ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ (НИУ)

УДК 517.9

На правах рукописи

Мухаметьярова Альфия Адыгамовна

Линейные модели Баренблатта – Желтова – Кочиной и Хоффа на геометрическом графе

01.04.01 - Математика

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Г.А. Свиридюк

ЧЕЛЯБИНСК – 2019

АННОТАЦИЯ

Мухаметьярова А.А. Линейные модели Баренблатта – Желтова – Кочиной и Хоффа на геометрическом графе.– Челябинск: ЮУрГУ, ЕТ-221, 43 с., 0 ил., библиогр. список – 39 наим.

На геометрическом графе рассматривается краевая задача, где помимо условий непрерывности и баланса потоков, впервые вводится условие неподвижности в вершине графа, которое превращается в условие Дирихле, когда граф содержит одно ребро с двумя вершинами. При решении этой задачи сначала рассматривается соответствующая задача Штурма-Лиувилля, а затем полученные результаты применяются для решения задачи Коши двух линейных моделей, заданных на графе: уравнения Хоффа и уравнения Баренблатта – Желтова - Кочиной. Особенностью работы является и тот факт, что на каждом ребре графа задаются уравнения с различными коэффициентами, что вкупе с введением неподвижных вершин графа является впервые рассматриваемой задачей.

Обе модели относятся к уравнениям соболевского типа, изучение которых переживает эпоху своего расцвета. Проведенная редукция этих уравнений к абстрактному уравнению соболевского типа позволила применить метод вырожденных полугрупп операторов. Найдено фазовое пространство решений методом фазового пространства, заключающимся в сведении сингулярного уравнения к определенному на некотором подпространстве исходного пространства регулярному уравнению. Полученные результаты теорем могут быть применены при рассмотрении обратных задач, задач оптимального управления, начально-конечных и многоточечных задач, а также при рассмотрении стохастических уравнений для моделей, заданных на геометрическом графе.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное исследование относится к двум направлениям: обе рассматриваемые задачи относятся как к теории уравнений соболевского типа, так и дифференциальным уравнениям на графе.

Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$ – конечный связный ориентированный геометрический граф. Множество вершин графа $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ представим в виде объединения двух подмножеств $\mathfrak{V}' = \{V_i'\}$ и $\mathfrak{V}'' = \{V_i''\}$ ”подвижных” и ”неподвижных” вершин графа. Множество $\mathfrak{E} = \{E_i\}$ – множество ребер E_j, снабженных длиной l_j и толщиной d_j соответственно, причем будем разделять множества $E^\alpha(V_i)$ – множество ребер, выходящих из V_i и $E^\omega(V_i)$ – множество ребер, входящих в V_i.

На каждом ребре E_j геометрического графа $\mathbf{G}$ зададим линейное уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной

$$\lambda_j u_{jt} - u_{jxxt} = \alpha_j u_{jxx}, \tag{1}$$

моделирующее динамику давления жидкости, фильтрующейся в трещинновато-пористой среде, и линеаризованные уравнения Хоффа

$$\lambda_j u_j t + u_{jxxt} = \alpha_j u_j, \tag{2}$$

моделирующие выпучивание конструкции из балок.

Компоненты неизвестной вектор-функции $u = (u_1, u_2, ..., u_j, ...)$ уравнений (1) и (2) в вершинах $\mathfrak{V}$ графа $\mathbf{G}$ удовлетворяют краевым условиям

$$u_j(0,t) = u_k(l_k,t), \quad E_j, E_k \in E^\alpha(V_i') \cup E^\omega(V_i') \tag{3}$$

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i')} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i')} d_k u_{kx}(0,t) = 0 \tag{4}$$

$$u_j(0,t) = u_k(l_k,t) = 0, \quad E_j, E_k \in E^\alpha(V_i'') \cup E^\omega(V_i''), \tag{5}$$

а также начальным условиям Коши

$$u_j(x,0) = u_{j0}(x), \quad x \in (0, l_j). \tag{6}$$

Первым, кто начал изучать модели, относящиеся как к уравнениям соболевского типа, так и уравнениям, заданным на геометрических графах, был Г.А. Свиридюк [15]. Описания фазовых пространств уравнений на графе были сделаны В.В. Шеметовой [23] как для линейных, так и для нелинейных моделей. Впоследствии эти результаты были расширены учениками Георгия Анатольевича, на графе стали изучать помимо задачи Коши, задачу Шоуолтера – Сидорова и начально-конечные задачи, задачи оптимального управления и обратные задачи, исследовать такие уравнения на устойчивость. Уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной, Хоффа на графе в более простой постановке были изучены в работах [16], [13], [14]. Задача Штурма – Лиувилля в случае, когда граф состоит только из подвижных вершин, разобрана в [2]. Магистерская работа выполнена под руководством Георгия Анатольевича и продолжает расширять знания в этой области. Основные результаты магистерской диссертации опубликована в [3].

1. УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Теория математических моделей физических явлений (иначе математическая физика) развивалась параллельно с развитием физики и математики. Классические основы этой теории были заложены ещё Ньютоном, а после развития дифференциального и интегрального исчисления начался настоящий бум развития математической физики, образовав так называемую классическую математическую физику. В связи с возникновением новых задач и отсюда разделов физики, возникла необходимость в современной математической физики, требующей более совершенного математического аппарата. Как оказалось, важную роль играет концепция обобщённого решения, основы математической теории обобщенных функций заложил С.Л. Соболев [18]. Благодаря ему же мы получили новый раздел математической физики – уравнения соболевского типа, который в настоящее время значительно расширяется и переживает бурную эпоху развития. Это название для уравнений, неразрешенных относительно старшей производной по времени, стало устоявшимся относительно недавно [35], [31]. И хотя всё ещё встречаются работы с синонимичными названиями этого раздела уравнений математической физики, большинство работ как в русско-язычных изданиях, так и иностранной литературе посвящены именно "уравнениям соболевского типа", что является основанием считать этот раздел уравнений современной физики уже "классическим".

Одним из первых уравнение в частных произвоных начал изучать Пуанкаре [33]. Позднее систематическое изучение уравнений такого вида начал С.Л. Соболев [17]. Уравнения соболевского типа в разных аспектах изучались А.Г. Свешниковым, А.Б. Альшиным, М.О. Корпусовым, Ю.Д. Плетнером [8], Г.В. Демиденко и С.В. Успенским [5], В.Ф. Чистяковым, Ю.Е. Бояринцевым и А.А. Щегловой [19], [20], И.Е. Егоровым, С.Г. Пятковым, С.В. Поповым [6], [34], Н.А. Сидоровым, Б.В. Логиновым, А.В. Синицыным и М.А. Фалалеевым [37], И.В. Мельниковой и А.И. Филенкова [32]. Также отметим исследования А. Фавини и А. Яги [26], А.И. Кожанова [30], В.Н. Врагова [4].

Впервые в монографии Р.Е. Шоуолтера [36] рассматриваются дифференциально-операторные уравнения, определенные в полугильбертовых пространствах. Концепция изучения уравнений соболевского типа с помощью разрешающих групп и полугрупп операторов, а также построения фазового пространства была заложена Г.А. Свиридюком [9] – [12]. В монографии [38] вводятся понятия относительно p-ограниченных, p-секториальных и p-радиальных операторов. Полученные результаты применены как к линейным, так и к полулинейным моделям соболевского типа.

Результаты этой главы получены в работах Г.А. Свиридюка и его учеников, а сама глава носит пропедевтический характер и содержит необходимые теоретические сведения для решения поставленных задач.

1.1. Относительно σ-ограниченные операторы

Введем в рассмотрение банаховы пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$, зададим линейные операторы L, M, причем операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$.

Определение 1.1. *Открытое множество* $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}, \mathfrak{U})\}$ *назовем* L*-резольвентным множеством оператора* M*, а замкнутое множество* $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \backslash \rho^L(M)$ *–* L*-спектром.*

Определение 1.2. *Спектрально ограниченным относительно оператора* L или, более кратко, (L, σ) *-ограниченным* будем называть оператор M, для которого выполняется условие

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \ \forall \mu \in \mathbb{C} \ (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Замечание 1.1. *В частности, из определения следует:*

(i) В случае $\mathfrak{U} = \mathfrak{R} = \mathbb{R}^n$ *оператор* M *является* (L, σ)*-ограниченным или* $\sigma^L(M) = \mathbb{C}$*;*

(ii) В случае, когда оператор L *компактный или* $\ker L \bigcap \ker M \neq \{0\}$*, оператор* M *не будет* (L, σ)*-ограниченным;*

(iii) (L, σ)*-ограниченность оператора* M *следует и в случае существования обратного оператора* $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$*.*

Пусть $\rho^L(M) \neq \oslash$, оператор-функцию $(\mu L - M)^{-1}$ назовем резольвентой оператора M относительно оператора L (сокращенно L-резольвентой оператора M), а оператор-функции $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ и $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ – *правой* и *левой L-резольвентами* оператора M.

Лемма 1.1. *Выберем контур $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$. Тогда операторы типа Рисса*

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R^L_\mu(M)d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}), \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma L^L_\mu(M)d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$$

являются проекторами в случае (L,σ)-ограниченности оператора M. (Здесь интегралы понимаются в смысле Римана.)

Замечание 1.2. *Для избежания путаницы в пространствах, можно использовать обозначения: $P = P_\mathfrak{U}$, $Q = P_\mathfrak{F}$.*

Введем следующие обозначения: $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{U}^1 = \mathrm{im\ P}$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{F}^1 = \mathrm{im\ Q}$, M_k (L_k) – сужение оператора M (L) на подпространство $\mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$.

