

ТРИ ПУТИ УЧЁТА ЭНЕРГИИ В МНОГОФАЗНЫХ СИСТЕМАХ И ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

М.И. Грамм

Спектрально-матричный подход наглядно показывает, что в методах, базирующихся на привязке к «основной частоте сети», неизбежно появление дополнительных источников погрешностей. Варианты их учёта в этом случае мотивируют появление «мощностей искажения» и других искусственных категорий, необходимость в которых отпадает при интегрировании мощностей методами Фризе–Бухгольца–Депенброка (FBD) при учёте электроэнергии.

Ключевые слова: электрическая цепь, учёт передаваемой электроэнергии, собственные векторы, собственные числа, спектральное разложение.

Введение. Основу спектрально-матричного подхода составляет введение инварианта в виде неизменной относительно ортогональных преобразований величины квадратичного функционала семейства цепей (мощности цепей). Порождающим для семейства является набор несвязанных цепей, токи \mathbf{I}_0 которого удовлетворяют описанию $\mathbf{Zd} \cdot \mathbf{I}_0 = \mathbf{E}_0$ при диагональной матрице \mathbf{Zd} [1]. Преобразования $\mathbf{T} \cdot \mathbf{Zd} \cdot \mathbf{T}^T = \mathbf{Z}$ матрицы цепи и $\mathbf{T} \cdot \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}$ её источников с помощью произвольной/заданной ортогональной матрицы \mathbf{T} даёт описание связной цепи той же мощности но с недиагональной \mathbf{Z} и новыми источниками \mathbf{E} . Поскольку при этом столбцы \mathbf{T} становятся собственными векторами \mathbf{Z} , то вектор токов $\mathbf{I} = \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{E}$ связной цепи при совпадении \mathbf{E} с одним из собственных векторов определяется простым делением \mathbf{E} на один элемент \mathbf{Zd} . Только в этих состояниях, называемых ба-

зисными, и возможна замена матрицы \mathbf{Z} числом. Использование комплексных сопротивлений для связи между токами и напряжениями в произвольном состоянии цепи и порождает погрешности методов «по Будеану», заставляя вводить «мощности искажения» и прочие искусственные категории. Понимание такой «спектральной механики» заставляет предпочесть иной подход – без привязки отрезка T учёта энергии к периоду «основной частоты» (группа «методов по Фризе»).

Приведённые спектральные рассуждения легко раскрывают конфликт между методами «основной гармоникой» и методами непрерывного учёта. Состоялись три основных пути учёта энергопотоков – учёт по Фризе и два на отнесении показателей к основной частоте сети [2]. К последним относится консервативная теория мощности (СРТ, основанная на расширенном толковании формул комплексного метода) и PQ-теория (основанная на приведении многофазной системы к двухкоординатному описанию применением преобразования Эдит Кларк или Парка–Горева). Подход «по Фризе» усовершенствован Бухгольцем и Депенброком и называется «FBD подходом» [2]. Остановимся сначала на иллюстрировании спектрального подхода.

Дискретная основа формирования энергетических показателей. Современная измерительная информация поставляется в дискретной форме. Это, в частности, позволяет произвольно выбирать интервал учёта $T = N \cdot \Delta t$, где N – число отсчётов при шаге по времени Δt (вне связи с периодом T_0 «основной частоты»). Массивы \mathbf{I} и \mathbf{U} мгновенных значений (ММЗ) тока и напряжения $i(t)$ и $u(t)$ за время T представимы в форме векторов:

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{U}, \quad (1)$$

где \mathbf{Z} – матрица, описывающая свойства цепи относительно связи между $i(t)$ и $u(t)$ на входе и, очевидно, зависящая от избранных $t=0$ и $t=T = N \cdot \Delta t$.

Подходы с «основной частотой» предполагают замену матрицы \mathbf{Z} множителем, объясняемым как «комплексное сопротивление». Кроме простоты и наглядности для инженера слабая математическая мотивировка такого множителя на месте \mathbf{Z} в действительности обусловлена тем, что \mathbf{Z} в (1) можно заменить числом лишь в случае, когда вектор \mathbf{I} тока является собственным для \mathbf{Z} . Уточним свойства \mathbf{Z} на примере процесса в LR цепи:

$$L \cdot \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) = u(t). \quad (2)$$

Заменим (2) конечно-разностной аппроксимацией простейшего вида:

$$L \cdot \left(\frac{i^{(k+1)} - i^{(k-1)}}{2 \cdot \Delta t} \right) + R \cdot i^{(k)} = u(k \cdot \Delta t), \quad (3)$$

где $k=0, 1, 2, \dots, N$ – номера отсчётов ММЗ, $\Delta t \ll \tau = L/R$ – шаг отсчётов.

