УДК 514.185.2+514.181.24 + 512.7

МНИМЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ

В.А. Короткий

Составлены графические алгоритмы построения кривых второго порядка, заданных смешанным набором действительных и мнимых элементов. Решена задача построения конического сечения, заданного пятью точками, из которых две мнимые. Также решена задача построения кривой второго порядка, заданной точкой и четырьмя мнимыми касательными. Для решения используются геометрически точные графические алгоритмы, исключающие необходимость выполнения каких-либо алгебраических расчетов. Метрика искомой кривой определяется с помощью специализированной компьютерной программы.

Ключевые слова: эллиптическая инволюция, гармоническая гомология, полярное соответствие, автополярный треугольник.

В области комплексных чисел алгебраическое уравнение $F(x)=0$ степени n имеет ровно n корней. Этому уравнению ставится в соответствие алгебраическая кривая $y=F(x)$ порядка n, пересекающаяся с осью x строго в n точках – действительных или мнимых. Очевидно, мнимые точки недоступны при геометрических построениях.

Произвольное коническое сечение r устанавливает на произвольной прямой x инволюцию сопряженных точек. Точки пересечения U, V коники r и прямой x – двойные (самосопряженные) точки этой инволюции. Все конические сечения, проходящие через точки U, V, устанавливают на прямой x одну и ту же инволюцию σ. Справедливо и обратное утверждение: если какое-либо коническое сечение устанавливает на прямой x инволюцию σ, то оно инцидентно точкам U, V.

Пусть требуется построить коническое сечение, проходящее через заданные точки 1, 2, 3 и через мнимые точки U, V пересечения коники r с прямой x (рис. 1а). Коника r устанавливает на x эллиптическую инволюцию σ(A-$A1$,…) с мнимыми двойными точками U, V. Любое коническое сечение, устанавливающее на x инволюцию σ, будет обязательно проходить через мнимые точки U, V.

Поэтому задачу можно сформулировать следующим образом: построить конику, проходящую через точки 1, 2, 3 и устанавливающую на прямой x заданную инволюцию σ. В этой формулировке не только отсутствует упоминание о мнимые элементах, но становится несущественным, о какой инволюции идет речь – гиперболической или эллиптической.

Через пару заданных точек, например, через 1 и 3, проведем прямую и отметим точку T ее пересечения с прямой x (рис. 1б). Найдем точку $T1$, сопряженную с точкой T в инволюции σ. Поляра t точки T проходит через точку $T1$ и через точку G – четвертую гармоническую к точкам 1, 3, T. Полюс T и поляра t – центр и ось гармонической гомологии, преобразующей искомую конику в себя. В этой гомологии находим точку 4, соответственную заданной точке 2.

