

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ С СЕЧЕНИЕМ В ФОРМЕ КОЛЬЦЕВОГО СЕКТОРА<sup>1</sup>

*В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина*

Исследуется напряженное состояние в зоне пластических деформаций менее прочного, чем основной материал, слоя, имеющего форму кольцевого сектора, расположенного в расширяющемся под действием внутреннего давления кольце из более прочного основного материала, в условиях плоской деформации. Ранее такая задача не изучалась. Приближенным интегрированием системы уравнений пластического равновесия в полярной системе координат при использовании гипотезы разделения переменных для касательных напряжений получены аналитические выражения для компонент тензора напряжений и вычислена предельная нагрузка.

**1. Введение и основные допущения.** Задача определения напряженного состояния (НС) мягкой прослойки (МП), имеющей форму кольцевого сектора, расположенного в кольце из более прочного основного материала (ОМ), и находящейся под растягивающей нагрузкой в условиях плоской деформации, возникает при исследовании несущей способности продольных сварных соединений труб и других цилиндрических оболочечных конструкций. Такая задача рассматривается впервые, а точные либо приближенные, с оцениваемой погрешностью решения этой задачи, не противоречащие известным экспериментальным данным, в настоящий момент отсутствуют. В какой-то степени близкой по постановке является задача истечения пластического материала из клиновидной полости; известные [1] решения исходят из гипотезы о независимости касательных напряжений от одной из полярных координат (аналог гипотезы Л. Прандтля) что, хотя и позволяет проинтегрировать систему уравнений пластического равновесия, делает модель существенно не адекватной физическому процессу и значительно ограничивает возможности применения такой модели. Построение математических моделей напряженно-деформированного состояния (НДС) пластических сред в большинстве практически важных задач основано на частичном предугадывании внутреннего состояния среды в форме гипотез, формулирующих некоторые соотношения между напряжениями, деформациями, скоростями деформаций, смещениями, скоростями смещений и т.д., или накладывающих какие-то ограничения на соответствующие функции. В работе, при изучении НС МП растягиваемого кольца, материал которой переходит в состояние пластического течения раньше основного материала кольца, принята так называемая мультипликативная гипотеза для касательных напряжений, что позволило найти приближенные аналитические выражения для компонент тензора напряжений в любой момент нагружения во всех точках пластического слоя, вычислить предельную нагрузку и наибольшую толщину слоя, когда соединение (кольцо с мягкой прослойкой) равнопрочно однородному кольцу без мягкой прослойки. Используемый оригинальный подход позволяет свести задачу к исследованию и решению краевых задач для некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений и, в результате, получить новые аналитические выражения для компонент тензора напряжений. Предполагается, что в процессе нагружения основной металл деформируется упруго, а при значительных напряжениях участки, расположенные вблизи пластического слоя, вовлекаются в пластическую деформацию. При выводе основных формул материал слоя и основной металл считаются идеально жесткопластическими и удовлетворяющими обычным в таких случаях допущениям [2]. В качестве уравнения пластичности принято условие Мизеса. Полученные результаты переносятся на упрочняемые материалы заменой в условии полной пластичности предела текучести материала слоя на пластическую постоянную, характеризующую момент потери устойчивости процесса пластического деформирования слоя (ПУППД).

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 05-08-18179-а).

**2. Математическая постановка задачи.** В односвязной области  $\Omega$  («сечении мягкого слоя») с кусочно-гладкой границей  $A_1BC_1D_1$ , где кривые  $A_1B$  и  $C_1D_1$  интерпретируются как «контактные» поверхности, а  $BC_1$  и  $A_1D_1$  - как «свободные от нагрузки», требуется найти решение краевой задачи для системы уравнений [2, с.54]

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0; \quad (2)$$

$$\sigma_\rho - \sigma_\theta = \pm 2 \sqrt{1 - (\tau_{\rho\theta})^2}. \quad (3)$$

Здесь  $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau_{\rho\theta}$  (безразмерные компоненты тензора напряжений) - функции двух переменных  $\rho$  и  $\theta$ , где  $\rho, \theta$  - полярные координаты точки МП (рис. 1).