Теорема 1.1. *[Теорема Г.А. Свиридюка о расщеплении]Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда*

(i) операторы $L_k, M_k : \mathfrak{U}^k \to \mathfrak{F}^k, k = 0, 1$;

(ii) существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0, \mathfrak{U}^0)$;

(iii) существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1, \mathfrak{U}^1)$;

(iv) оператор $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1, \mathfrak{F}^1)$.

Положим $H = M_0^{-1}L_0,\ S = L_1^{-1}M_1$. Тогда $H \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0),\ S \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$ по построению.

Следствие 1.1. *Для (L,σ)-ограниченного оператора M при любом $\mu \in \mathbb{C}$ таком, что $(|\mu| > a)$, имеет место разложение оператор-функции $(\mu L - M)^{-1}$ в следующий ряд Лорана:*

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k H^k M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q) + \sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}S^k L_1^{-1}Q.$$

Определение 1.3. Для L-резольвенты оператора M точка ∞ называется

(i) *устранимой особой точкой или полюсом порядка нуль*, если $H \equiv \mathbb{O}$;

(ii) *полюсом порядка $p \in \mathbb{N}$*, если $H^p \neq \mathbb{O}$, а $H^{p+1} \equiv \mathbb{O}$;

(iii) *существенно особой точкой*, если при любом $q \in \mathbb{N}$ $H^q \neq \mathbb{O}$.

Определение 1.4. Оператор M называется (L, p)-*ограниченным*, если оператор M (L, σ)- ограничен и ∞ является полюсом порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Замечание 1.3. *В случае* $\mathfrak{U} = \mathfrak{F} = \mathbb{R}^n$ *оператор* M *является* (L, σ)*- ограниченным точно тогда, когда он* (L, p)*-ограничен, причем* $p \in \{0, 1, ..., n\}$.

Пусть операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, причем $\ker L \neq \{0\}$. Условимся вектор $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$ называть *собственным вектором* оператора L.

Упорядоченное множество векторов $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ называется *цепочкой* M*-присоединенных векторов* собственного вектора φ_0, если

$$L\varphi_{k+1} = M\varphi_k, \quad k = 0, 1, ..., \quad \varphi_l \notin \ker L \setminus \{0\}, \quad l = 1, 2, ...$$

Если $\varphi_0 \in \ker L \cap \ker M$, то цепочка бесконечна и заполнена нулями, если же найдется вектор φ_p такой, что либо $\varphi_p \notin \mathrm{dom\ M}$, либо $M\varphi_p \notin \mathrm{im\ L}$, то цепочкой M-присоединенных векторов конечна.

Порядковый номер вектора в цепочке будем называть его *высотой*, а порядковый номер последнего вектора в конечной цепочке – *длиной* этой цепочки.

Множество $\mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ называется M*- корневым линеалом* оператора L, а в случае замкнутости – M*-корневым пространством* оператора L.

Замечание 1.4. *В случае, когда* $\mathfrak{U} = \mathfrak{F}$ *и* $M = \mathbb{I}$*, собственные и* M*- присоединенные векторы есть собственные и присоединенные векторы оператора L, отвечающими нулевому собственному значению.*

Теорема 1.2. *Пусть оператор* M (L, p)*- ограничен и*

(i) $p = 0$ *тогда* $\ker L = \mathfrak{U}^0$, $\mathrm{im\ L} = \mathfrak{F}^1$, *и любой собственный вектор оператора L не имеет* M*-присоединенных векторов.*

(ii) $p \in \mathbb{N}$*, тогда* M*-корневое пространство оператора L совпадает с* $\mathfrak{U}^0$ *и состоит из* M*-присоединенных векторов оператора L высоты не больше* p.

Следствие 1.2. *Пусть оператор* M $(L, 0)$*- ограничен, и ядро* $\ker L = \{0\}$. *Тогда существует оператор* $L^{-1} \in (\mathfrak{F}, \mathfrak{U})$.

Наконец напомним, что оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ называется *фредгольмовым*, если $\operatorname{ind} L = 0$ (или, что то же самое, $\dim \ker\ L = \operatorname{codim}\ \operatorname{im}\ L$).

Теорема 1.3. *Для фредгольмова оператора* L *утверждение "оператор* M (L, p)*-ограничен" эквивалентно утверждению "длины всех цепочек* M*-присоединенных векторов любого собственного вектора оператора* L *ограничены числом* $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*".*

1.2. Разрешающие группы операторов

В дальнейшем будем считать пространства $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ банаховыми, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, причем оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{1.1}$$

для линейного уравнения соболевского типа, заданного в абстрактной форме

$$L\dot{u} = Mu. \tag{1.2}$$

Чтобы найти решение уравнения (1.2), его удобно представить в одном из следующих видов:

$$R^L_\alpha(M)\dot{u} = (\alpha L - M)^{-1} M u, \tag{1.3}$$

$$L^L_\alpha(M)\dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1} f, \tag{1.4}$$

где $u = (\alpha L - M)^{-1} f$, $\alpha \in \rho^L(M)$. Уравнения (1.3), (1.4) представимы в виде

$$A\dot{v} = Bv, \tag{1.5}$$

где операторы A, $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{V})$, $\mathfrak{V}$ — банахово пространство.

Определение 1.5. *Вектор-функцию* $v \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{V})$*, удовлетворяющую уравнению (1.5), назовем решением этого уравнения. Решение* $v = v(t)$ *уравнения (1.5), удовлетворяющее условию Коши (1.1), назовем решением задачи Коши (1.1), (1.5).*

Замечание 1.5. *Пусть решение уравнения* $v \in C^1(\mathbb{R}; \mathfrak{V})$*, тогда* $v \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{V})$.

Определение 1.6. *Множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{V}$ называется фазовым пространством уравнения (1.5), если*

(i) любое решение $v \in C^1(\mathbb{R};\mathfrak{V})$ уравнения (1.5) лежит в $\mathfrak{P}$, то есть $v(t) \in \mathfrak{P}$ при всех $t \in \mathbb{R}$;

(ii) при любом $v_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи Коши $v(0) = v_0$ для уравнения (1.5).

Заметим, что фазовое пространство уравнения (1.5) совпадает с пространством $\mathfrak{V}$ в случае существования оператора $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$. Если же оператор B (A,σ)-ограничен и оператор $A = \mathbb{O}$, то фазовое пространство совпадает с точкой 0.

Определение 1.7. *Отображение $V^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R};\mathfrak{V})$ называется группой разрешающих операторов (или просто – разрешающей группой) уравнения (1.5), если*

(i) $V^sV^t = V^{s+t}$ при всех $s,t \in \mathbb{R}$;

(ii) вектор-функция $v(t) = V^tv_0$ является решением уравнения (1.5) при любом $v_0 \in \mathfrak{V}$.

Отождествим разрешающую группу с ее множеством значений $\{V^t : t \in \mathbb{R}\}$. Группу $\{V^t : t \in \mathbb{R}\}$ назовем аналитической (голоморфной), если она аналитически продолжается во всю комплексную плоскость.

Теорема 1.4. *Пусть оператор M (L,p)–ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда $\mathfrak{U}^1$ является фазовым пространством уравнения (1.3), а $\mathfrak{F}^1$ – фазовое пространство (1.4).*

Теорема 1.5. *Пусть оператор $M(L,\sigma)$–ограничен. Построим семейства операторов*

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \quad F^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma L^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu. \tag{1.6}$$

Тогда $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ ($\{F^t : t \in \mathbb{R}\}$) является аналитической разрешающей группой уравнения (1.3), (1.4).

Замечание 1.6. *Как нетрудно видеть, $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ будет разрешающей группой уравнения (1.2), а $\mathfrak{U}^1$ является также фазовым пространством уравнения (1.2).*

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ГРАФАХ

Теория дифференциальных уравнений на графах относительно молодое направление [24], [39], [29], [21], [22]. В таких задачах подразумевается композиция скалярных краевых задач, где каждая задача соответствует определенному ребру геометрического графа, а условия связи между ребрами приводят к краевым условиям. Моделирование самых разных явлений, от бифуркаций вихревых течений в жидкости до колебаний сложных молекул, а также многих других явлений, приводит к уравнениям на геометрических графах. Интенсивное изучение краевых задач на геометрических графах (пространственных сетях) началось лишь с начала 80-х годов. В России основоположником этой теории является Ю.В. Покорный [7].

2.1. Обобщенная задача Штурма – Лиувилля

Нас интересует задача Штурма – Лиувилля для уравнений

$$a_j(x)u_j - (c_j(x)u_{jx})_x = f_j, \quad u_j = u_j(x), \tag{2.1}$$

заданных на конечном связном ориентированном геометрическом графе $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$. Здесь через $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ обозначено множество вершин графа, разбитое на два подмножества $\mathfrak{V}^{'} = \{V_i^{'}\}$ и $\mathfrak{V}^{''} = \{V_i^{''}\}$: множества ”подвижных” и ”неподвижных” вершин графа. Множество всех ребер обозначим через $\mathfrak{E} = \{E_i\}$, причем будем разделять множества $E^\alpha(V_i)$ – множество ребер с началом в вершине V_i и $E^\omega(V_i)$ – множество ребер с концом в вершине V_i. Каждому ребру соответствует числовой параметр l_j – длина ребра и числовой параметр $d_j \in \mathbb{R}_+$ – толщина (т.е. площадь поперечного сечения) ребра E_j соответственно. Функции $a_j(x)$, $c_j(x)$ предполагаются известными, функции $u_j = u_j(x)$ подлежат нахождению, $x \in (0, l_j)$ – натуральный параметр ребра, $t \in \mathbb{R}$.