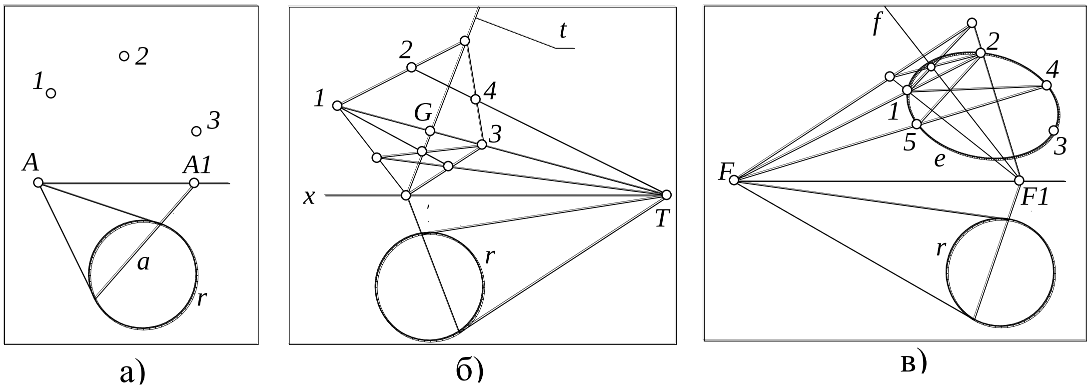


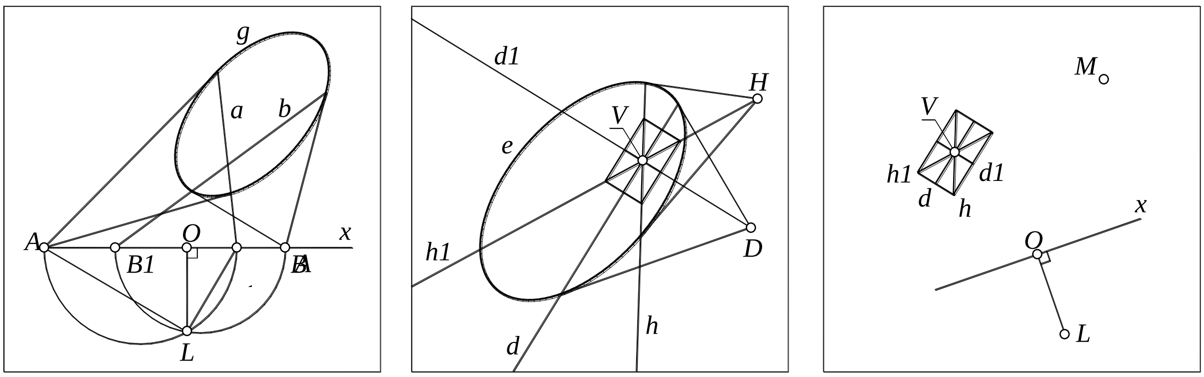
Рис. 1. Построение коники e, проходящей через точки 1, 2, 3
и через мнимые точки пересечения окружности r с прямой x:
а – исходные данные; б, в – построение дополнительных точек 4, 5

Чтобы найти еще одну (пятую) точку искомой коники, отметим точку F пересечения прямой 1-2 с прямой x и найдем точку $F1$, сопряженную с точкой F в инволюции σ (рис. 1в). Поляра fточки F проходит через $F1$ и через точку H – четвертую гармоническую к точкам 1, 2, F. Полюс F и поляра f – центр и ось гармонической гомологии, преобразующей искомую конику в себя. В этой гомологии находим точку 5, соответственную точке 4. Через точки 1, 2, 3, 4, 5 проходит искомое коническое сечение e. Коники r и e устанавливают на x одну и ту же эллиптическую инволюцию σ, в которой произвольной точке B ряда x отвечает точка $B1$ этого ряда. Задача решена. Таким образом, для построения дополнительных точек искомой коники, «компенсирующих» принципиальную недоступность мнимых точек U, V, потребовалось всего лишь провести несколько прямых.

Для окончательного решения задачи используется проективно-синтетический алгоритм и программное средство построения главных осей коники, заданной пятью действительными точками [1, 2]. Существенно, что как в алгоритме, так и в программе нет никаких алгебраических расчетов, а для геометрических построений используются лишь два простейших графических примитива – прямая линия и окружность. Следовательно, построение главных осей коники, инцидентной двум мнимым и трем действительным точкам, выполняется геометрически точно.

Рассмотрим один из способов графического представления мнимых элементов. Инволюция $\sigma(A\text{-}A1,\ B\text{-}B1,\ldots)$ на прямой x может считаться вещественным представителем двойных точек этой инволюции. Две пары соответственных точек инволюции σ полностью заменяют ее двойные точки при выполнении конструктивных построений.

Поэтому для изображения мнимых точек достаточно указать определитель эллиптической инволюции σ. Следуя А.Г. Гиршу [3, 4], определитель инволюции может быть задан «маркером» $x(O,\ L)$, состоящим из прямолинейного ряда x и точки Лагерра L, из которой инволюция σ проецируется на прямую x ортогональным пучком прямых. Основание O перпендикуляра, опущенного из L на x – центр инволюции σ (рис. 2а). Маркер $x(O,\ L)$ считают графическим изображением пары комплексно сопряженных мнимых точек.