Напряжение  $\sigma_\theta$  инициировано внешней нагрузкой, напряжен  $\sigma_\rho$  в начальный момент нагружения отсутствует, а затем появляется в МП в результате сдерживающего влияния более прочного ОМ; очевидно:  $\sigma_\rho < \sigma_\theta$  в любой момент нагружения, поэтому в (3) следует брать радикал со знаком плюс. Область  $\Omega$  в работе считается симметричной относительно оси полярных координат  $\rho$ , линии  $AB$  и  $CD$  отрезками прямых,  $AC$  и  $BD$  - дугами концентрических окружностей с центром в начале координат. В качестве характеристики относительной толщины МП введем величину  $\chi$ :

$$\chi = \frac{(\rho_n + \rho_v) \theta_k}{\rho_n - \rho_v} \approx \frac{\theta_k}{\rho_n - 1} \approx \frac{2\theta_k}{s}, \quad (4)$$

где  $\rho_n, \rho_v$  - наружный и внутренний радиусы кольца,  $\theta_k$  - значение угла, соответствующего контактной поверхности,  $s$  - толщина оболочки (см. рис. 1). Из соображений симметрии ясно, что в процессе деформирования прослойки ось полярных координат переходит сама в себя и содержит неподвижную точку  $\rho_0$  (см. рис. 1):

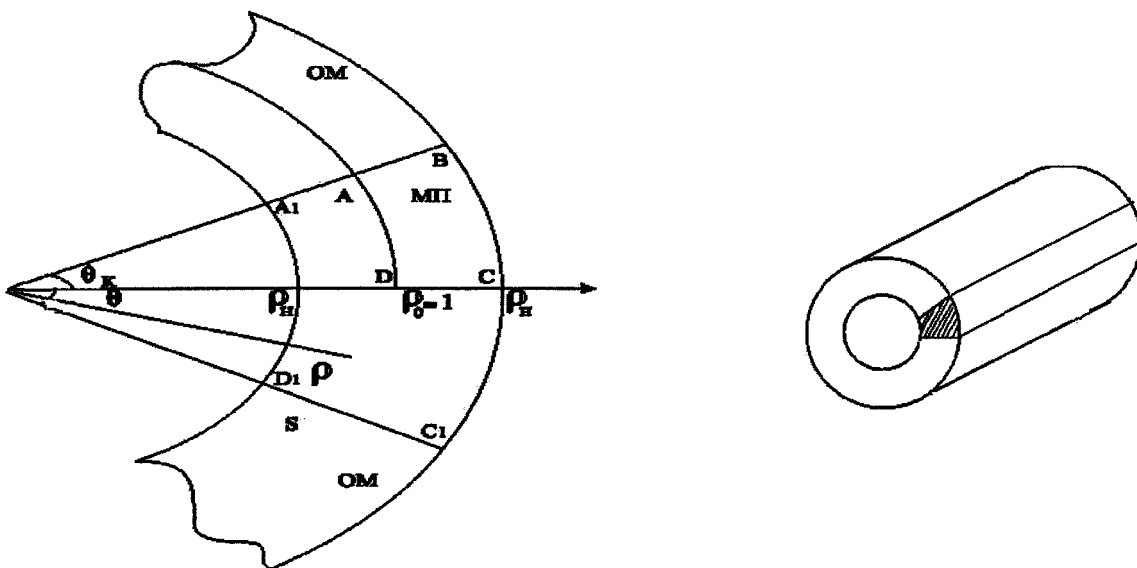


Рис. 1. Фрагмент кольца, содержащего пластический слой, и цилиндрическая оболочка с продольной мягкой прослойкой

Очевидно, выполняются граничные условия

$$\tau_{\rho\theta} |_{\rho=\rho_0} = 0; \quad (5)$$

$$\tau_{\rho\theta} |_{\theta=0} = 0; \quad (6)$$

$$\sigma_\rho|_{\rho=\rho_n} = \sigma_\rho|_{\rho=\rho_a} = 0. \quad (7)$$

Для удобства дальнейших рассуждений будем использовать безразмерные координаты, считая  $\rho_0 = 1$ . В любой момент нагружения на контактной поверхности  $AB$  касательное напряжение  $\tau_{\rho\theta}$  возрастает от 0 в точке  $A$  до некоторого наибольшего значения  $a$  в окрестности точки  $B$ :

$$\max_{\rho \in [\rho_a, \rho_n]} \tau_{\rho\theta}|_{\theta=\theta_k} = a. \quad (8)$$