Решения уравнений (2.1) в каждой вершине графа удовлетворяют условиям

$$u_j(0,t) = u_k(l_k,t), \quad E_j, E_k \in E^\alpha(V_i^{'}) \cup E^\omega(V_i^{'}), \tag{2.2}$$

которое означает, что искомое решение $u = (u_1, u_2, \ldots, u_j, \ldots)$ в каждой "подвижной" вершине графа должно быть непрерывным,

$$\sum_{j:E_j \in E^\alpha(V_i')} d_j c_j(0) u_{jx}(0,t) - \sum_{k:E_k \in E^\omega(V_i')} d_k c_k(l_k) u_{kx}(0,t) = 0, \qquad (2.3)$$

которое означает равенство потока через каждую вершину графа нулю, так называемый аналог условия Кирхгоффа,

$$u_j(0,t) = u_k(l_k,t) = 0, \quad E_j, E_k \in E^\alpha(V_i^{''}) \cup E^\omega(V_i^{''}), \qquad (2.4)$$

так называмое условие "неподвижности" решения в вершинах графа $\mathfrak{V}'' = \{V_i^{''}\}$ – аналог условия Дирихле. В случае, когда граф состоит из единственного дуги с двумя подвижными вершинами, условие (2.2) исчезает, а условие (2.3) превращается в условие Неймана.

Через $\mathbf{L_2}(\mathbf{G})$ обозначим гильбертово пространство

$$\mathbf{L_2}(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, ..., g_j, ...) : g_j \in L_2(0, l_j)\}$$

со скалярным произведением

$$\langle g, h \rangle = \sum_{j:E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} g_j(x) h_j(x) dx.$$

Через $\mathfrak{U}$ обозначим множество

$$\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, ..., u_j, ...) : u_j \in W_2^1(0, l_j), \text{ и выполнены (2.2), (2.4)}\}.$$

Заметим, что $\mathfrak{U}$ – гильбертово пространство со скалярным произведением

$$[u, v] = \sum_{j:E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}(x) v_{jx}(x) + u_j(x) v_j(x)) dx.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать пространство $\mathfrak{U}$ как банахово с нормой, порождаемой скалярным произведением

$$||u||_{\mathfrak{U}}^2 = \sum_j d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}^2 + u_j^2) dx,$$

так как нас будет интересовать его банахова структура.

Заметим, что естественность условий (2.2), (2.4), входящих в определение банахова пространства $\mathfrak{U}$ следует из того, что компоненты u_j абсолютно непрерывны. Пусть $\mathfrak{F}$ сопряженное банахово пространство к $\mathfrak{U}$ относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в $L_2(\mathbf{G})$. Тогда в силу теорем вложения Соболева очевидно, что пространство $\mathfrak{U}$ плотно в $L_2(\mathbf{G})$, а также в $\mathfrak{F}$, причем вложение $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$ в силу $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathbf{L_2}(\mathbf{G})$.

На графе $\mathbf{G}$ рассмотрим уравнение (2.1), коэффициенты которого принимают вещественные значения и удовлетворяют условиям

$$a_j(x) \in C[0,l_j], \quad c_j(x) \in C^1[0,l_j], \quad c_j(x) \geq c_0 > 0 \text{ для всех } x \in (0,l_j).$$

Определение 2.1. *Классическим решением задачи (2.1) — (2.4) назовем вектор-функцию* $u = (u_1, u_2, ..., u_j, ...)$ *такую, что* $u_j \in C^2(0,l_j) \cap C^1[0,l_j]$, *если она удовлетворяет уравнению (2.1) и краевым условиям (2.2), (2.3), (2.4).*

Определение 2.2. *Обобщенным решением задачи (2.1) — (2.4) назовем вектор-функцию* $u \in \mathfrak{U}$, *если* $f \in \mathfrak{F}$ *и выполняется тождество*

$$\sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} \left(c_j(x) u_{jx} v_{jx} + a_j(x) u_j v_j\right) dx = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} f_j v_j dx \tag{2.5}$$

при всех $v \in \mathfrak{U}$.

Покажем, что понятие обобщенного решения является расширением классического определения решения задачи (2.1) – (2.4). Если бы все входящие в (2.5) функции были бы достаточно гладкие, то интегрированием по частям в первой группе членов уравнения (2.5) мы бы получили

$$\sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j c_j(l_j) u_{jx}(l_j,t) v_j(l_j,t) - \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j c_j(0) u_{jx}(0,t) v_j(0,t) +$$

$$+ \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} \left(-(c_j(x) u_{jx})_x v_j + a_j(x) u_j v_j\right) dx = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} f_j v_j dx.$$

Сгруппируем первое и второе слагаемое по принадлежности ребер к одной вершине, а третье слагаемое с правой частью уравнения

$$\sum_{V_i} \left(\sum_{E_j \in E^{\alpha}(V_i)} d_j c_j(0) u_{jx}(0,t) v_j(0,t) - \sum_{E_k \in E^{\omega}(V_i)} d_k c_k(l_k) u_{kx}(l_k,t) v_k(l_k,t) \right)$$

$$+\sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} \left(-(c_j(x)u_{jx})_x v_j + a_j(x)u_j v_j - f_j v_j\right) dx = 0.$$

Отделим слагаемые с условиями в "подвижных"и "неподвижных"вершинах графа

$$\sum_{V_i'} \left(\sum_{E_j\in E^{\alpha}(V_i')} d_j c_j(0) u_{jx}(0,t) v_j(0,t) - \sum_{E_k\in E^{\omega}(V_i')} d_k c_k(l_k) u_{kx}(l_k,t) v_k(l_k,t) \right) +$$
$$+\sum_{V_i''} \left(\sum_{E_j\in E^{\alpha}(V_i'')} d_j c_j(0) u_{jx}(0,t) v_j(0,t) - \sum_{E_k\in E^{\omega}(V_i'')} d_k c_k(l_k) u_{kx}(l_k,t) v_k(l_k,t) \right)$$
$$+\sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} \left(-(c_j(x)u_{jx})_x v_j + a_j(x)u_j v_j - f_j v_j\right) dx = 0.$$

Компоненты v в "подвижных" вершинах графа удовлетворяют условиям (2.2), а в неподвижных вершинах – условиям (2.4), т.е. справедливо тождество

$$\sum_{V_i'} \left(\sum_{E_j\in E^{\alpha}(V_i')} d_j c_j(0) u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k\in E^{\omega}(V_i')} d_k c_k(l_k) u_{kx}(l_k,t) \right) v_j(0,t) +$$
$$+\sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} \left(-(c_j(x)u_{jx})_x v_j + a_j(x)u_j v_j - f_j v_j\right) dx = 0. \quad (2.6)$$

Заметим, что из (2.1) – (2.4) следует (2.6), а потому и (2.5). С другой стороны, так как элементы v произвольные, то из тождества (2.6) автоматически следует выполнение (2.1) и (2.3).

Для дальнейшего исследования будем полагать, что функции $a_j(x)$, $c_j(x)$ – вещественные, ограниченные, измеримые на $(0, l_j)$, причем выполняется условие $c_j(x) \geq \delta > 0$. Обозначим левую часть равенства (2.5) как оператор $A : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$

$$\langle Au, v\rangle = \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (c_j(x) u_{jx} v_{jx} + a_j(x) u_j v_j) dx. \quad (2.7)$$

Из тождества (2.5) получим уравнение

$$\langle Au, v\rangle = \langle f, v\rangle\,, \quad (2.8)$$

где u, $v \in \mathfrak{U}$, $f \in \mathfrak{F}$, разрешимость которого и будем изучать в дальнейшем.

Пусть $K_1 = \max\limits_{j:\ x\in(0,l_j)} c_j(x)$, $K_2 = \left|\max\limits_{j:x\in(0,l_j)} a_j(x)\right|$, а $K = \max(K_1; K_2)$. В силу неравенства Коши – Буняковского

$$|\langle Au, v\rangle| = \left|\sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (c_j(x)u_{jx}v_{jx} + a_j(x)u_jv_j)dx\right| \leq$$

$$\leq \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (c_j(x)|u_{jx}||v_{jx}| + |a_j(x)||u_j||v_j)|dx \leq$$

$$\leq K \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (|u_{jx}||v_{jx}| + |u_j||v_j|)\, dx \leq K||u||_{\mathfrak{U}}||v||_{\mathfrak{U}}.$$

Таким образом, мы имеем

$$||Au||_{\mathfrak{F}} = \sup_{v\in\mathfrak{U}\setminus\{0\}} \frac{|\langle Au, v\rangle|}{||v||_{\mathfrak{U}}} \leq K||u||_{\mathfrak{U}} < +\infty.$$

Лемма 2.1. *Формулой (2.7) можно определить скалярное произведение, которое будет эквивалентно скалярному произведению в пространстве* $\mathfrak{U}$, *если коэффициенты* $a_j(x)$ *неотрицательны, и существует хотя бы одна функция* $a_j(x)$, *не равная тождественно нулю.*

Доказательство. Для доказательства эквивалентности скалярных произведений нам следует установить существование двух таких постоянных $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, что неравенства

$$\langle Au, u\rangle \leq C_1||u||^2_{\mathfrak{U}}, \quad ||u||^2_{\mathfrak{U}} \leq C_2\, \langle Au, u\rangle \tag{2.9}$$

имеют место при всех $u \in \mathfrak{U}$. Прежде всего заметим, что каждое из слагаемых в выражении $\langle Au, u\rangle$ неотрицательно. Так как

$$\sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} c_j(x)u^2_{jx}dx \leq M_1 \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} u^2_{jx}dx$$

и

$$\sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} a_j(x)u^2_jdx \leq M_2 \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} u^2_jdx,$$

где $M_1 = \max\limits_j ||c_j(x)||_{L_2(0,l_j)}$ и

$$\sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} a_j(x) u_j^2 dx \leq M_2 \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} u_j^2 dx \leq M_2 ||u||^2_{\mathfrak{U}},$$

$M_2 = \max\limits_j ||a_j(x)||_{L_2(0,l_j)}$, то первое из неравенств (2.9) имеет место с постоянной $C_1 = M_1 + M_2$.

