетка a2 покрашена цветом **4**. То есть квадрат, состоящий из клеток a3, a2, b3 и b2, покрашен в два цвета — противоречие.

12) В магазин привезли 25 ящиков яблок трех сортов. В каждом ящике лежат яблоки одного сорта. Продавец утверждает, что у него нет девяти ящиков с яблоками одного сорта. Не ошибся ли он? [9, 21974]

Решение: да, 25:3=8(ост.1).

13) В поход пошли 20 туристов. Самому старшему из них 35 лет, а самому младшему а) 16 лет б) 17 лет. Верно ли, что среди туристов есть одногодки? [9,32041]

Решение. а) нет: б) да.

14) В школе учатся 400 учеников. Докажите, что хотя бы двое из них отмечают день рождения в один и тот же день. [8]

Решение: Допустим, что все дети отмечают день рождение в разные дни. Тогда найдутся 365 таких детей. Но учеников – 400. Значит найдется хотя бы один день, в который день рождение отмечают больше чем один ребенок.

15) Сможете ли вы разложить 44 шарика на 9 кучек так, чтобы количество шариков в разных кучках было различным? [9, 88082]

Решение:1+2+3+4+5+6+7+8+9=45>44, следовательно, найдутся хотя бы две кучки с одинаковым количеством шариков.

16) Занятия математического кружка проходят в девяти аудиториях. Среди прочих, на эти занятия приходят 19 учеников из одной и той же школы.

а) Докажите, что как их не пересаживай, хотя бы в одной аудитории окажется не меньше трех таких школьников.

б) Верно ли, что в какой-нибудь аудитории обязательно окажется ровно три таких школьника? [9,32785]

Решение: а) Попытаемся рассадить учеников так, чтобы в каждой аудитории было не меньше двух учеников из одной школы. Это возможно сделать для $9 \cdot 2 = 18$ школьников. Девятнадцатый ученик будет третьим в любой аудитории, куда бы его не посадили. Значит в какой-то аудитории будет не меньше трех детей из одной школы.

б) Нет, не верно. В одной аудитории могут оказаться все 19 детей из одной школы.

17) Докажите, что в любой компании из 5 человек есть двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании. [9,21977]

Решение: Предположим, что в этой компании нет двух человек, имеющих одинаковое количество друзей, т.е. у каждого человека разно количество друзей. Тогда друзей может быть 0,1,2,3,4. Т.е. человек имеющий 0 друзей не дружит ни с кем, а человек, имеющий 4 друзей, дружит со всеми, кроме себя. Получили противоречие. Значит в этой компании есть два человека с одинаковым количеством друзей.

18) Несколько футбольных команд проводят турнир в один круг. Докажите, что в любой момент турнира найдутся команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое количество матчей. [9,21978]

Решение: Пусть всего n команд. Тогда каждая могла сыграть от 0 до $n\ -1$ партий: всего n вариантов. Казалось бы, что принцип Дирихле не работает: у нас имеется n различных команд и n различных количеств сыгранных матчей.

Заметим, однако, что если какая-то команда не сыграла ни одного матча, то не найдется команды, сыгравшего все матчи. То есть не может быть ситуации, когда есть команда, сыгравшая 0 матчей, и команда, сыгравшая $n-1$ матч. Значит, различных количеств сыгранных матчей в любой момент турнира может быть не более $n-1$ (от 0 до $n-2$ или от 1 до $n-1$). По принципу Дирихле в любой момент турнира найдется две команды, сыгравших одинаковое количество матчей.

19) Каждая грань куба окрашена в черный или белый цвет. Докажите, что найдутся две грани с общим ребром, которые одинаково окрашены. [2]

Решение: У куба 6 граней. Если одинаково окрашенных граней больше 3, то найдется две грани одного цвета с общим ребром. Например, может быть 3 белые грани и 3 черные, тогда в одной вершине сойдутся хотя бы две грани одинакового цвета и будут иметь общее ребро.

20) Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга? [2]

Решение: 16. Шахматную доску можно разбить на 16 квадратов 2×2. Если два короля будут находиться в одном квадрате 2×2, то они будут бить друг друга. Значит в каждом таком квадрате может находиться не больше одного короля и общее количество королей не больше 16. С другой стороны, если ставить королей в левый верхний угол каждого квадрата, то никакие два не будут бить друг друга. Поэтому королей может быть ровно 16.

21) Докажите, что никакая прямая не может пересекать все три стороны треугольника. [2]

Решение: Прямая делит плоскость на две полуплоскости. Если располагать три точки на плоскости, то найдутся хотя бы две, расположенные в одной полуплоскости. Сторона треугольника, соединяющая две таких точки, не может пересекать исходную прямую.

5 Метод оценки.

Метод оценки – это математическое рассуждение которое заключается в том, чтобы проанализировать наибольшее и наименьшее значение некоторой величины. Помогает ученику научиться четко выстраивать доказательства и находить причинно-следственную связь.

1) В лесу, состоящем из дубов и елок, компания «Пень-Инвест» вырубила одну треть всех дубов и одну шестую всех елок. Докажите, что отчет экологической организации «Зеленый мститель», утверждающей, что была вырублена половина всех деревьев, содержит неверные данные.

Решение: В лесу вырублено менее половины дубов и менее половины елок, значит, вырублено менее половины деревьев.

2) Пятизначное число A записывается только двойками и тройками, а пятизначное число B – только тройками и четверками. Может ли произведение AB записываться только одними двойками?

Решение: Произведение этих чисел заключено в промежутке от $22222 \cdot 33333$ до $33333 \cdot 44444$, то есть от 740725926 до 1481451852, поэтому первая цифра произведения – не 2.

3) Найдите все четырехзначные числа, которые в 83 раза больше своей суммы цифр.

Решение: Искомое четырехзначное число должно делится на 83 и не превосходить $2988=36 \cdot 83$. Таких чисел всего 24, и, терпеливо перебрав их все, можно проверить, что только одно из них – 1494 удовлетворяет условию.

4) В таблице 10×10 расставлены натуральные числа. В каждой строке подчеркнули наибольшее натуральное число (или одно из наибольших, если таковых несколько), а в каждом столбце – наименьшее (или одно из наименьших). Оказалось, что все подчеркнутые числа подчеркнуты два раза. Докажите, что все числа в таблице равны.

Решение: Сначала докажем, что все подчеркнутые числа равны между собой. Предположим противное: пусть найдутся два подчеркнутых числа a и b такие, что $a>b$. Пусть c – число, стоящее в одном столбце с a и в одной строке с b. По условию, $a \le c$ *и* $b \ge c$, откуда $a \le b$ -противоречие. Рассмотрим теперь любое число в таблице. Оно не больше максимального числа своей строки и не меньше минимального числа своего столбца. Но эти два числа, как уже доказано, равны между собой. И рассматриваемое число равно им обоим. Значит, все числа в таблице равны подчеркнутым.

5) В клетках прямоугольника 11×15 расставлены крестики и нолики. Известно, что в каждой строке прямоугольника крестиков больше, чем ноликов.

Докажите, что обязательно найдется столбец, в котором тоже крестиков больше, чем ноликов.

Решение: Если в каждой строке прямоугольника крестиков больше, чем ноликов, то и во всей таблице крестиков больше, чем ноликов. Если бы в каждом столбце крестиков было не больше, чем ноликов, то во всей таблице крестиков тоже было бы не больше, чем ноликов, что неверно. Значит, найдется столбец, в котором крестиков больше, чем ноликов.

6) На поле брани встретились армии Толстых и Тонких по 1000 человек в каждой. Сначала каждый толстый солдат выстрелил в одного из тонких, затем каждый уцелевший тонкий солдат выстрелил в одного из толстых. Докажите, что в живых осталось не менее 1000 солдат.