В работе [3], в случае прямоугольной МП, получена оценка параметра  $a$  в момент ПУППД:  

$$a = K - 1,$$

где  $K$  - коэффициент механической неоднородности соединения, равный отношению пластических постоянных ОМ и МП. С точки зрения приложений задачи к исследованию напряженного состояния сварных труб большого диаметра, содержащих в продольном сварном соединении (шве, зоне термического влияния, зоне сплавления) мягкую прослойку, наиболее важным является диапазон значений  $K \in [1,05; 1,50]$ , что принято в работе. Если угол  $\theta_{\text{мал}}$  и прослойка по форме близка к прямоугольной, ее НС в окрестности точки  $B$  мало отличается от НС прямоугольной прослойки, поэтому оценка (9) применима и в данном случае. Недоопределенность краевой задачи (1)-(3), (5)-(8), как уже было замечено, приводит к необходимости использования, на основе экспериментальных данных, дополнительных гипотез, предугадывающих внутреннее состояние среды, в форме ограничений на классы функций, в которых разыскивается решение. Так, в работах [4; 5] при исследовании НС прямоугольной МП использовалась мультипликативная гипотеза (МГ) для касательных напряжений  $\tau_{xy}(x; y) = X(x)Y(y)$ , т.е. касательные напряжения, в соответствии с гипотезой, распадаются на произведение двух функций, одна из которых зависит только от  $x$ , а другая - только от  $y$ . В работе [5] принималась, как исходная, гипотеза плоских сечений, но было показано, что она по существу приводит к варианту МГ. В данной работе принято аналогичное предположение (МГ):

$$\tau_{\rho\theta}(\rho, \theta) = R(\rho)T(\theta). \quad (10)$$

В некоторой окрестности свободной поверхности (кривой  $BC$ ) решение системы (1)-(3), в силу ее гиперболичности, полностью определяется формой кривой  $BC$ . Предполагается, что условие (10) имеет место в окрестности линии раздела течения  $AD$ , дополнительной к указанным приграничным областям. Жесткость условия (10) делает задачу переопределенной и оставляет возможность лишь приближенного решения. Условие (3) в работе заменяется приближенным равенством

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho = 2 \left( 1 - \mu (\tau_{\rho\theta})^2 \right). \quad (11)$$

Здесь коэффициент  $\mu$  определяется из соображений близости кривых (3) и (11) при ограничении (8). Подробности и различные формулы для вычисления коэффициента  $\mu$  см. в работе [6]. При малых значениях  $a$  ( $a < 0,5$ ) можно, не допуская заметной погрешности, считать  $\mu = 0,5$ .

**3. Анализ математических моделей.** После умножения обеих частей уравнения (2) на  $\rho$  и дифференцирования его по  $\rho$ , дифференцирования уравнения (1) по  $\theta$ , и вычитания полученных уравнений, имеем:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \tau}{\partial \theta^2} - \rho \frac{\partial^2 \tau}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_\rho - \sigma_\theta)}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\sigma_\rho - \sigma_\theta)}{\partial \theta} - 3 \frac{\partial \tau}{\partial \rho} = 0; \quad (12)$$

здесь и далее для упрощения записи вместо  $\tau_{\rho\theta}$  пишем  $\tau$ . Подставив (11) в (12), получим:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \tau}{\partial \theta^2} - \rho \frac{\partial^2 \tau}{\partial \rho^2} + 2\mu \frac{\partial^2 \tau^2}{\partial \theta \partial \rho} + 2\mu \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau^2}{\partial \theta} - 3 \frac{\partial \tau}{\partial \rho} = 0. \quad (13)$$

Последнее уравнение решается методом разделения переменных, если в (13) подставить выражение для касательных напряжений из (10), и разделить все на  $RT$ :

$$\frac{1}{\rho} \frac{T''}{T} - \rho \frac{R''}{R} + 8\mu R'T' + \frac{4\mu}{\rho} RT' - 3 \frac{R'}{R} = 0.$$

Возможны три варианта.