Докажем справедливость второго неравенства в (2.9). Предположим напротив, что такой постоянной C_2 не существует. Тогда для любого целого $m \geq 1$ найдется такая функция $u_m(x) \in \mathfrak{U}$, что

$$||u_m||^2_{\mathfrak{U}} > m \left\langle A u_m, u_m \right\rangle,$$

или что то же самое, найдется функция $v_m \in \mathfrak{U}$ ($v_m = \frac{u_m}{||u_m||_{\mathfrak{U}}}$), для которой

$$||v_m||_{\mathfrak{U}} = 1 \tag{2.10}$$

и

$$\langle A v_m, v_m \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (c_j(x) v^2_{m_{jx}} + a_j(x) v^2_{m_j}) dx < \frac{1}{m}.$$

Из этого неравенства вытекает, что каждое слагаемое в $\langle A v_m, v_m \rangle$ меньше $\frac{1}{m}$, и поэтому (воспользуемся неравенством $c_j(x) \geq \delta > 0$) имеют места неравенства

$$\sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} v^2_{m_{jx}} dx < \frac{1}{m\delta}, \quad \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} a_j(x) v^2_{m_j} dx < \frac{1}{m}. \tag{2.11}$$

В силу (2.10) последовательность v_m, $m = 1, 2, \ldots$, ограничена в $\mathfrak{U}$, поэтому в силу компактности вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow L_2(\mathbf{G})$ из нее можно выбрать последовательность, фундаментальную в $L_2(\mathbf{G})$. Не умаляя общности будем считать, что сама последовательность v_m, $m = 1, 2, \ldots$, фундаментальна в $L_2(\mathbf{G})$, т.е. $||v_m - v_p||_{L_2(\mathbf{G})} \to 0$ при $m, p \to \infty$. Так как в силу первого из неравенств (2.11)

$$||v_m - v_p||^2_{\mathfrak{U}} \leq ||v_m - v_p||^2_{L_2(\mathbf{G})} + ||(v_m - v_p)_x||^2_{L_2(\mathbf{G})} \leq ||v_m - v_p||^2_{L_2(\mathbf{G})} + 2||v_{mx}||^2_{L_2(\mathbf{G})} +$$

$$+2||v_{px}||^2_{L_2(\mathbf{G})} \leq ||v_m - v_p||^2_{L_2(\mathbf{G})} + \frac{2}{m\delta} + \frac{2}{p\delta},$$

то $||v_m - v_p||_{\mathfrak{U}} \to 0$ при $m, p \to \infty$, т.е. последовательность v_m, $m = 1, 2, ...$, фундаментальна и в $\mathfrak{U}$. Поэтому эта последовательность сходится в норме $\mathfrak{U}$ к некоторому элементу $v \in \mathfrak{U}$. Переходя к пределу при $m \to \infty$ в равенстве (2.10) и неравенствах (2.11), получим соотношения

i) $||v_m||_{\mathfrak{U}} = 1$;

ii) $\sum\limits_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} v_{m_{jx}}^2 dx = 0$;

iii) $\sum\limits_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} a_j(x) v_{m_j}^2 dx = 0$.

Равенства (i) и (ii) одновременно не выполняются при условии, что множество "неподвижных" вершин непусто. Если же граф состоит только из "подвижных" вершин, то из равенств (i) и (ii) вытекает, что

$$v = const = \left(\sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} c_j(x) dx \right)^{-1} (1, 1, ..., 1, ...),$$

что в случае когда $a_j(x)$ тождественно не равны нулю противоречит равенству (iii). Доказательство леммы завершает существование постоянной C_2 с указанными свойствами и справедливость обоих неравенств (2.9). □

Теорема 2.1. *Единственное обобщенное решение задачи (2.1) – (2.4), удовлетворяющее неравенству*

$$||u||_{\mathfrak{U}} \leq C||f||_{\mathfrak{F}},$$

где функция $f \in \mathfrak{U}$ произвольна, а константа $C > 0$ и не зависит от f, существует, если все функции $a_j(x)$ неотрицательные, и найдется функция $a_j(x)$, не равная нулю тождественно.

Доказательство. В силу леммы уравнение (2.8) можно записать в виде

$$[u, v] = \langle f, v \rangle . \tag{2.12}$$

Так как при фиксированном $f \in \mathfrak{F}$ линейный по $v \in \mathfrak{U}$ функционал $\langle f, v \rangle$ ограничен:

$$|\langle f, v \rangle| \leq ||f||_{\mathfrak{F}} ||v||_{L_2(\mathbf{G})} \leq C||f||_{\mathfrak{F}} ||v||_{\mathfrak{U}},$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от функций f и v. Воспользуемся теоремой Рисса, из которой следует существование функции F в пространстве $\mathfrak{U}$, для которой выполняется

$$\langle f, v \rangle = [F, v]$$

для любой функции $v \in \mathfrak{U}$. Заметим, что такая функция единственна и выполняется неравенство

$$||F||_{\mathfrak{U}} \leq C||f||_{\mathfrak{F}}.$$

Отсюда следует, что в $\mathfrak{U}$ существует единственная функция $u = F$, удовлетворяющая тождеству (2.12). Теорема доказана. □

Резюмируя полученные результаты, получаем, что оператор $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ является топлинейным изоморфизмом пространств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ в случае если функции $a_j(x) \geq 0$ и хотя бы одна из функций $a_j(x)$ не равна нулю тождественно. Оператор $A^{-1} : \mathfrak{F} \to \mathfrak{U}$ существует в силу теоремы Банаха, причем $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$. Так как вложение $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$ является компактным, то оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ компактен.

2.2. Собственные функции и собственные значения

Определение 2.3. *Собственной функцией задачи (2.1) – (2.4) оператора*

$$A = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(-c_1(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) + a_1(x), \frac{\partial}{\partial x} \left(-c_2(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) + a_2(x), ..., \right.$$
$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \left(-c_j(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) + a_j(x), ..., \right)$$

назовем функцию $u = (u_1, u_2, ..., u_j, ...)$, не равную тождественно нулю, если существует такое число λ, что функция u является классическим решением следующей задачи:

$$a_j(x)u_j - (c_j(x)u_{jx})_x = \lambda u_j,$$

$$\sum_{E_j \in E^{\alpha}(V_i)} d_j c_j(x) u_{jx}(0, t) - \sum_{E_k \in E^{\omega}(V_i)} d_k c_k(x) u_{kx}(l_k, t) = 0.$$

$$u_j(0, t) = u_k(l_k, t), \quad E_j, E_k \in E^{\alpha}(V_i^{'}) \cup E^{\omega}(V_i^{'})$$

$$\sum_{E_j \in E^{\alpha}(V_i')} d_j c_j(0) u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^{\omega}(V_i')} d_k c_k(l_k) u_{kx}(0,t) = 0$$

Число λ называется собственным значением (соответствующим собственной функции u).

Заметим, что собственная функция задачи (2.1) – (2.4) при всех $v \in \mathfrak{U}$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (c_j(x) u_{jx} v_{jx} + a_j(x) u_j v_j) dx = \lambda \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} u_j v_j dx. \qquad (2.13)$$

Определение 2.4. *Обобщенной собственной функцией задачи (2.1) – (2.4) для оператора A называется не равная нулю функция $u \in \mathfrak{U}$, если существует такое число λ (собственное значение, отвечающее u), что функция u при всех $v \in \mathfrak{U}$ удовлетворяет интегральному тождеству (2.13).*

Заметим, каждой собственной функции отвечает единственное собственное значение, однако обратное не всегда является верным. Например в случае когда u является собственной функцией, то и функция cu при любом значении постоянной $c \neq 0$ будет также являться собственной функцией, отвечающей тому же собственному значению. В дальнейшем будем рассматривать нормированные условием $||u||_{L_2(\mathbf{G})} = 1$ собственные функции. Нас интересуют обобщенные собственные функции и соответствующие им собственные значения, нормированные условием $||u||_{L_2(\mathbf{G})} = 1$. Рассмотрим определяющее обобщенные собственные функции тождество (2.13) как равенство скалярных произведений в пространствах $L_2(\mathbf{G})$ и $\mathfrak{U}$ соответственно. Пусть $m = \min\limits_j \left(\min\limits_{x \in (0,l_j)} a_j(x) \right)$ (здесь мы не предполагаем, что $a_j(x) \geq 0$). Тогда функции $\tilde{a}_j(x) = a_j(x) - m + 1 \geq 1$. Эквивалентное обычному скалярное произведение в $\mathfrak{U}$ задается равенством

$$[u,v] = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (c_j(x) u_{jx} v_{jx} + \tilde{a}_j(x) u_j v_j) dx. \qquad (2.14)$$

Тождество (2.13) примет вид

$$[u,v] = (\lambda - m + 1) \langle u, v \rangle . \qquad (2.15)$$

Лемма 2.2. *Существует линейный ограниченный оператор B из $L_2(\mathbf{G})$ в $\mathfrak{U}$ с областью определения $L_2(\mathbf{G})$, для которого при всех $v \in \mathfrak{U}$ имеет место равенство*

$$\langle u, v\rangle = [Bu, v], \tag{2.16}$$

причем оператор B имеет обратный B^{-1}.