Решение: Пусть уцелело x тонких солдат, тогда они убили не больше x толстых. Значит, толстых осталось не меньше $1000 - x$, а общее число оставшихся солдат не меньше $x+(1000 - x)=1000$.

7) Пятизначное число называется неразложимым, если оно не раскладывается в произведение двух трехзначных чисел. Какое наибольшее число неразложимых пятизначных чисел может идти подряд?

Решение*:* 99. Пример: числа от 10001 до 10099 включительно. Действительно, все эти числа лежат в промежутке от 100×100 до 100×101, поэтому не могут быть представлены в виде произведения двух трехзначных чисел, так как 100×100 и 100×101 – два наименьших произведения трехзначных чисел. С другой стороны, среди любых 100 подряд идущих пятизначных чисел обязательно встретится число, кратное 100, которое не будет неразложимым.

8) Назовем натуральное число *куском*, если оно получается выписывание подряд чисел от 1 до какого-нибудь натурального n>1(например, 123 или 123456789101112). Докажите, что произведение двух кусков – не кусок.

Решение*:* Заметим, что любой кусок a при подходящем n удовлетворяет неравенству $12\cdot 10^{n} \le a \le 13\cdot 10^{n}$, поэтому произведение двух кусков b удовлетворяет неравенству $144\cdot 10^{m} \le b \le 169\cdot 10^{m}$, откуда следует, что вторая цифра произведения двух кусков обязана быть равна 4, 5 или 6 и, следовательно, произведение двух кусков куском быть не может.

9) В корзине лежат 30 грибов – рыжиков и груздей. Известно, что среди любых 12 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов – хотя бы один груздь. Сколько рыжиков и сколько груздей в корзине?

Решение: Ответ: 19 рыжиков и 11 груздей. Если бы в корзине нашлось 12 груздей, то ни один из них не был бы рыжиком. Значит, количество груздей не превосходит 11. Если бы груздей было меньше 11, то их было бы не больше 10. В таком случае можно было бы найти 20 не груздей. Значит, груздей ровно 11. Аналогично, рыжиков – 19.

10) Расстояние между деревнями А и В равно 3 км. В деревне А – 300 школьников, а в деревне В – 200 школьников. Где следует построить школу, чтобы общее расстояние, пройденное школьниками по дороге в школу, было как модно меньше?

Решение: Пусть расстояние от А до школы равно x, тогда суммарное расстояние, пройденное всеми школьниками по дороге в школу, равно $f(x)=300x+200(a-x)=200a+100x$, где a –длина отрезкаАВ. Наименьшее значение $f(x)$ достигается при x=0. Ответ: школу надо строить в деревне А.

11) Какое из двух чисел больше: $\frac{5555555553}{5555555557}$ или $\frac{6666666663}{6666666667}$?

Решение: Будем сравнивать не сами числа, а их дополнения до 1.Так как $\frac{4}{5555555557} > \frac{4}{6666666667}$, то $\frac{5555555553}{5555555557} > \frac{6666666663}{6666666667}$.

12) Известно, что числа $x + y$ и $4x + y$ положительны. Может ли число $8x + 5y$ быть отрицательным?

Решение: Так как $x + y > 0$, то и $4x + 4y > 0$. Сложив это неравенство с неравенством $4x + y > 0$ получим, что число $8x + 5y > 0$, следовательно, оно не может быть отрицательным.

13) В одном районе города более 94% домов имеют больше 5 этажей. Какое наименьшее число домов возможно в данном районе?

Решение: Наименьшее возможное число домов в районе 17. Пусть только один дом имеет не более 5 этажей, а всего домов n. Тогда имеем $\frac{1}{n} < \frac{6}{100}$, откуда $n > \frac{100}{6}$ и $n \geq 17$.

14) Докажите, что если сумма двух натуральных чисел меньше 13, то их произведение не больше 36.