**Первый случай:**  $\tau$  не зависит от  $\rho$ , т.е.  $\tau = T(\theta)$ ,  $R = 1$ , тогда из (14) получается уравнение:

$$T'' + 4\mu TT' = 0, \quad (15)$$

где дифференцирование ведется по  $\theta$ . На этом пути получается решение, аналогичное хорошо известному решению Л. Прандтля [7] для тонкой прямоугольной полосы, однако, в отличие от [7], зависимость касательных напряжений по толщине полосы здесь не линейна, а, как следует из уравнения (15) при начальном условии (6), имеет вид:

$$\tau = \begin{cases} -A \operatorname{tg}(2\mu A\theta), \\ A \operatorname{th}(2\mu A\theta), \end{cases} \quad (16)$$

где постоянная  $A$  зависит от  $a$ . В случае растяжения касательные напряжения возрастают с увеличением угла  $\theta$ , поэтому в формуле (16) нужно выбрать вариант  $\tau = A \operatorname{th}(2\mu A\theta)$ . Аналогичные задачи, в которых  $\tau$  есть функция от одной независимой переменной, рассматривались в [1].

**Второй случай:**  $\tau$  не зависит от  $\theta$ ; тогда  $T = 1$ , а из (14) получается уравнение:

$$\rho R'' + 3R' = 0, \quad (17)$$

где дифференцирование ведется по  $\rho$ , и которое следует решать при начальном условии

$$R(\rho_0) = 0. \quad (18)$$

Уравнение (17) при условии (18) имеет решение:  $R = C \left( \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho_0^2} \right)$ , откуда получаем:

$$\tau_{\rho\theta} = C_1 \left( \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho_0^2} \right). \quad (19)$$

Физический процесс, при котором напряженное состояние прослойки в оболочке можно было бы моделировать на основе формулы (19), может быть получен вращением с трением внутренней и наружной поверхностей трубы с различной угловой скоростью.

**Третий случай:**  $\tau$  линейно зависит от  $\theta$ , т.е.

$$\tau = \theta R(\rho). \quad (20)$$

В этом случае уравнение (14) умножением на  $R_\rho$  сводится к уравнению:

$$\rho^2 R'' - 8\mu\rho R'R + 3R'\rho - 4\mu R^2 = 0.$$

Выполнив в нем замену независимой переменной по формуле

$$\rho = \rho_0 e^t = e^t, \quad (21)$$

получим уравнение:

$$R'' + 8\mu R'R + 3R' + 4\mu R^2 = 0,$$

в котором дифференцирование ведется по переменной  $t$ . После замены неизвестной функции по формуле

$$4\mu R = y, \quad (22)$$

это уравнение преобразуется к виду

$$y'' - 2y'y + 3y' - y^2 = 0, \quad (23)$$

а функция  $y$  должна удовлетворять, в силу условия (5) и формул (21) и (22), граничному условию:

$$y|_{t=0} = 0. \quad (24)$$

Второе граничное условие, соответствующее значению независимой переменной  $\rho = \rho_n$  (либо  $\rho = \rho_g$ ), будет определено позже через параметр  $a$  (условие (8)). Пока заметим, что различия в решениях граничной задачи для уравнения (23) и уравнения

$$y'' - 2y'y + 3y' = 0 \quad (25)$$

на отрезке  $[0; t_n]$  незначительны (здесь  $t_n = \ln \rho_n$ ); об этом свидетельствуют численные решения (рис. 2).