Доказательство. Для любой (фиксированной) функции $u \in L_2(\mathbf{G})$ линейный по v, $v \in \mathfrak{U}$, функционал $l(v) = \langle u, v\rangle$ ограничен, так как

$$|l(v)| = |\,\langle u, v\rangle\,| \le ||u||_{L_2(\mathbf{G})}||v||_{L_2(\mathbf{G})} \le C||u||_{L_2(\mathbf{G})}||v||_{\mathfrak{U}}.$$

Поэтому согласно лемме Рисса существует единственная функция $U \in \mathfrak{U}$, $||U||_{\mathfrak{U}} = ||l|| \le C||u||_{L_2(\mathbf{G})}$ такая, что $l(v) = [U, v]$ для всех $v \in \mathfrak{U}$. Это означает, что на $L_2(\mathbf{G})$ задан оператор B (очевидно, линейный): $Bu = U$, для которого выполняется (2.16). Так как $||Bu||_{\mathfrak{U}} \le C||u||_{L_2(\mathbf{G})}$, то оператор B из $L_2(\mathbf{G})$ в $\mathfrak{U}$ ограничен. Если при некотором u из $L_2(\mathbf{G})$ выполнено равенство $Bu = 0$, то в силу (2.16) $\langle u, v\rangle = 0$ для всех $v \in \mathfrak{U}$, т.е. $u = 0$. Это означает, что существует оператор B^{-1}. □

Лемма 2.3. *Оператор B, если его рассматривать как оператор из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{U}$, является самосопряженным, положительным и вполне непрерывным.*

Доказательство. Положительность и самосопряженность оператора B из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{U}$ следует из (2.16) и

$$[Bu, v] = \langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle = [Bv, u] = [u, Bv].$$

В силу компактности вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow L_2(\mathbf{G})$ произвольное ограниченное в $\mathfrak{U}$ множество компактно в $L_2(\mathbf{G})$. Значит, из любого его бесконечного подмножества можно выбрать фундаментальную в $L_2(\mathbf{G})$ последовательность u_s, $s = 1, 2, ...$. Так как оператор B из $L_2(\mathbf{G})$ в $\mathfrak{U}$ ограничен и, следовательно, непрерывен, то последовательность Bu_s, $s = 1, 2, ...$, фундаментальна в $\mathfrak{U}$. Отсюда следует, что оператор B из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{U}$ вполне непрерывен. □

Теорема 2.2. *Собственные значения* λ_1, $\lambda_2, ...$ *задачи (2.1) – (2.4) оператора*

$$A = (\frac{\partial}{\partial x}\left(-c_1(x)\frac{\partial}{\partial x}\right) + a_1(x), \frac{\partial}{\partial x}\left(-c_2(x)\frac{\partial}{\partial x}\right) + a_2(x), \\ ..., \frac{\partial}{\partial x}\left(-c_j(x)\frac{\partial}{\partial x}\right) + a_j(x), ...)$$

вещественны и $\lambda_s \to +\infty$ *при* $s \to \infty$, *причем они удовлетворяют неравенству* $\lambda_s > m = \min\limits_j \left(\min\limits_{x\in(0,l_j)} a_j(x)\right)$ *во всех случаях, кроме случая, когда граф* $\mathbf{G}$ *состоит только из "подвижных" вершин и* $a_j(x) = a_i(x) = const$ *для всех* i, j.

Если же граф $\mathbf{G}$ *состоит только из "подвижных" вершин и выполнено условие* $a_j(x) = a_i(x) = const$ *для всех* i, j, *то собственные значения удовлетворяют неравенству* $\lambda_s \geq m$, $s = 1, 2, ...$, *причем существует однократное собственное значение, равное* m, *с собственной функцией* $\left(\sum\limits_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} c_j(x)dx\right)^{-1} \quad (1, 1, ..., 1, ...)$.

Доказательство. В силу леммы 2.2 и тождествам (2.15), (2.16) запишем в виде операторного уравнения в пространстве $\mathfrak{U}$:

$$(\lambda - m + 1)Bu = u, \quad u \in \mathfrak{U}. \tag{2.17}$$

Отсюда следует, что число λ является собственным значением задачи (2.1) – (2.4) для оператора A, а u – соответствующей ему обобщенной собственной функцией если и только если число $(\lambda - m + 1)$ есть характеристическое число самосопряженного вполне непрерывного оператора B из пространства $\mathfrak{U}$ в пространство $\mathfrak{U}$, а u является соответствующим ему собственным элементом. Откуда следует существование не более чем счетного множества собственных значений задачи (2.1) – (2.4); при этом у множества нет конечных предельных точек. Все собственные значения вещественны и каждому собственному значению отвечает конечное число (кратность собственного значения) взаимно ортогональных в $\mathfrak{U}$ собственных функций; собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны в $\mathfrak{U}$. Следует отметить, что для каждого собственного значения λ можно выбрать ровно k, где k есть кратность λ, действительных попарно ортогональных в $\mathfrak{U}$ собственных функций.

Обозначим через

$$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s, ... \tag{2.18}$$

последовательность всех собственных значений задачи (2.1) – (2.4) для оператора A, причем каждое собственное значение повторяется согласно его кратности. Через

$$u_1, u_2, ..., u_s, ... \tag{2.19}$$

обозначим систему взаимно ортогональных в $\mathfrak{U}$ обобщенных собственных функций ($||u_s||_{L_2(\mathbf{G})} = 1$); каждая функция u_s соответствует собственному значению λ_s:

$$(\lambda_s - m + 1)Bu_s = u_s, \quad s = 1, 2, ... \, . \tag{2.20}$$

Умножим (2.20) скалярно в пространстве $\mathfrak{U}$ на u_s и получим в силу (2.16) равенства

$$||u||^2_{\mathfrak{U}} = (\lambda_s - m + 1)||u||_{L_2(\mathbf{G})} = (\lambda_s - m + 1), \tag{2.21}$$

которые (скалярное произведение в $\mathfrak{U}$ определено формулой (2.14)) можно представить как

$$\sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (c_j(x) u_{s}{}^2_{jx} + (a_j(x) - \lambda_s) u_{s}{}^2_{j}) dx = 0. \tag{2.22}$$

Из равенства (2.22) вытекает, что для всех значений $s = 1, 2, ...$ выполняется

$$\lambda_s \geq m = \min_{x \in (0, l_j)} a_j(x), \tag{2.23}$$

причем для всех $s = 1, ...$ имеет место строгое неравенство кроме случая, когда граф $\mathbf{G}$ состоит только из "подвижных" вершин и значения $a_j(x) = a_i(x) = const$ для всех i, j. Если же граф $\mathbf{G}$ состоит только из "подвижных" вершин и $a_j(x) = a_i(x) = m$ для всех i, j, то среди собственных значений задачи (2.1) – (2.4) есть значение, равное $-m$, с собственной функцией, равной

$$\left(\sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} c_j(x) dx \right)^{-1} (1, 1, ..., 1, ...).$$

Это собственное значение имеет кратность 1, так как в силу (2.22) все собственные функции, ему отвечающие, удовлетворяют равенству

$$\sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} c_j(x) u^2_{s_{jx}} dx = 0,$$

т.е. являются постоянными.

Из (2.21) вытекает, что система

$$\frac{u_1}{\sqrt{\lambda_s - m + 1}},\ \frac{u_2}{\sqrt{\lambda_s - m + 1}},\ \ldots,\ \frac{u_s}{\sqrt{\lambda_s - m + 1}},\ \ldots \tag{2.24}$$

ортонормирована в $\mathfrak{U}$. В силу теоремы Гильберта – Шмидта она является ортонормированным базисом в $\mathfrak{U}$. Так как пространство $\mathfrak{U}$ бесконечномерно, то множество (2.24), а значит, и (2.18) бесконечно. Поэтому $\lambda_s \to +\infty$ при $s \to \infty$. □

Теорема 2.3. *Обобщенные собственные функции* $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... *задачи (2.1) – (2.4) образуют ортонормированный базис в* $L_2(\mathbf{G})$, *т.е. любая функция* $f \in L_2(\mathbf{G})$ *разлагается в сходящийся в* $L_2(\mathbf{G})$ *ряд Фурье*

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} f_s u_s, \quad f_s = \langle f, u_s \rangle . \tag{2.25}$$

Ряд (2.25) для функции $f \in \mathfrak{U}$ *по обобщенным собственным функциям задачи (2.1) – (2.4) сходится в пространстве* $\mathfrak{U}$ *и справедливо неравенство*

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\lambda_s||f_s|^2 \leq C||f||^2_{\mathfrak{U}}, \tag{2.26}$$

постоянная величина C *не зависит от функции* f.

Доказательство. Скалярно умножим (2.20) в $\mathfrak{U}$ на u_j, $j \neq s$. Из (2.16) следует равенство

$$(\lambda_s - m + 1)\,\langle u_s,\ u_j \rangle = 0,$$

т.е. система (2.19) ортонормирована в $L_2(\mathbf{G})$. Так как линейное многообразие, натянутое на систему (2.24)(и, тем самым, на систему (2.19)), всюду плотно в пространстве $\mathfrak{U}$, то оно всюду плотно и в пространстве $L_2(\mathbf{G})$. Поэтому система (2.19) является ортонормированным базисом в $L_2(\mathbf{G})$, т.е.