а б в

Рис. 2. Изображение мнимых элементов: а – маркер $x(O,L)$,
б – марка $V(h\text{-}h1,\ d\text{-}d1)$, в – коника задана парой мнимых точек $x(O,L)$,
парой мнимых касательных $V(h\text{-}h1,\ d\text{-}d1)$ и точкой M

Согласно принципу двойственности, ряду точек второго порядка двойственно соответствует пучок прямых второго порядка (множество касательных к коническому сечению). Ряд второго порядка содержит как действительные, так и мнимые точки. Пучок прямых второго порядка содержит как действительные, так и мнимые прямые (мнимые касательные к коническому сечению). Интересно отметить, что мнимых точек и мнимых касательных у любой коники на порядок больше, чем действительных точек и касательных.

Произвольная коника e устанавливает на произвольной прямой инволюцию сопряженных точек, а в пучке V – инволюцию сопряженных прямых: произвольной прямой a пучка V соответствует прямая $a1$ этого же пучка, проходящая через полюс A прямой a в поляритете с ядром e.

Если точка V расположена вне коники e, то в пучке V устанавливается гиперболическая инволюция с двумя действительными самосопряженными прямыми u, v (действительными касательными к конике e). Если точка V внутри коники – тогда в пучке V получаем эллиптическую инволюцию ρ с двумя мнимыми самосопряженными прямыми (мнимыми касательными к конике e).

Определитель эллиптической инволюции ρ может считаться графическим изображением ее мнимых самосопряженных прямых. Определитель задают прямоугольной «маркой» $V(h\text{-}h1,\ d\text{-}d1)$, содержащей главные h, $h1$ и ортогональные d, $d1$ взаимно сопряженные направления в пучке V (рис. 2б). Марку $V(h\text{-}h1,\ d\text{-}d1)$ считают графическим изображением пары мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке V.

Все конические сечения, касающиеся прямых u, v, устанавливают в точке V пересечения прямых u, v одну и ту же инволюцию ρ сопряженных прямых с двойными прямыми u, v. Справедливо и обратное утверждение: если какая-либо коника устанавливает в точке V инволюцию ρ, то эта коника обязательно касается двойных прямых u, v инволюции ρ.

Теперь можно сформулировать задачу построения коники, касающейся пары мнимых двойных прямых эллиптической инволюции $V(h\text{-}h1,\ d\text{-}d1)$: искомая коника должна устанавливать в пучке V заданную инволюцию сопряженных прямых. Неопределенное условие соприкосновения с мнимыми прямыми заменено строгой геометрической формулировкой.

В таком виде задача имеет множество ∞^3 («бесконечность в третьей степени») решений, потому что условие соприкосновения с двумя прямыми (действительными или мнимыми – безразлично) оставляет конике три степени свободы.

Чтобы конкретизировать задачу, надо указать пять инциденций. Например, пусть задана марка $V(h\text{-}h1,\ d\text{-}d1)$ (две мнимые прямые), задан маркер $x(O,\ L)$ (две мнимые точки) и дана действительная точка M (рис. 2в). Получено лаконичное графическое изображение, позволяющее конструктивно построить главные оси коники, проходящей через точку M и устанавливающей на прямой x и в точке V заданные эллиптические инволюции. Задача имеет четыре решения.

Перечислим сочетания мнимых и действительных элементов (точек и касательных), определяющих кривую второго порядка. С учетом принципа двойственности, всякое сочетание имеет своего «двойника», поэтому использована нумерация в виде дроби. Например, задачи 1/1 и 1/2 взаимно двойственны.

1/1. Пять точек, две из которых мнимые.

1/2. Пять касательных, две из которых мнимые.

2/1. Пять точек, четыре из которых мнимые.

2/2. Пять касательных, четыре из которых мнимые.

3/1. Три действительные точки, две мнимые касательные.

3/2. Три действительные касательные, две мнимые точки.

4/1. Одна действительная точка, четыре мнимые касательные.

4/2. Одна действительная касательная, четыре мнимые точки.

5/1. Одна действительная точка, две мнимые точки, две мнимые касательные.

5/2. Одна действительная касательная, две мнимые касательные, две мнимые точки.

6/1. Две действительные точки, одна действительная касательная, две мнимые точки.