Решение: Пусть произведение двух натуральных чисел больше 36, тогда одно из них больше 6 (т.к. если оба множителя не больше 6, то их произведение не больше 36). Если одно слагаемое больше 6, то оно может быть равно 7, 8, 9, 10 или 11; тогда другое слагаемое соответственно не больше 5, 4, 3, 2, или 1. В каждом из этих случаев произведение не больше35, 32, 27, 20 или 11. Это противоречит сделанному предположению. Следовательно, оно неверно.

6 Последняя цифра.

Когда два числа складываются столбик, последняя цифра суммы зависти только от последних цифр слагаемых, а остальные их цифры на нее никак не влияют. Точно так же при вычитании и умножении последняя цифра результата зависит только от последних цифр данных чисел.

Поэтому при нахождении последних цифр сложного числового выражения, составленного из суммы и произведения, многозначные числа можно заменить их последними цифрами.

Например, найдем последнюю цифру суммы $636 \cdot 742 + 6573 \cdot 7848 + 262 \cdot 591 \cdot 679$. Для этого найдем сначала последние цифры слагаемых. Получи 2,4 и 8. Сумма этих чисел оканчивается цифрой 4, значит и последняя цифра данной суммы тоже 4.

Если в выражении имеется разность, то так просто решит не получится.

Например, действуя аналогично, мы получили бы, что последняя цифра выражения $5871 - 741 + 8403 - 4118 - 653 \cdot 111 \cdot 6173$ есть $1 + 4 - 9$, что невозможно. Но наше рассуждение можно отредактировать: последняя цифра первого слагаемого та же самая, что у числа 11, и поэтому последняя цифра этого выражения $11 + 4 - 9,$ т. е. 6.

Так же необходимо вспомнить понятие «степень числа». Степень числа – Это произведение одинаковых множителей. Поэтому последняя цифра степени определяется последней цифрой основания степени.

В качестве отработки, полезно найти последнюю цифру у следующих выражений:

a) 151+162+153+154+155+156+157+158+159

b) $51 \cdot 152 \cdot 153 \cdot 154 \cdot 155 \cdot 156 \cdot 157 - 158 \cdot 159$

c) 13+14+…+29

d) $12 \cdot 123 + 13 \cdot 134 + 14 \cdot 145 + 15 \cdot 156 + 16 \cdot 167 + 17 \cdot 178 + 18 \cdot 189$

e) $154 \cdot 628 + 814 \cdot 318 + 774 \cdot 458 + 314 \cdot 398$+654$\cdot$ 218

f) $12 \cdot 123 - 13 \cdot 134 + 14 \cdot 145 - 15 \cdot 156 + 16 \cdot 167$

g) $154 \cdot 628 - 814 \cdot 318 + 774 \cdot 458 - 314 \cdot 398$+654$\cdot$ 218

h) $1999 \cdot 1999 \cdot 1999 \cdot 1999 \cdot 1999 \cdot 1999 \cdot 1999$.

1) Сколько различных цифр содержится среди последних цифр у $2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots, 2^{100}$.

2) Найдите последние цифры степеней числа 2 с показателями равными 32,69, 469, 1995, 19951995.

3) Найдите последнюю цифру суммы кубов натуральных чисел

а) от 1 до 10; б) от 1 до 100.

4) Сколько нулей стоит в конце произведения всех натуральных чисел а) от 1 до 16; б) от 1 до 50; в) от 20 до 75?

Решение. Для того, чтобы посчитать количество нулей на конце произведения, нужно понимать их природу. Каждый ноль получается при произведении 2 и 5. Поэтому для начала необходимо выполнить разложение на простые множители, а затем посчитать количество таких пар. а) 3 нуля, б) 12 нулей, в) 15 нулей.

5) На какую цифру оканчиваются числа $2019^{2019}, 2019^{2018}, 2012^{2019}, 2012^{2012}$?

