УДК 512

РЕШЕНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДАМИ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Т.С. Чернова

В данной статье рассмотрены способы применения линейной алгебры для решения экономических задач.

Ключевые слова: линейная алгебра, экономика, матрицы, системы линейных алгебраических уравнений, метод Гаусса.

Применение элементов линейной алгебры, в частности матричный метод – это один из основных методов решения экономических задач.

Матрица является основным элементом цифровых фотоаппаратов, видео- и фотокамер, встроенных в мобильный телефон. В электронике – набор проводников, в фотографии – это интегральная микросхема (цифроаналоговая или аналоговая), состоящая из светочувствительных элементов, в красильном деле представлена в виде деревянной пластинки с вырезанным на ней рельефом какого-нибудь узора, которая служит для отливки металлических форм.

Пусть дана прямоугольная таблица, состоящая из m n чисел:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение: таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, называется матрицей размера m×n (m на n).

Впервые понятие матрица появилась в древности под названием «волшебный квадрат». Позже стала известна арабским математикам. А в конце XVII века швейцарский ученый Г. Крамер разработал свою теорию. Затем в 1751 году опубликовал метод решения систем линейных уравнений (СЛУ) «правило Крамера». Примерно в это же время появился и «метод Гаусса».

Между тем, матрицы широко применяются не только в математике, но и физике, в биологии, химии, и т.д. С помощью матриц решения систем линейных алгебраических (СЛУ) и дифференциальных уравнений становятся намного проще.

Итак, применим метод линейной алгебры для решения экономических задач.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Дана таблица ресурсов по отраслям экономики:

Таблица 1

Распределение ресурсов по отраслям экономики

Ресурсы	**Отрасли экономики** (усл.ед.)	
	Промышленность	**Сельское хозяйство**
Энергия	5,3	4,0
Ресурсы 1	2,2	2,9
Ресурсы 2	4,1	6,0

Запишем данную таблицу в виде матрицы распределения ресурсов:

$$A = \begin{pmatrix} 5{,}3 & 4{,}0 \\ 2{,}2 & 2{,}9 \\ 4{,}1 & 6{,}0 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Предприятие выпускает продукцию трех видов: B_1, B_2, B_3 и использует сырье двух видов: P_1 и P_2. Тогда нормы расхода сырья представлены матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Элемент матрицы a_{ij} показывает, сколько единиц сырья j-го типа расходуется на производство единицы продукции i-го вида, где i =1, 2, 3; j = 1, 2. План выпуска продукции задан матрицей: C = (100 80 120), стоимость единицы каждого типа сырья (ден. ед.) матрицей: $D = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$.

Решение: Запишем матрицу затрат 1-ого сырья, для этого умножив элементы матрицы A на матрицу C, получим: $P_1 = 1\cdot 100 + 2\cdot 80 + 2\cdot 120 = 500$ ед., аналогично найдем $P_2 = 4\cdot 100 + 3\cdot 80 + 5\cdot 120 = 1240$ ед.

Данную запись представим в матричном виде:

$$P = C\cdot A = \begin{pmatrix} 100 & 80 & 120 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100\cdot 1 + 80\cdot 2 + 120\cdot 2 & 100\cdot 4 + 80\cdot 3 + 120\cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$P = C\cdot A = \begin{pmatrix} 500 & 1240 \end{pmatrix}.$$

Рассчитаем общую стоимость сырья: $Q = P\cdot D = 500\cdot 10 + 1240\cdot 20 = 29800$ денежных единиц.

Запишем стоимость сырья в матричном виде: $Q = P\cdot D = (CA)D$.

Итак, $Q = (100 \quad 80 \quad 120) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = (500 \quad 1240) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = (29800)$.