6/2. Две действительные касательные, одна действительная точка, две мнимые касательные.

7/1. Одна действительная точка, две действительные касательные, две мнимые точки.

7/2. Одна действительная касательная, две действительные точки, две мнимые касательные.

В этот указатель не включены сочетания, когда на мнимой касательной указана мнимая точка прикосновения.

Мнимые (комплексно сопряженные) элементы в алгебре трактуются как корни алгебраических уравнений. В курсе высшей геометрии учение о мнимом распространяется на геометрические образы [5].

Советский математик Овсей Аронович Вольберг в пособии для учителей средней школы [7] рассмотрел решение задач 1, 2 с использованием гармонической (инволюционной) гомологии, преобразующей искомую конику в себя. В этом же пособии предложен проективный алгоритм построения коники, заданной действительной точкой, двумя мнимыми точками на прямой x и полюсом X прямой x относительно искомого конического сечения.

В.А. Пеклич в учебном пособии [8] предложил «начертательно-проективный» вариант построения коники, заданной мнимыми элементами. В построениях используются как проективные инварианты, так и способ выхода в пространство. Такой эклектический подход не является универсальным, но служит хорошим учебным упражнением, как в начертательной, так и в проективной геометрии. Решены задачи 1/1, 2/1, 3/1, 4/2, 6/1 (две последние задачи решены только для частного случая, когда данная касательная – несобственная).

Впервые в России тему мнимого в геометрии начал разрабатывать последователь Н.В. Лобачевского, профессор Казанского университета Федор Матвеевич Суворов (1845–1911). В работе [6], написанной в 1884 году, он систематически изложил конструктивные методы проективной геометрии, позволяющие выполнять построения с участием мнимых точек и мнимых прямых. В этой работе даны примеры построения кривых второго порядка по данным воображаемым (мнимым) точкам и воображаемым (мнимым) касательным. Решены задачи 1/1, 2/1, 3/1 и коррелятивные (двойственные) им задачи 1/2, 2/2, 3/2. Рассмотрена задача 4/1 и двойственная ей задача 4/2, но решение не завершено. Незавершенное решение допущено Ф.М. Суворовым при построении конического сечения, проходящего через действительную точку A и касающегося двух пар мнимых прямых, заданных на чертеже марками *V1* и *V2* (сочетание 4/1, рис. 3а).