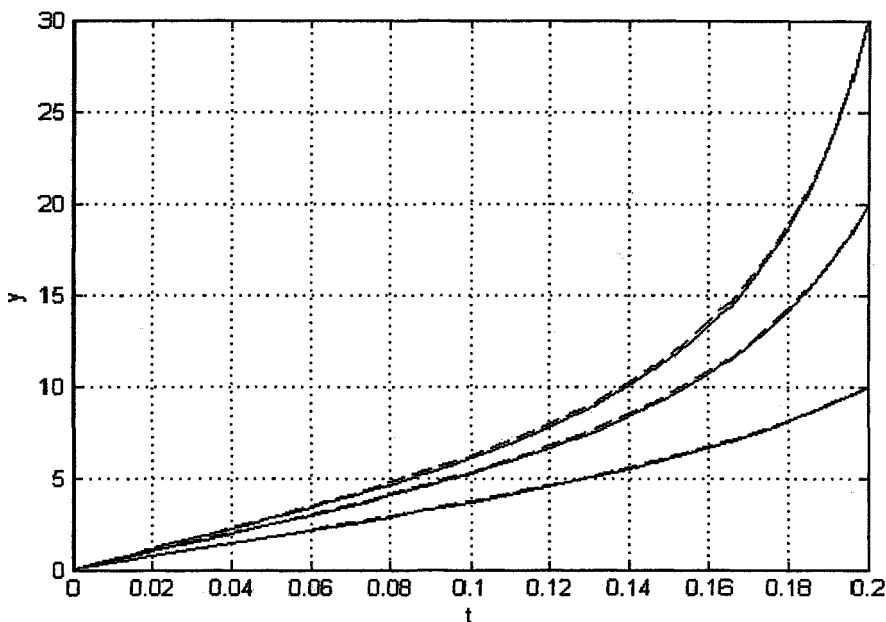


Рис. 2. Интегральные кривые уравнений (25) (сплошная) и (23) (пунктирная) для краевых задач  $y|_{t=0} = 0$ ,  $y|_{t=0,2} = y_0$ ,  $y_0 = 10; 20; 30$

Это позволяет, не допуская большой ошибки, использовать вместо решений уравнения (23) решения уравнения (25), при условии (24). Рассмотрим технически несколько более удобное уравнение

$$u'' - 2u'u + 2u' = 0, \tag{26}$$

где дифференцирование неизвестной функции  $u$  ведется по  $x$ . От уравнения (25) к уравнению (26) можно перейти с помощью замен переменных:

$$u = \frac{2}{3}y; \quad x = \frac{3}{2}t. \tag{27}$$

Условие (24), очевидно, приобретет вид:

$$u|_{x=0} = 0 \tag{28}$$

Задача (26), (28) решается в явном виде. Пусть

$$u'|_{x=0} = A. \tag{29}$$

Тогда

$$u = \begin{cases} A \left( 1 - \frac{1-A}{1-A + \sqrt{1-A} \operatorname{th}(\sqrt{1-A} x)} \right), & A < 1; \\ \frac{x}{x+1}, & A = 1; \\ A \left( 1 - \frac{A-1}{A-1 + \sqrt{A-1} \operatorname{tg}(\sqrt{A-1} x)} \right), & A > 1. \end{cases} \tag{30}$$

Переходя к переменным  $y$  и  $t$  по формулам (27), получим из (30) решение уравнения (25) при следующем из (27) и (29) условии

$$y'|_{t=0} = \frac{9}{4}A = B: \tag{31}$$

$$y = \begin{cases} \frac{2}{3}B \left( 1 - \frac{\sqrt{2,25-B}}{\sqrt{2,25-B} + 1,5 \operatorname{th}(\sqrt{2,25-B}t)} \right), & B < 2,25; \\ \frac{9t}{6t+4}, & B = 2,25; \\ \frac{2}{3}B \left( 1 - \frac{\sqrt{B-2,25}}{\sqrt{B-2,25} + 1,5 \operatorname{tg}(\sqrt{B-2,25}t)} \right), & B > 2,25. \end{cases} \quad (32)$$