Решение. Для начала можно понять, что достаточно будет определить последний цифры для чисел $2019^{2019}, 2019^{2018}, 2012^{2019}, 2012^{2012}$. С детьми можно проделать возведение 9 в различные степени, чтобы увидеть закономерность. Если 9 возводим в нечетную степень, то на конце будет число 9, а если в четную – 1. Значит $9^{2019} = \cdots 9$, $9^{2018} = \cdots 1$. Применяя аналогичные рассуждения для 2 получаем последние цифры степеней двойки 2, 4, 8, 6, а затем цикл повторяется. Поэтому дополнительно необходимо проанализировать остатки от деления на 4 степеней 2019 и 2012. Следовательно, $2^{2019} = \cdots 8,\ 2^{2012} = \cdots 6.$

6) На доске написано число 2. Разрешается умножить число, стоящее на доске на 3 или на 8, после чего прибавить к нему 1 и результат записать на доску вместо исходного числа. Может ли после нескольких таких операций на доске оказаться число 201920192019…2019 (2019, записанное 2019 раз подряд)?

Решение. Для начала необходимо понаблюдать, что происходит с исходным числом в результате таких операций $2 \to 7 \to 57 \to 172 \to \cdots$. Как видно, в результате таких операций всегда на доске появляется число, оканчивающееся на 2 или 7. Это можно объяснить следующим образом. Число 2 при умножение на 3 или 8 превращается в число 6 , или оканчивающееся на 6 и последующее добавление единицы дает на конце 7. Далее, любое число, оканчивающееся на 7, при умножении на 3 и добавления после 1 получаем на конце 2, а при умножении на 8 и добавлении единицы, на конце появляется 7. Таким образом, в результате таких операций, число с 9 на конце получить невозможно.

7 Задачи на смекалку.

1) Равенства составлены из спичек. Переложите одну спичку так, чтобы равенство стало верным.

а) VII + III = V;

б) XII + IX = II;

в) IV - V = I;

г) X + X = I;

д) VI - VI = XI.

Решение:

а) VII + III = V	(VIII - III = V, VII - III = IV)
б) XII + IX = II	(XII - IX = III)
в) IV - V =I	(VI - V = I)
г) X + X = I	(X - IX = I)
д) VI - VI = XI	(VI + V = XI)

2) Проехав половину всего пути, пассажир лег спать, и спал до тех пор, пока не осталось проехать половину того пути, который он проспал. Какую часть всего пути пассажир проехал бодрствующим?

Ответ: $\frac{2}{3}$ пути.

3) Путешественник, сняв в гостинице комнату на неделю, предложил хозяину в уплату цепь из семи серебряных колец — по кольцу за день, с тем условием, что будет рассчитываться ежедневно. Хозяин согласился, оговорив со своей стороны, что можно распилить только одно кольцо. Как путешественнику удалось расплатиться с хозяином гостиницы?

Решение. Надо распилить 3-е кольцо. Получится три звена: из одного, двух и четырех колец. В I день он отдаст 1 кольцо, во II день — два, заберет одно, в III день добавит одно, в IV день отдаст 4, заберет 3 и т.д.

4) У двух мальчиков был один велосипед, на котором они отправились в соседнюю деревню. Ехали по очереди, но всякий раз, когда один ехал, другой шел пешком, а не бежал. При этом ухитрились прибыть в деревню почти в два раза быстрее, чем, если бы они шли пешком. Как им это удалось?

Решение. Первый мальчик проехал на велосипеде пол дороги слез с него и дальше пошел пешком, а второй мальчик первую половину прошел пешком, затем дошел до велосипеда, сел на него и поехал. Так они сэкономили время.

5) Если бы Петя купил 11 тетрадей, то у него осталось бы 5 руб., а на 15 тетрадей у него не хватает 7 руб. Сколько денег было у Пети?

Решение. 15-11=4 (тетр) - требуется 5+7=12 (руб), значит 1 тетрадь стоит 3 руб. 3*11+5=38(руб) - было у Пети.