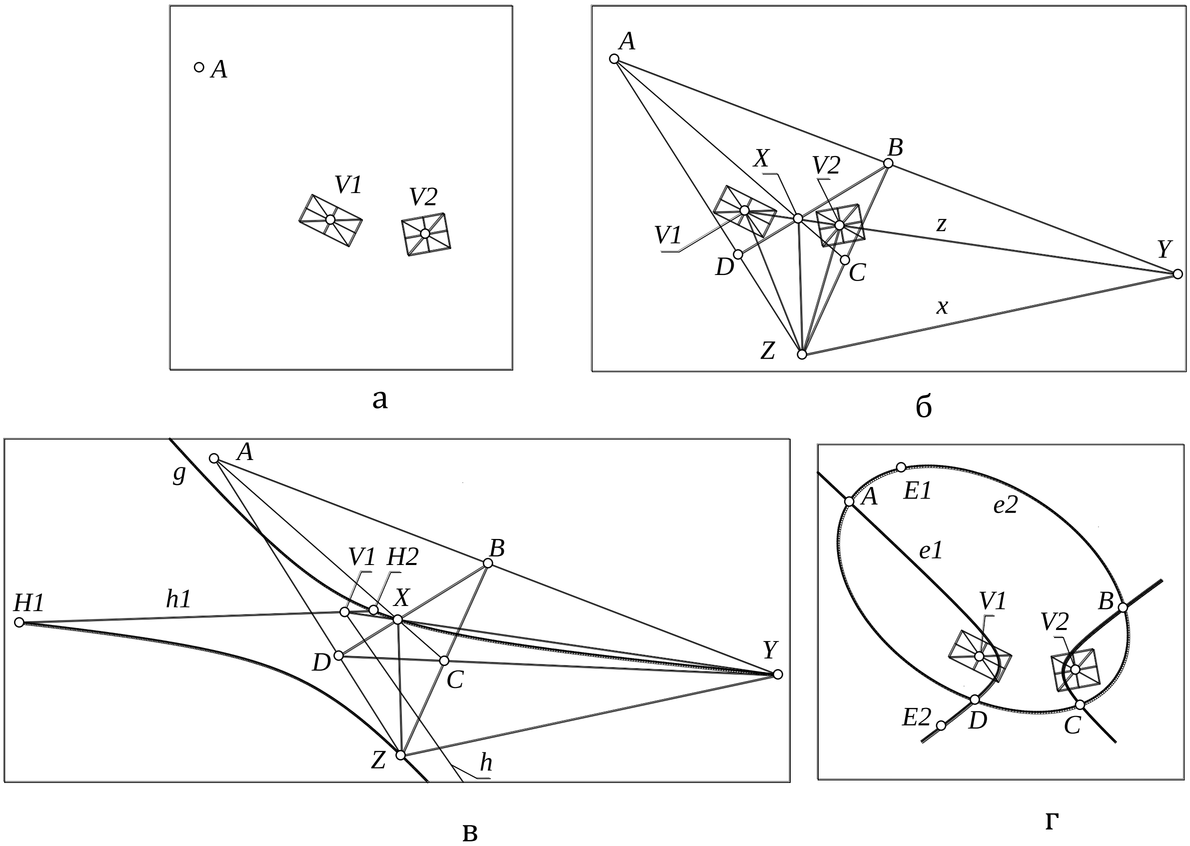


Рис. 3. К задаче 4/1: а – исходные данные
(точка A и две пары мнимых касательных), б – автополярный треугольник,
в – гомалоид прямой *h*, г – два решения

Следуя Ф.М. Суворову, находим мнимые точки пересечения двух пар мнимых касательных. Эти четыре мнимые точки попарно расположены на двух действительных прямых *x*, *y*, пересекающихся в точке *Z*. Пучки *V1*, *V2* устанавливают на прямых *x*, *y* тождественно совпадающие инволюции.

Точка Z определяется на пересечении прямых, которые в пучках $V1$, $V2$ соответствуют прямой $z=V1\text{-}V2$. Несколько сложнее найти прямые x, y. Конструктивное построение прямыхx, y в работе [6] не рассматривается. Такое построение существует (рис. 3б).

Далее в [6] доказывается утверждение, которое в современных терминах формулируется следующим образом. Если в пучках $V1$, $V2$ заданы инволюции ρ1, ρ2, то прямые x, y, на которых данные пучки устанавливают тождественные инволюции, являются сторонами автополярного треугольника, общего для всех коник, касательных к двойным прямым инволюций ρ1, ρ2. Третья сторона автополярного треугольника совпадает с прямойz.

Вершины X, Y, Z и стороны x, y, z найденного автополярного треугольника образуют три гармонические гомологии, в которых данной точке A соответствуют точки B, C, D. Искомое коническое сечение обязательно должно проходить через точки A, B, C, D.

Но коническое сечение определяется пятью точками, а не четырьмя. Как построить недостающую пятую точку искомой коники? Здесь Ф.М. Суворов допустил ошибку. Он предположил, что одна из найденных точек (например, точка B) может, в свою очередь, дать новые дополнительные точки искомой коники. Это неверно, потому что все три гомологии, образованные автополярным треугольником, инволюционны. В этих гомологиях точке B соответствуют точки A, C, D. Новых точек не возникает. Таким образом, рассматриваемая задача в работе [6] до конца не доведена. Сохранилась проблема «пятой точки».

Для поиска пятой точки рассмотрим пучок δ конических сечений, проходящих через точки A, B, C, D, с общим автополярным треугольником XYZ. В пучке δ есть коника e (искомая), касающаяся мнимых двойных прямых инволюций ρ1, ρ2.