Заметим, что при стремлении параметра  $B$  к числу 2,25 первое и третье уравнение совокупности (32) примут вид второго уравнения этой совокупности. Раскладывая функции  $\operatorname{th}$  и  $\operatorname{tg}$  в степенной ряд и оставляя только первый член ряда, получим из (32) во всех случаях аппроксимацию Паде типа (1; 1) решения  $y = y(t)$  задачи (25), (24), (31):

$$y = \frac{Bt}{1+1,5t}. \quad (33)$$

**4. Вычисление компонент тензора напряжений.** В работе рассмотрен наиболее содержательный третий случай. Возвращаясь к переменным  $\rho$  и  $R$  по формулам (21) и (22), получим из (33) и (20) (по-прежнему оставляем только первые члены разложений)

$$\tau = \frac{B}{4\mu} \theta \frac{\ln \rho}{1+1,5 \ln \rho} = \frac{B}{2\mu} \theta \frac{\rho-1}{3\rho-1}. \quad (34)$$

Для тонкостенных оболочек ошибка в равенстве  $3\rho-1=2$  мала: так как  $|\rho-1| < \frac{1}{2}s$ , то  $3\rho-1 < 2\left(1+\frac{3}{4}s\right)$ , и если  $s=0,04$ , то ошибка не превышает 3%. Это позволяет использовать выражение (34) в упрощенном варианте (с этого момента, в целях упрощения записи, будем предполагать, что  $\mu=0,5$ ):

$$\tau = \frac{B}{2} \theta (\rho-1). \quad (35)$$

Подставив (35) в (1), (2) и (11), и сделав необходимые преобразования, получим систему уравнений для вычисления напряжений  $\sigma_\rho$  и  $\sigma_\theta$ , с точностью до неизвестных слагаемых  $\varphi(\rho)$ ,  $\psi(\theta)$ ,  $C$  и  $C_1$ :

$$\begin{cases} \tau = \frac{B}{2} \theta (\rho-1), \\ \sigma_\theta = \frac{B\theta^2}{2} \left( 1 - \frac{3}{2}\rho \right) + \varphi(\rho) + C_1, \\ \sigma_\rho = -\frac{B}{4} (1-\rho)^2 - (2-\rho)^2 - \frac{B^2\theta^2}{12} (\rho-1)^3 + \psi(\theta) + C, \end{cases} \quad (36)$$

со следующими начальными условиями:

$$\begin{aligned} \varphi(\rho)|_{\rho=1} &= 0, \\ \psi(\theta)|_{\theta=0} &= 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Подставляя в равенство (11) выражения для вычисления напряжений из системы (36) и используя условия (37), получим:

$$\begin{cases} \tau = \frac{B\theta}{2}(\rho-1), \\ \sigma_\theta = \frac{B\theta^2}{2}\left(1-\frac{3}{2}\rho\right) - \frac{B}{4}(1-\rho)^2 - (2-\rho)^2 + C + 2, \\ \sigma_\rho = -\frac{B}{4}(1-\rho)^2 - (2-\rho)^2 - \frac{B^2\theta^2}{12}(\rho-1)^3 - \frac{B\theta^2}{4} + C. \end{cases} \quad (38)$$

Существуют различные подходы для вычисления постоянной  $C$ . Можно, предполагая, что уравнения (38) распространяются на весь слой, и, используя принцип Сен-Венана, найти  $C$  из уравнения:

$$\int_{-\theta_k}^{\theta_k} \sigma_\rho|_{\rho=\rho_n} d\theta = 0, \quad (39)$$

утверждающего, что среднеинтегральное значение нормального напряжения  $\sigma_\rho$  равно нулю на свободной поверхности. Этот подход наиболее прост, но дает несколько завышенную оценку для критических напряжений. Применяя (39) и отбрасывая слагаемые порядка 2 и выше относительно  $S$ , получим:

$$C = \frac{B}{4}(1-\rho_n)^2 - (2-\rho_n)^2 + \frac{\theta_k^2}{3} \left( \frac{B^2(\rho_n-1)^3}{12} + \frac{B}{4} \right). \quad (40)$$

Так как в предельном состоянии выполняется условие (8), можно, ссылаясь на (8) и (9), из равенства (35) получить:

$$\frac{B}{2}\theta_k \frac{s}{2} = K - 1. \quad (41)$$

Соотношения (4) и (41) позволяют в равенстве (40) исключить параметры  $B$ ,  $\rho_n$  и  $\theta_k$ , и записать выражение для постоянной  $C$  через основные геометрические и механические характеристики соединения:

$$C = \frac{(K-1)}{2\chi} + 1 - s + \frac{(K-1)\chi}{6}, \quad (42)$$

где  $K$  - коэффициент механической неоднородности,  $\chi$  - относительная толщина слоя,  $s$  - относительная толщина оболочки.