любой элемент $f \in L_2(\mathbf{G})$ можно разложить в сходящийся ряд в $L_2(\mathbf{G})$ ряд Фурье (2.25), и будет справедливо равенство Парсеваля – Стеклова

$$||f||^2_{L_2(\mathbf{G})} = \sum_{s=1}^{\infty} |f_s|^2.$$

Пусть функция $f \in \mathfrak{U}$. Она разлагается в сходящийся в $\mathfrak{U}$ ряд Фурье по ортонормированному базису (2.24)

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} \left[f, \frac{u_s}{\sqrt{1-m+\lambda_s}} \right] \frac{u_s}{\sqrt{1-m+\lambda_s}}, \tag{2.27}$$

при этом имеет место равенство Парсеваля – Стеклова

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left| \left[f, \frac{u_s}{\sqrt{1-m+\lambda_s}} \right] \right|^2 = ||f||^2_{\mathfrak{U}}.$$

Ряд (2.27) сходится к f и в норме $L_2(\mathbf{G})$. Сравнивая его с рядом (2.25), получим

$$f_s = \left[f, \frac{u_s}{\sqrt{1-m+\lambda_s}} \right] \frac{1}{\sqrt{1-m+\lambda_s}}.$$

Поэтому

$$||f||^2_{\mathfrak{U}} = \sum_{s=1}^{\infty} \left| \left[f, \frac{u_s}{\sqrt{1-m+\lambda_s}} \right] \right|^2 = \sum_{s=1}^{\infty} (1-m+\lambda_s)|f_s|^2 =$$

$$= (1-m)||f||^2_{L_2(\mathbf{G})} + \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s |f_s|^2,$$

откуда в силу (2.23)

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\lambda_s||f_s|^2 \leq ||f||^2_{\mathfrak{U}} + (|m-1| + 2|m|)||f||^2_{L_2(\mathbf{G})}.$$

Следовательно, имеет место неравенство (2.26), где λ_s, $s = 1, 2, ...,$ – собственные значения задачи (2.1) – (2.4), а $f \in \mathfrak{U}$. Постоянная C в (2.26) не зависит от f. □

3. УРАВНЕНИЯ БАРЕНБЛАТТА – ЖЕЛТОВА – КОЧИНОЙ

3.1. Постановка задачи

Уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha \Delta u \tag{3.1}$$

моделирует динамику давления жидкости, фильтрующейся в трещинновато-пористой среде; процесс влагопереноса в почве и процесс теплопроводности в среде с "двумя температурами" [1], [27], [25].

На каждом ребре E_j геометрического графа $\mathbf{G}$ зададим линейное уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной

$$\lambda_j u_{jt} - u_{jxxt} = \alpha_j u_{jxx}, \tag{3.2}$$

переменные $x \in (0, l_j)$, $t \in \mathbb{R}$, что соответствует задаче для уравнения (3.1), заданного на области, являющейся объединением конечного множества трубчатых областей с диаметрами d_j. Компоненты неизвестной вектор-функции $u = (u_1, u_2, ..., u_j, ...)$ удовлетворяют уравнениям (3.2), а в вершинах $\mathfrak{V}$ графа $\mathbf{G}$ удовлетворяют условиям

$$u_j(0,t) = u_k(l_k,t), \quad E_j, E_k \in E^{\alpha}(V_i^{'}) \cup E^{\omega}(V_i^{'}), \tag{3.3}$$

$$\sum_{E_j \in E^{\alpha}(V_i^{'})} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^{\omega}(V_i^{'})} d_k u_{kx}(0,t) = 0, \tag{3.4}$$

$$u_j(0,t) = u_k(l_k,t) = 0, \quad E_j, E_k \in E^{\alpha}(V_i^{''}) \cup E^{\omega}(V_i^{''}). \tag{3.5}$$

Решением задачи называется вектор-функция $u = (u_1, u_2, ..., u_j, ...)$, каждая компонента которой $u_j = u_j(x,t)$ является решением уравнения (3.2) на ребре E_j, в вершинах $\mathfrak{V}$ компоненты $u_j = u_j(x,t)$ удовлетворяют условиям (3.3) – (3.5) и начальным условиям Коши

$$u_j(x,0) = u_{j0}(x), \quad x \in (0, l_j). \tag{3.6}$$

3.2. Редукция задачи

Проведем редукцию задачи (3.3) – (3.5), (3.6) для уравнений (3.2) к задаче Коши

$$u(0) = u_0 \tag{3.7}$$

для линейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu. \tag{3.8}$$

Для редукции задачи воспользуемся результатами главы "Дифференциальные уравнения на графах". Введем в рассмотрение пространства $\mathbf{L_2(G)}$, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$. Формулой

$$\langle Au, v\rangle = \sum_{j:E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (u_{jx}v_{xj} + a_j u_j v_j)dx,$$

где $a_j \in \mathbb{R}$, u, $v \in \mathfrak{U}$, зададим оператор, определенный на пространстве $\mathfrak{U}$. Тогда операторы $L, M : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ задаются следующим образом

$$\langle Lu, v\rangle = \sum_j d_j(\lambda_j - a_j)\int_0^{l_j} u_j v_j dx + \langle Au, v\rangle,$$

$$\langle Mu, v\rangle = -\sum_j \alpha_j d_j \int_0^{l_j} u_{jx}v_{jx}dx.$$

Из теоремы 2.2 следует

Теорема 3.1. *Операторы* $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ *(т.е. линейны и непрерывны), причем спектр* $\sigma(L)$ *оператора* L *вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к* $+\infty$.

Из теоремы 3.1 следует, что оператор M компактен, оператор L фредгольмов (т.е. $\operatorname{ind} L = 0$), причем $\ker\ L = \{0\}$, если $0 \notin \sigma(L)$.

Лемма 3.1. *Оператор* M $(L, 0)$*-ограничен, если выполнено одно из двух условий*

(i) $\ker L = \{0\}$*;*

(ii) $\ker L \neq \{0\}$, $\alpha_j \neq 0$ *при любом* j *и все* α_j *имеют одинаковый знак,* $\lambda_j \neq 0$ *при любом* j *и все* λ_j *имеют одинаковый знак.*

Доказательство. Утверждение (i) очевидно, т.к. в этом случае существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.

Пусть $\ker L \neq \{0\}$ и $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$. Возьмем вектор $\psi \in \ker L\backslash\{0\}$ и рассмотрим

$$\langle M\psi,\psi\rangle = -\sum_j \alpha_j d_j \int_0^{l_j} \psi_{jx}^2 dx \le 0,$$

причем $\langle M\psi,\psi\rangle = 0$ только при $\psi_x = (\psi_{1x},\psi_{2x},...,\psi_{jx},...) \equiv 0$, тогда

$$\langle L\psi,\psi\rangle = \sum_j d_j \int_0^{l_j} (\lambda_j\psi_j^2 + \psi_{jx}^2)dx = \sum_j d_j \int_0^{l_j} \lambda_j\psi_j^2 dx \ne 0$$

при $\lambda_j \ne 0$ при любом j и все λ_j имеют одинаковый знак и $\psi \ne 0$, что противоречит тому, что $\psi \in \ker L\backslash\{0\}$, откуда следует $\langle M\psi,\psi\rangle < 0$ при $\psi \in \ker L\backslash\{0\}$ и $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$.

Таким образом, $M\psi \ne \text{im L}$ при любом векторе $\psi \in \ker L\backslash\{0\}$. Это в свою очередь означает, что ни один вектор $\psi \in \ker L\backslash\{0\}$ не имеет M-присоединенных векторов, что завершает доказательство леммы в случае $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$. Если $\alpha_j \in \mathbb{R}_-$, доказательство аналогично. □

Редукция завершена.

3.3. Решение задачи

Занумеруем собственные значения $\{\chi_k\}$ оператора L с учетом кратности по неубыванию. Обозначим через $\{X_k\}$ ортонормированные, в смысле $L_2(\mathbf{G})$, собственные функции. Построим проекторы

$$P = \begin{cases} \mathbb{I}, 0 \notin \sigma(L); \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{\chi_k=0} \langle\cdot, X_k\rangle X_k, 0 \in \sigma(L) \end{cases}$$

$$Q = \begin{cases} \mathbb{I}, 0 \notin \sigma(L); \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{\chi_k=0} \langle\cdot, X_k\rangle X_k, 0 \in \sigma(L) \end{cases}$$

(заметим, что несмотря на "похожесть" проекторы P и Q определены на разных пространствах), разрешающую группу

$$U^t = \sum_{k=1}^{\infty}{}' e^{\mu_k t}\langle\cdot, X_k\rangle X_k,$$

где штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемых с индексами k такими, что $\chi_k = 0$, а $\mu_k \in \sigma^L(M), k \in \mathbb{N}$. Справедлива теорема.

Теорема 3.2. *(i) Пусть* $\ker L = \{0\}$. *Тогда фазовым пространством уравнения (3.2) является все пространство* $\mathfrak{U}$, *т.е. для любого* $u_0 \in \mathfrak{U}$ *существует единственное решение* $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$ *задачи (3.3) – (3.5), (3.2), (3.6), которое к тому же имеет вид* $u(t) = U^t u_0$.

(ii) Пусть ядро оператора L *нетривиально, т.е.* $\ker L \neq \{0\}$, *и все коэффициенты уравнения либо строго положительны, либо строго отрицательны (*$\alpha_j \neq 0$ *при любом* j *и все* α_j *имеют одинаковый знак,* $\lambda_j \neq 0$ *при любом* j *и все* λ_j *имеют одинаковый знак). Тогда фазовым пространством уравнения (3.2) является подпространство*

$$\mathfrak{U}^1 = \{u \in \mathfrak{U} : \langle u, X_k \rangle = 0, \ \chi_k = 0\},$$

т.е. для любого $u_0 \in \mathfrak{U}^1$ *существует единственное решение* $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U}^1)$ *задачи (3.3) – (3.5), (3.2), (3.6), которое к тому же имеет вид* $u(t) = U^t u_0$.

3.4. Пример

Пример 3.1. *Пусть граф состоит из трех вершин* V_1, V_2, V_3 *и двух последовательно соединенных ребер* E_1 *и* E_2 *с длинами* l_1 *и* l_2 *и толщиной* $d_1 = d_2 = 1$. *Найдем решение задачи на графе, если* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ *и* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$.