Ответ: 38 руб.

6) Я купил лотерейный билет, у которого сумма цифр его пятизначного номера оказалась равна возрасту моего соседа. Определите номер этого билета, если известно, что мой сосед без труда решил эту задачу?

Решение: Номер билета 99999. Если в билете были хотя бы две неравные цифры, то их можно было бы поменять местами и сосед не смог бы наверняка решить задачу. Если же все цифры равны, но меньше 9, всегда есть возможность одну цифру увеличить на 1, а другую уменьшить, т.е. есть дополнительный вариант решения. И только в случае, когда соседу 45 лет и номер билета 99999, решение получается единственным.

7) Король хотел деликатно уволить премьер-министра и предложил ему такую ситуацию: “В этот портфель я положил 2 листа бумаги. На одном из них написано “Останьтесь”, на другом - “Уходите”. Листок, который вы сейчас не глядя достанете из портфеля решит вашу судьбу.” Премьер-министр догадался, что на обоих листках написано “Уходите”, однако ему удалось сделать так, что король его оставил.

Как поступил премьер-министр?

Решение: Например, он мог вытянуть лист и тут же, не глядя, его уничтожить, тогда королю пришлось бы признать, что на нем было написано “Останьтесь”, т.к. на оставшемся в портфеле “Уходите”.

8) Роберт ездил каждую субботу на уик-энд, то в Бронкс, то в Бруклин. В обоих местах он познакомился с девушками, но поскольку они нравились ему одинаково, то он решил положиться на судьбу и принял такое решение: приезжая на вокзал, он садился в тот поезд, который первым подходил к платформе. Поезда и в Бронкс, и в Бруклин ходили с интервалом в 10 минут.

В результате оказалось, что из каждых 10 суббот он 9 суббот попадал в Бруклин и только 1 субботу - в Бронкс. Таким образом, он ближе познакомился с девушкой из Бруклина. Его чувства окрепли и в дальнейшем привели его к жизненно важному событию – женитьбе.

Что повлияло на такое стечение обстоятельств с поездами?

Решение. Оказывается, повлияло расписание поездов, которое было составлено таким образом, что поезд в Бруклин отправлялся через 9 минут после отправления поезда в Бронкс, а следующий поезд в Бронкс отходил через 1 минуту после поезда в Бруклин. Поэтому вероятность прибытия юноши на вокзал в промежуток времени перед поездом в Бруклин составляло 9/10, а в интервал перед поездом в Бронкс только 1/10.

9) Шофер автобуса установил в одной кассе катушку билетов с номерами с 537000 до 537999, а в другой - с номерами от 462000 до 462999. В какой из катушек больше “счастливых” билетов, т. е. в которых сумма первых 3-х цифр равна сумме следующих 3-х цифр?

Решение. Если заменить каждую цифру “счастливого” билета на ее дополнение до 9, то полученный билет снова будет “счастливым”, причем, если это был билет из первой катушки, то получится билет из второй катушки. Значит в обеих катушках одинаковое число “счастливых” билетов.

10) Автобусные билеты, имеющие номера от 000000 до 999999, билет называется счастливым, если сумма первых трех цифр его номера равна сумме последних трех его цифр.

Докажите, что:

а) число всех счастливых билетов четно;

б) сумма номеров всех счастливых билетов делится на 999.

Решение: Вместо каждой цифры номера билета ($\overline{abcdef}$) запишем ее дополнение до 9. Из равенства $a + b + c = d + e + f$ легко выводится равенство $(9 - a) + (9 - b) + (9 - c) = (9 - d) + (9 - e) + (9 - f)$ поэтому парой к каждому счастливому билету также является счастливый билет при этом никакой билет не получает в пару себя, т. к. в этом случае должно бы было выполняться равенство a=9-a. Таким образом, мы получили разбиение всех счастливых билетов на пары. При этом сумма номеров билетов любой пары равна 999999, значит, она делится на 999. С другой стороны, это будет сумма номеров всех счастливых билетов.