**5. Вычисление предельной нагрузки и условий равнопрочности однородному соединению.** Считая, что формулы (38) для вычисления компонент тензора напряжений распространяются на весь слой, вычислим среднее предельное напряжение  $\sigma_\theta$  по формуле:

$$\sigma_{cp} = \frac{1}{s} \int_{1-\frac{s}{2}}^{1+\frac{s}{2}} \sigma_\theta|_{\theta=\theta_k} d\rho = \frac{2}{s} \int_1^{1+\frac{s}{2}} \sigma_\theta|_{\theta=\theta_k} d\rho. \quad (43)$$

Используя выражение для вычисления  $\sigma_\theta$  в (38) и формулу (42), получим после интегрирования по формуле (43) и отбрасывания заведомо малых слагаемых:

$$\sigma_{cp} = 2(1 + f(K, \chi, s)), \quad (44)$$

$$f(K, \chi, s) = \frac{K-1}{4\chi} - \frac{(K-1)\chi}{6} - \frac{s}{2}, \quad (45)$$

где слагаемое  $f$  характеризует величину контактного упрочнения МП, возникающего вследствие усложнения НС в МП в процессе ее деформирования. В случае, когда прослойка достаточно тонкая, упрочнение может оказаться настолько большим, что соединение с мягкой прослойкой (его сечение - кольцо с содержащимся в нем кольцевым сектором из менее прочного материала) станет равным по прочности однородному соединению из более прочного материала основной

части кольца. Для вычисления относительной толщины  $\chi_p$  такой прослойки следует приравнять напряжение  $\sigma_{cp}$  напряжению  $\sigma_\theta$  в однородном кольце из более прочного ОМ:

$$\sigma_{cp} = 2K.$$

Используя выражения (44) и (45), из последнего равенства получим уравнение для вычисления  $\chi = \chi_p$ :

$$\chi^2 + 3\left(2 + \frac{s}{K-1}\right)\chi - \frac{3}{2} = 0.$$

Из его решения

$$\chi_p = \frac{K-1}{4(K-1)+2s} \quad (46)$$

следует, что максимальная относительная толщина равнопрочной МП должна несколько уменьшаться с увеличением относительной толщины кольца (толщины стенки тонкостенной цилиндрической оболочки).

## Литература

1. Теория пластических деформаций металлов / Е.П. Унксов, У. Джонсон, В.Л. Колмогоров и др. - М.: Машиностроение. - 1983. - 598 с.
2. Смирнов, В.С. Теория обработки металлов давлением / В.С. Смирнов. - М.: Металлургия, 1973. - 496 с.
3. Дильман, В.Л. Напряженное состояние и прочность неоднородных соединений, содержащие трещиноподобные поверхностные макродефекты на границе твердого и мягкого участков / В.Л. Дильман // Обозрение прикладной и промышленной математики.. - 2002. - Т.9. - Вып. 1. - С. 186-187.
4. Остсемин, А.А. О сжатии пластического слоя двумя шероховатыми плитами / А.А. Остсемин, В.Л. Дильман // Проблемы прочности. - 1990. - № 7. - С. 107—113.
5. Дильман, В.Л. Об одной математической модели напряженного состояния пластического слоя при плоской деформации / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». - 2005. - Вып. 6. - № 6. - С. 19-23.
6. Дильман В.Л. Напряженное состояние и статическая прочность пластичной прослойки при плоской деформации/ В.Л. Дильман, А.А. Остсемин//Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2005. - № 4 - С. 38-48.
7. Прандтль Л. Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел /Л. Прандтль // Теория пластичности / Под ред. Ю.Н. Работнова. - М.: ГИИЛ. -1948. - С. 102-113.

*Поступила в редакцию 30 июня 2006 г.*