Пусть χ – собственное значение оператора L, а $X = (X_1; X_2)$ – собственный вектор оператора L, отвечающий собственному значению χ. Получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \lambda X_1 - X_1'' = \chi X_1, \\ \lambda X_2 - X_2'' = \chi X_2, \\ X_1(0) = 0, \\ X_1(l_1) = X_2(0), \\ X_2(l_2) = 0, \\ X_1'(l_1) = X_2'(0). \end{cases}$$

По теореме 2.2 $\chi > \lambda$, поэтому система примет вид

$$\begin{cases} X_1 = Acos(\sqrt{\chi - \lambda}x) + Bsin(\sqrt{\chi - \lambda}x), \\ X_2 = Ccos(\sqrt{\chi - \lambda}x) + Dsin(\sqrt{\chi - \lambda}x), \\ A = 0, \\ Bsin(\sqrt{\chi - \lambda}l_1) = C, \\ Ccos(\sqrt{\chi - \lambda}l_2) + Dsin(\sqrt{\chi - \lambda}l_2) = 0, \\ Bcos(\sqrt{\chi - \lambda}l_1) = D, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} A = 0, \\ Bsin(\sqrt{\chi - \lambda}l_1) = C, \\ Bcos(\sqrt{\chi - \lambda}l_1) = D, \\ Bsin(\sqrt{\chi - \lambda}(l_1 + l_2)) = 0. \end{cases}$$

Получим $\chi_n = \lambda + \left(\frac{\pi n}{l_1+l_2}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}$ – собственные значения оператора L, а $X_n = \left(Bsin\left(\frac{\pi nx}{l_1+l_2}\right); Bsin\left(\frac{\pi n(x+l_1)}{l_1+l_2}\right)\right)$ – собственный вектор оператора L, отвечающий собственному значению χ_n. Из условия нормировки $||X||_{L_2(\mathbf{G})} = 1$ найдем B:

$$\int\limits_0^{l_1} B^2 sin^2 \frac{\pi nx}{l_1 + l_2} dx + \int\limits_0^{l_2} B^2 sin^2 \frac{\pi n(x + l_1)}{l_1 + l_2} dx = 1,$$

откуда $B = \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2}}$.

Если $\chi = 0$ не является собственным значением оператора L, то $\ker\ L = \{0\}$, а значит существует обратный оператор L^{-1}. Если же $\chi = 0$ является собственным значением оператора L, то это значит, что параметр $\lambda = -\left(\frac{\pi n}{l_1+l_2}\right)^2$ при каком-то значении $n \in \mathbb{N}$.

Согласно теореме 3.2 решение задачи с начальным условием $u(x, 0) = (u_{01}(x); u_{02}(x))$ имеет вид $u(t) = (u_1(t); u_2(t)) = U^t u_0$, где

$$U^t = \sum_{n:\lambda \neq -\left(\frac{\pi n}{l_1+l_2}\right)^2} e^{\mu_n t} \langle \cdot, X_n \rangle X_n, \quad \mu_n = \frac{-\alpha\left(\frac{\pi n}{l_1+l_2}\right)^2}{\lambda + \left(\frac{\pi n}{l_1+l_2}\right)^2}.$$

Окончательно получаем

$$u_1(x, t) = \frac{2}{l_1 + l_2} \sum_{n:\lambda \neq -\left(\frac{\pi n}{l_1+l_2}\right)^2} \Big(\int\limits_0^{l_1} u_{01}(x) sin\Big(\frac{\pi nx}{l_1 + l_2}\Big) dx +$$

$$+\int\limits_0^{l_2} u_{02}(x)sin\big(\frac{\pi n(x+l_1)}{l_1+l_2}\big)dx\big)e^{\mu_n t}sin\big(\frac{\pi nx}{l_1+l_2}\big);$$

$$u_2(x,t)=\frac{2}{l_1+l_2}\sum_{n:\lambda\neq-\left(\frac{\pi n}{l_1+l_2}\right)^2}\big(\int\limits_0^{l_1} u_{01}(x)sin\big(\frac{\pi nx}{l_1+l_2}\big)dx+$$

$$+\int\limits_0^{l_2} u_{02}(x)sin\big(\frac{\pi n(x+l_1)}{l_1+l_2}\big)dx\big)e^{\mu_n t}sin\big(\frac{\pi n(x+l_1)}{l_1+l_2}\big).$$

4. УРАВНЕНИЕ ХОФФА

4.1. Постановка задачи

Уравнение Хоффа

$$\lambda u_t + u_{xxt} = \alpha u + \beta u^3$$

моделирует выпучивание двутавровой балки. Уравнение одномерное, но в одномерном уравнении задана трехмерная конструкция. Здесь параметр $\lambda \in R_+$ соответствует нагрузке, а параметры α, $\beta \in R$ характеризуют своства материала балки, причем $\alpha\beta > 0$. Искомая функция $u = u(x,t)$ показывает отклонение балки от вертикали.

Модель уравнения Хоффа, заданная на графе, моделирует нагруженную конструкцию из двутавровых балок, каждое ребро определяет отдельную балку. На графе $\mathbf{G}$ рассмотрим линеаризованные (β_j=0) уравнения

$$\lambda_j u_j t + u_{jxxt} = \alpha_j u_j, \tag{4.1}$$

которые моделируют выпучивание (при нагревании) конструкции из балок, изготовленных из металла. Такие балки применяются в механической инженерии, химической инженерии, ядерных реакторах, авиастроении и космостроении, причем в инженерии допускается непосредственное воздействие таких температур, а в случае авиа и космостроения высокая температура достигается из-за скоростей сверхзвукового полета. Уравнения (4.1) рассматриваются в совокупности с условиями

$$u_j(0,t) = u_k(l_k,t), \quad E_j, E_k \in E^\alpha(V_i^{'}) \cup E^\omega(V_i^{'}), \tag{4.2}$$

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i^{'})} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i^{'})} d_k u_{kx}(0,t) = 0, \tag{4.3}$$

$$u_j(0,t) = u_k(l_k,t) = 0, \quad E_j, E_k \in E^\alpha(V_i^{''}) \cup E^\omega(V_i^{''}), \tag{4.4}$$

$$u_j(x,0) = u_{j0}(x), \quad x \in (0,l_j). \tag{4.5}$$

4.2. Редукция задачи

Введем в рассмотрение гильбертовы пространства $\mathbf{L_2}(\mathbf{G})$, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ (причем в пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ для нас более важна банахова структура). Формулой

$$\langle Au, v\rangle = \sum_j d_j \int\limits_0^{l_j} (u_{jx}v_{jx} + a_j u_j v_j) dx, \quad u, v \in \mathfrak{U}$$

определим оператор $A : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$, где постоянные $a_j \in \mathbb{R}_+$ можно выбрать произвольными. Для сведения системы дифференциальных уравнений (4.1), связанных краевыми условиями (4.2) – (4.5), к одномерному уравнению соболевского типа на графе зададим операторы $L, M : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ формулами

$$\langle Lu, v\rangle = \sum_j d_j(\lambda_j + a_j) \int_0^{l_j} u_j v_j dx - \langle Au, v\rangle, \tag{4.6}$$

$$\langle Mu, v\rangle = \sum_j \alpha_j d_j \int_0^{l_j} u_j v_j dx. \tag{4.7}$$

По теореме 3.2 Главы 2, сформулированной для более общего случая, следует $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, причем спектр $\sigma(A)$ положителен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$, откуда следует следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (т.е. линейны и непрерывны), причем спектр $\sigma(L)$ оператора L вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $-\infty$.*

Заметим, что оператор L фредгольмов, причем $\ker\ L = \{0\}$, если $0 \notin \sigma(L)$, а оператор M компактен.

Лемма 4.1. *Если все коэффициенты α_j одновременно положительны или отрицательны, то оператор M $(L, 0)$-ограничен.*

Доказательство. Пусть ядро оператора L нетривиально $\ker L \neq \{0\}$ и для определенности все коэффициенты положительны $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$. Формула

$$[h, g] = \sum_j \alpha_j d_j \int_0^{l_j} h_j g_j dx$$

задает в $L_2(\mathbf{G})$ скалярное произведение эквивалентное $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Нетрудно заметить, что ядро $\ker L$ ортогонально $\mathrm{im}\ L$ относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Для произвольного вектора $\psi\in\ker L\backslash\{0\}$ найдем длину цепочки M-присоединенных векторов.

$$\langle M\psi,\psi\rangle=\sum_j\alpha_j d_j\int_0^{l_j}\psi_j^2dx=[\psi,\psi]>0,$$

поэтому $M\psi\neq\mathrm{im}\ L$, то есть собственные векторы оператора L не имеют M-присоединенных векторов. Это и означает $(L,0)$-ограниченность M по теореме 1.3. Для отрицательных каэффициентов $\alpha_j\in\mathbb{R}_-$ доказательство аналогично. $\square$

Редукция задачи (4.1) – (4.5) завершена.

4.3. Решение задачи

Занумеруем собственные значения $\{\chi_k\}$ оператора L с учетом кратности по неубыванию. Обозначим через $\{X_k\}$ ортонормированные, в смысле $L_2(\mathbf{G})$, собственные функции. Построим проекторы

$$P=\begin{cases}\mathbb{I},0\notin\sigma(L),\\ \mathbb{I}-\sum\limits_{\chi_k=0}\langle\cdot,X_k\rangle X_k,0\in\sigma(L)\end{cases};$$

$$Q=\begin{cases}\mathbb{I},0\notin\sigma(L);\\ \mathbb{I}-\sum\limits_{\chi_k=0}\langle\cdot,X_k\rangle X_k,0\in\sigma(L)\end{cases}$$

(заметим, что несмотря на "похожесть" проекторы P и Q определены на разных пространствах), разрешающую группу

$$U^t=\sum_{k=1}^{\infty}{}'e^{\mu_k t}\langle\cdot,X_k\rangle X_k,$$

где штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемых с индексами k такими, что $\chi_k=0$, а $\mu_k\in\sigma^L(M),k\in\mathbb{N}$. Справедлива теорема.