Для выделения искомой коники e из пучка δ надо указать какое-нибудь дополнительное условие, которому она должна подчиняться. Например, можно взять пару сопряженных главных направлений $h\text{-}h1$ в пучке $V1$ и вспомнить, что полюс H прямой h относительно искомой коники обязан лежать на $h1$. Начертим гомалоид gпрямой h в квадратичном кремоновом преобразовании, установленном пучком конических сечений δ($ABCD$) [9]. Точки $H1$, $H2$ пересечения гомалоида с прямой $h1$ – два возможных полюса прямой h относительно искомой коники пучка δ (рис. 3в).

Зная, что $H1$ и h – полюс и поляра относительно искомой коники, найдем пятую точку $E1$ и получим коническое сечение $e1$(A, B, C, D, $E1$). Это первое решение задачи. Аналогично, зная, что $H2$ и h – полюс и поляра относительно искомой коники, найдем пятую точку $E2$ и конику $e2$(A, B, C, D, $E2$). Это второе решение. Несложные вспомогательные действия, необходимые для конструктивного построения точек $E1$, $E2$, на рис. 3г условно не показаны.

Кривую второго порядка g называют девятиточечным коническим сечением четырехугольника $ABCD$ относительно прямой h. Оно содержит девять особых точек: вершины X, Y, Z автополярного треугольника, общего для всех коник пучка δ, и еще по одной точке на каждой стороне полного четырехугольника $ABCD$ [10].

Заметим, что для решения задачи нет необходимости вычерчивать непрерывный гомалоид g. Достаточно знать всего пять точек кривой g, чтобы найти (с помощью циркуля и линейки) необходимые нам точки $H1$, $H2$ ее пересечения с прямой h.

Заключение. Предложен способ визуализации мнимых (комплексно сопряженных) точек и прямых, основанный на их представлении в виде мнимых двойных элементов эллиптической инволюции на прямой или в пучке прямых. Предложенный способ позволяет выполнять конструктивные геометрические построения с участием мнимых элементов. Использование мнимых геометрических образов есть геометрический способ решения алгебраических уравнений над полем комплексных чисел.

В заключение следует повторить слова Ф.М. Суворова: «…построение кривых второго порядка, определяемых воображаемыми точками и воображаемыми касательными, …представляет столь же мало затруднений, как и построение по реальным точкам или касательным».

Библиографический список

1. Короткий, В.А. Синтетические алгоритмы построения кривой второго порядка / В.А. Короткий // Вестник компьютерных и информационных технологий. – 2014. – № 11. – С. 20–24.

2. Программа для ЭВМ «Построение кривой второго порядка, проходящей через данные точки и касающейся данных прямых» / В.А. Короткий. – Свидетельство о государственной регистрации № 2011611961 от 04.03.2011 г.

3. Гирш, А.Г. Наглядная мнимая геометрия: монография / А.Г. Гирш. – М.: ООО ИПЦ «Маска», 2008. – 216 с.

4. Гирш, А.Г. Комплексная геометрия – евклидова и псевдоевклидова: монография / А.Г. Гирш. – М.: ООО ИПЦ «Маска», 2013. – 216 с.

5. Клейн, Ф. Высшая геометрия: монография / Ф. Клейн. – М.: УРСС, 2004. – 400 с.

6. Суворов, Ф.М. Об изображении воображаемых точек и воображаемых прямых на плоскости и о построении кривых линий второй степени, определяемых с помощью воображаемых точек и касательных / Ф.М. Суворов. – Казань: Типография императорского Университета, 1884. – 130 с.

7. Вольберг, О.А. Основные идеи проективной геометрии: учебное пособие / О.А. Вольберг. – М.-Л.: Учпедгиз, 1949. – 188 с.

8. Пеклич, В.А. Мнимая начертательная геометрия: учебное пособие / В.А. Пеклич. – М.: Изд-во АСВ, 2007. – 104 с.

9. Короткий, В.А. Квадратичное преобразование плоскости, установленное пучком конических сечений / В.А. Короткий // Омский научный вестник. – 2013. – № 1(117). – С. 9–14.

10. Кокстер, Х.С.М. Действительная проективная плоскость: монография / Х.С.М. Кокстер. – М.: Физматлит, 1959. – 280 с.

К содержанию