11) Вычислите $2379 \cdot 23782378 - 2378 \cdot 23792379$.

Решение. Заметим, что $2379 \cdot 23782378 - 2378 \cdot 23792379 = 2379 \cdot 2378 \cdot 10001 - 2378 \cdot 2379 \cdot 10001 = 0$.

12) Как измерить диагональ кирпича, если имеются несколько одинаковых кирпичей и линейка?

Решение. Положить друг на друга два кирпича, а третий рядом.

13) На крыльце дома сидят рядом мальчик и девочка . Саша говорит: «Я – мальчик». Женя говорит: «А я – девочка». Если по крайней мере один из детей врет, то кто из них мальчик, а кто – девочка?

Решение. Из того факта, что один из них врет, следует, что и второй врет. Значит, Саша – девочка, а Женя – мальчик.

14) Сформулируйте какое-нибудь утверждение, которое верно для всех натуральных чисел, кроме 5, 17, и 257.

Решение. например, $(n-5)(n-17)(n-257)\neq 0$.

15) Среди музыкантов каждый седьмой – шахматист, а среди шахматистов каждый девятый – музыкант. Кого больше: музыкантов или шахматистов? Почему?

Решение. Пусть x – количество шахматистов, которые являются музыкантами; тогда музыкантов 7x, а шахматистов 9x, следовательно, шахматистов больше.

16) Если человек, стоящий в очереди перед Вами, был выше человека, стоящего после того человека, который стоял перед вами, то был ли человек, стоящий перед Вами, выше Вас?

Решение. Да.

17) От потолка комнаты вертикально вниз по стене поползли две мухи. Спустившись до пола, они поползли обратно. Первая муха ползла в оба конца с одной и той же скоростью, а вторая хотя и поднималась в два раза медленнее первой, но зато спускалась вдвое быстрее. Какая из мух раньше приползет обратно?

Решение. Первая муха на полпути вниз, вторая на полу. Когда первая на полу, вторая на ¼ пути вверх . Когда первая на полпути вверх, то и вторая на полпути вверх. Скорость первой мухи больше скорости второй на подъеме, поэтому она вернется раньше.

Заключение.

Целью данной работы являлась систематизация олимпиадных и нестандартных задач для учащихся 5-6 классов основной школы. Осуществлена разбивка задач по темам и уровням сложности. Данные задачи были опробованы при проведение дополнительных занятий в МБОУ «ФМЛ №31 г. Челябинска».

Список использованной литературы:

1. Асташов Е.А. «Признаки делимости» [Электронный ресурс] URL: http://mmmf.msu.ru/archive/20122013/z6/15.html
2. Блинков А.Д. «Принцип Дирихле» [Электронный ресурс] URL: http://mmmf.msu.ru/archive/20052006/z5/
3. Климов Е.А. «Индивидуальный стиль деятельности в зависимости от типологических свойств нервной системы» Казань, 1996.
4. Коробицын Д.А. «Арифметика и весы» [Электронный ресурс] URL: http://mmmf.msu.ru/archive/20102011/z5/12.html
5. Коробицын Д.А. «Принцип Дирихле» [Электронный ресурс] URL: http://mmmf.msu.ru/archive/20102011/z5/9.html
6. Медников Л.Э. «Четность». Москва: Издательство МЦНМО, 2013. - Серия «Школьные Математические Кружки»
7. Сафонова И.В. Методические рекомендации подготовлены в помощь преподавателям корпуса, педагогам-психологам при подготовке обучающихся к Всеармейской Олимпиаде по математике – пос. Рассвет: Изд-во АДЕККК МО РФ, 2017. - 46 с.
8. Спивак А.В. «Принцип Дирихле» [Электронный ресурс] URL: http://mmmf.msu.ru/archive/19992000/spivak67/s_diri.html
9. http://www.problems.ru