Теорема 4.2. *(i) Пусть* $\ker L = \{0\}$. *Тогда фазовым пространством уравнения (4.1) является все пространство* $\mathfrak{U}$, *т.е. для любого* $u_0 \in \mathfrak{U}$ *существует единственное решение* $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$ *задачи (4.1) – (4.5), которое к тому же имеет вид* $u(t) = U^t u_0$.

(ii) Пусть ядро оператора L *нетривиально, то есть* $\ker L \neq \{0\}$, $\lambda_j \in \mathbb{R}_+$ *и все коэффициенты* $\alpha_j \neq 0$ *при любом* j *и все* α_j *имеют одинаковый знак. Тогда фазовым пространством уравнения (4.1) является подпространство* $\mathfrak{U}^1 = \{u \in \mathfrak{U} : \langle u, X^k \rangle = 0, \chi_k = 0\}$, *то есть для любого* $u_0 \in \mathfrak{U}^1$ *существует единственное решение* $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U}^1)$ *задачи (4.1) – (4.5), которое к тому же имеет вид* $u(t) = U^t u_0$.

4.4. Пример

Пример 4.1. *Пусть граф состоит из трех вершин* V_1, V_2, V_3 *и двух последовательно соединенных ребер* E_1 *с длиной* $l_1 = \pi$ *и толщиной* $d_1 = 7$ *и* E_2 *с длиной* $l_2 = \pi$ *и толщиной* $d_2 = 1$. *Найдем собственные значения и собственные функции оператора* L *на этом графе, если* $\lambda_1 = 1$ *и* $\lambda_2 = 4$.

Пусть χ – собственное значение оператора L, а $X = (X_1; X_2)$ – собственный вектор оператора L, отвечающий собственному значению χ. Получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} X_1 + X_1'' = \chi X_1, \\ 4X_2 + X_2'' = \chi X_2, \\ X_1(0) = 0, \\ X_1(\pi) = X_2(0), \\ X_2(\pi) = 0, \\ 7X_1'(\pi) = X_2'(0). \end{cases}$$

Во-первых, заметим, что $\chi = 0$ является собственным значением оператора L, а значит при данных условиях, ядро оператора L не будет тривиальным.

При $\chi = 0$ система дифференциальных уравнений сводится к виду

$$\begin{cases} X_1 = Acos(x) + Bsin(x), \\ X_2 = Ccos(2x) + Dsin(2x), \\ A = 0, \\ 0 = C, \\ -7B = 2D. \end{cases}$$

Из условия нормировки $||X||_{L_2(\mathbf{G})} = 1$ получаем следующий собственный вектор $X = \left(\sqrt{\frac{8}{77\pi}}sin(x); -\sqrt{\frac{14}{11\pi}}sin(2x)\right)$.

Во-вторых, очевидно, что так как возникают трансцендентные уравнения, невозможно в общем случае найти все собственные решения и собственные векторы, отсюда и выписать явное решение. В данном конкретном примере укажем еще одно собственное решение и соответствующий ему собственный вектор. Пусть $\chi = \frac{15}{16}$, тогда система примет вид

$$\begin{cases} X_1 = Acos\left(\frac{x}{4}\right) + Bsin\left(\frac{x}{4}\right), \\ X_2 = Ccos\left(\frac{7x}{4}\right) + Dsin\left(\frac{7x}{4}\right), \\ A = 0, \\ \frac{B}{\sqrt{2}} = C, \\ C = D, \\ \frac{B}{\sqrt{2}} = D, \end{cases}$$

откуда из условия нормировки $||X||_{L_2(\mathbf{G})} = 1$ получаем следующий собственный вектор $X = \left(\sqrt{\frac{7}{28\pi-50}}sin\left(\frac{x}{4}\right); \sqrt{\frac{7}{56\pi-100}}cos\left(\frac{7x}{4}\right) + \sqrt{\frac{7}{56\pi-100}}sin\left(\frac{7x}{4}\right)\right)$.

Пример 4.2. *Пусть граф состоит из трех вершин V_1, V_2, V_3 и двух последовательно соединенных ребер E_1 и E_2 с длинами l_1 и l_2 и толщиной $d_1 = d_2 = 1$. Найдем решение задачи на графе, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$.*

Пусть χ – собственное значение оператора L, а $X = (X_1; X_2)$ – собственный вектор оператора L, отвечающий собственному значению χ. Получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \lambda X_1 + X_1'' = \chi X_1, \\ \lambda X_2 + X_2'' = \chi X_2, \\ X_1(0) = 0, \\ X_1(l_1) = X_2(0), \\ X_2(l_2) = 0, \\ X_1'(l_1) = X_2'(0). \end{cases}$$

По теореме 2.2 $\chi < \lambda$, поэтому система примет вид

$$\begin{cases} X_1 = Acos(\sqrt{\lambda - \chi}x) + Bsin(\sqrt{\lambda - \chi}x), \\ X_2 = Ccos(\sqrt{\lambda - \chi}x) + Dsin(\sqrt{\lambda - \chi}x), \\ A = 0, \\ Bsin(\sqrt{\lambda - \chi}l_1) = C, \\ Ccos(\sqrt{\lambda - \chi}l_2) + Dsin(\sqrt{\lambda - \chi}l_2) = 0, \\ Bcos(\sqrt{\lambda - \chi}l_1) = D, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} A = 0, \\ Bsin(\sqrt{\lambda - \chi}l_1) = C, \\ Bcos(\sqrt{\lambda - \chi}l_1) = D, \\ Bsin(\sqrt{\lambda - \chi}(l_1 + l_2)) = 0. \end{cases}$$

Получим $\chi_n = \lambda - \left(\frac{\pi n}{l_1+l_2}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}$ – собственные значения оператора L, а $X_n = \left(Bsin\left(\frac{\pi n x}{l_1+l_2}\right); Bsin\left(\frac{\pi n(x+l_1)}{l_1+l_2}\right)\right)$ – собственный вектор оператора L, отвечающий собственному значению χ_n. Из условия нормировки $||X||_{L_2(\mathbf{G})} = 1$ найдем B:

$$\int\limits_0^{l_1} B^2 sin^2 \frac{\pi n x}{l_1 + l_2} dx + \int\limits_0^{l_2} B^2 sin^2 \frac{\pi n(x + l_1)}{l_1 + l_2} dx = 1,$$

откуда $B = \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2}}$.

Если $\chi = 0$ не является собственным значением оператора L, то $\ker\ L = \{0\}$, а значит существует обратный оператор L^{-1}. Если же $\chi = 0$ является собственным значением оператора L, то это значит, что параметр $\lambda = \left(\frac{\pi n}{l_1+l_2}\right)^2$ при каком-то значении $n \in \mathbb{N}$.

Согласно теореме 3.2 решение задачи с начальным условием $u(x,0) = (u_{01}(x); u_{02}(x))$ имеет вид $u(t) = (u_1(t); u_2(t)) = U^t u_0$, где

$$U^t = \sum_{n:\lambda\neq\left(\frac{\pi n}{l_1+l_2}\right)^2} e^{\mu_n t}\langle\cdot, X_n\rangle X_n, \quad \mu_n = \frac{\alpha}{\lambda - \left(\frac{\pi n}{l_1+l_2}\right)^2}.$$

Окончательно получаем

$$u_1(x,t) = \frac{2}{l_1+l_2}\sum_{n:\lambda\neq\left(\frac{\pi n}{l_1+l_2}\right)^2}\Big(\int\limits_0^{l_1} u_{01}(x) sin\Big(\frac{\pi n x}{l_1+l_2}\Big)dx +$$

$$+\int\limits_0^{l_2} u_{02}(x) sin\Big(\frac{\pi n(x+l_1)}{l_1+l_2}\Big)dx\Big)e^{\mu_n t} sin\Big(\frac{\pi n x}{l_1+l_2}\Big);$$

$$u_2(x,t) = \frac{2}{l_1+l_2}\sum_{n:\lambda\neq\left(\frac{\pi n}{l_1+l_2}\right)^2}\Big(\int\limits_0^{l_1} u_{01}(x) sin\Big(\frac{\pi n x}{l_1+l_2}\Big)dx +$$

$$+\int\limits_0^{l_2} u_{02}(x) sin\Big(\frac{\pi n(x+l_1)}{l_1+l_2}\Big)dx\Big)e^{\mu_n t} sin\Big(\frac{\pi n(x+l_1)}{l_1+l_2}\Big).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В магистерской диссертации исследована разрешимость задачи Коши для двух неклассических моделей математической физики: Баренблатта – Желтова – Кочиной и Хоффа, заданных на графе. Разобраны новые случаи, касающиеся постановки задачи на графе: на ребрах графа задаются уравнения с различными коэффициентами, а также сам граф состоит не только из "неподвижных" , но и из "подвижных" вершин. Заметим, что линейные модели Баренблатта – Желтова – Кочиной и Хоффа, относящиеся к классу уравнений соболевского типа, являются лишь простейшей иллюстраций постановки такой задачи на графах, и все проведенные выкладки легко перекладываются на случай полулинейных уравнений, а также исследования разрешимости задачи Коши, задачи Шоуолтера – Сидорова, начально-конечных задач и для других моделей уравнений соболевского типа.