Можно вычислить и другим способом: вначале вычислим стоимость затрат сырья на единицу продукции:

$$S = A \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 80 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

Вычислим общую стоимость сырья:

$$Q = C \cdot S = (100 \quad 80 \quad 120) \cdot \begin{pmatrix} 90 \\ 80 \\ 120 \end{pmatrix} = (100 \cdot 90 + 80 \cdot 80 + 120 \cdot 120) = 29800 .$$

Пример 3. Предприятие выпускает продукцию трех видов трех видов: босоножки, балетки, и ботильоны, используется сырье P_1 , P_2, P_3 . Нормы расхода на одну пару обуви и объем расхода сырья на 1 день заданы таблицей (табл. 2). Найти ежедневный объем выпуска каждого вида обуви.

Таблица 2

Нормы расхода сырья

Тип сырья	Нормы расхода на одну пару обуви, усл.ед.	Расхода сырья на 1 день усл.ед.		
		Ботильоны	Босоножки	Балетки
P_1	5	3	5	1200
P_2	3	2	3	800
P_3	1	1	2	300

Решение

Пусть предприятие ежедневно выпускает X пар обуви, где x_1 пар ботильонов, x_2 пар босоножек, x_3 пар балеток.

Составим СЛУ в соответствии с данными таблицы:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1200 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 800 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 300 \end{cases}.$$

Применяя элементы линейной алгебры, можно решить указанную выше СЛУ следующими методами: матричным методом, методом Гаусса, методом Крамера.

Рассмотрим лишь два метода решения СЛУ: а) метод Крамера, б) метод Гаусса.

А. Решение СЛУ методом Крамера

$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20+15+9-10-15-18=1$, $\det A \neq 0$, отсюда следует, что существует решение и притом только одно.

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1200 & 3 & 5 \\ 800 & 2 & 3 \\ 300 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4800+4000+2700-3000-3600-4800=100.$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1200 & 5 \\ 3 & 800 & 3 \\ 1 & 300 & 2 \end{vmatrix} = 8000+4500+3600-4500-7200-4000=400.$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1200 \\ 3 & 2 & 800 \\ 1 & 1 & 300 \end{vmatrix} = 3000+3600+2400-2400-4000-2700=-100.$$

Вычислим значение x_1, x_2, x_3:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\det A}, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\det A}.$$

$$x_1 = \frac{100}{1} = 100, \quad x_1 = \frac{400}{1} = 400, \quad x_1 = -\frac{100}{1} = -100.$$

Таким образом, получили ответ, матрица X имеет следующие значения: $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 400 & -100 \end{pmatrix}$.

Б. Решение СЛУ методом Гаусса

Составим из СЛУ расширенную матрицу и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 5 & 1200 \\ 3 & 2 & 3 & 800 \\ 1 & 1 & 2 & 300 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \uparrow (2)+(1) \\ \uparrow (3)+(2) \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -2 & -400 \\ -2 & -1 & -1 & -500 \\ 1 & 1 & 2 & 300 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times(-1) \\ \hookleftarrow \\ \\ \end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -2 & -400 \\ 0 & 0 & 1 & -100 \\ 1 & 1 & 2 & 300 \end{array}\right) \begin{array}{l} \uparrow \\ \\ \times 2+(1) \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & -100 \\ 1 & 1 & 2 & 300 \end{array}\right).$$

Теперь составим СЛУ и вычислим значение X:

$$\begin{cases} 0x_1 + x_2 + 2x_3 = 200 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = -100 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 200 - 2x_3 = 400 \\ x_3 = -100 \\ x_1 = 300 - x_2 - 2x_3 = 100 \end{cases}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 400 & -100 \end{pmatrix}$.

Следует подчеркнуть, что, выбирая тот или иной способ решения, мы видим один и тот же результат.

Итак, отвечая на вопрос, чему равен ежедневный объем выпуска каждого вида обуви, можем сказать, предприятие ежедневно может выпускать определенное количество пар: 100 ботильонов, 400 босоножек и -100 балеток.

Подводя итоги, можно сделать вывод, что знания элементов линейной алгебры и умение решать СЛУ, позволяет достаточно легко и быстро решать задачи по экономике.

Библиографический список

1. Красс, М.С. Математика для экономического бакалавриата. Учеб. для вузов по направлению «Экономика» / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – М.: Дело, 2005. – 574 с.

К содержанию