Используем условие периодичности $i^{(0)} = i^{(N)}$, естественное для учёта при больших N , введём обозначение $b = L/2 \cdot \Delta t$. Получим матричную форму (3):

$$\begin{bmatrix} R & b & 0 & \dots & -b \\ -b & R & b & \dots & 0 \\ 0 & -b & R & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & 0 & 0 & -b & R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i^{(1)} \\ i^{(2)} \\ i^{(3)} \\ i^{(k)} \\ i^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(\Delta t) \\ u(2 \cdot \Delta t) \\ u(3 \cdot \Delta t) \\ u(k \cdot \Delta t) \\ u(N \cdot \Delta t) \end{bmatrix}, \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{U}. \quad (4)$$

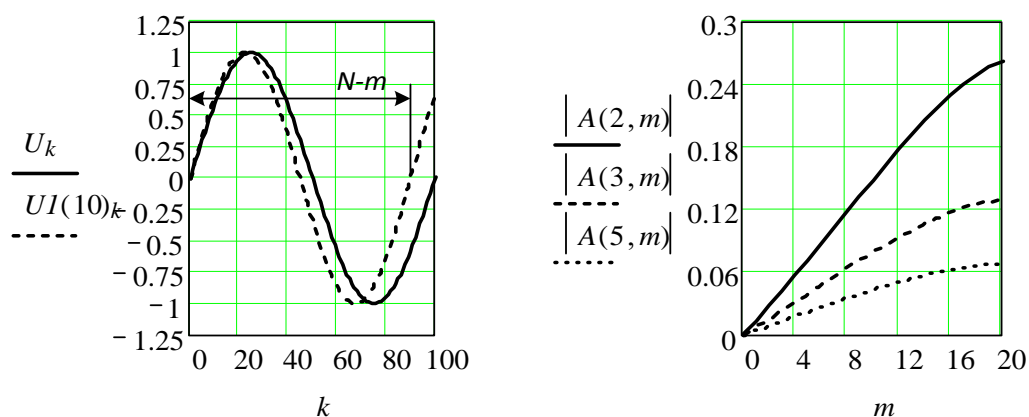
Условие $i^{(0)} = i^{(N)}$ делает матрицу \mathbf{Z} циркулянтном, [3], что доказывается коммутативностью \mathbf{Z} с известной матрицей \mathbf{P} перестановок – коммутатор $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{P} - \mathbf{P} \cdot \mathbf{Z}$ равен нулю. Циркулянтность \mathbf{Z} сохраняется и для более сложных схем. Теория циркулянтных является одним из современных достижений линейной алгебры, упрощая нам оценку методов «основной частоты».

Во-первых, набор собственных векторов циркулянтных типа \mathbf{Z} известен и образован столбцами матрицы \mathbf{F} размером $N \times N$ дискретного преобразования Фурье (ДПФ) с элементами $F_{k,m} = \varepsilon^{(k-1)(m-1)} / \sqrt{N}$, где $k, m = 1, 2, \dots, N$, $\varepsilon = \exp(j \cdot 2 \cdot \pi / N)$. Во-вторых, спектр собственных чисел циркулянтных также известен и равен произведению $\mathbf{F} \cdot \mathbf{a} \cdot \sqrt{N}$, где \mathbf{a} – первый столбец циркулянта \mathbf{Z} . Выполнение этой операции даст собственные числа матрицы \mathbf{Z} для LR -цепи:

$$\lambda_k = R - j \cdot \frac{L}{\Delta t} \cdot \sin\left[\frac{2 \cdot \pi}{N} \cdot (k-1)\right]. \quad (5)$$

Введя $K = k-1$, можем для $K \geq 1$ говорить об аналоге $\Omega_K = \sin(2 \cdot \pi \cdot K / N) / \Delta t$ круговой частоты $\omega_K = 2 \cdot \pi \cdot K / N \cdot \Delta t$ плавной синусоиды с периодом $N \cdot \Delta t / K$. Очевидно, $k=1$ соответствует вещественному числу $\lambda_1 = R$ и постоянному току. Остальные числа комплексные и повторяют определение $Z^{(K)} = R + j \omega_K L$. Их множество состоит из сопряжённых пар $\lambda_{K+1} = \bar{\lambda}_{N-(K-1)}$. Таким образом, известными «комплексными сопротивлениями цепи» являются собственные числа матрицы связи между током и напряжением. Вещественная функция синусоиды напряжения $u(t)$ с периодом T/K на двухполюснике образована двумя собственными векторами \mathbf{Z} с сопряжёнными компонентами. В стандартной теории цепей принято в случае индуктивности использовать число с положительной мнимой частью. Выделение «основной частоты» и «появление высших гармоник» связано с выбором начала и конца отсчётов.

Действительно, мы можем выделить k -й собственный вектор $\mathbf{U}^{(k)}$ из \mathbf{U} с помощью проектора матрицы \mathbf{Z} : $\mathbf{P}^{(k)} = \bar{\mathbf{F}}^{(k)} \cdot (\mathbf{F}^{(k)})$, где $\mathbf{F}^{(k)}$ – k -й столбец матрицы \mathbf{F} [1]. Быстродействие современной техники позволяет для основной промышленной частоты формировать проекторы $\mathbf{P}^{(k)} = \bar{\mathbf{F}}^{(k)} \cdot (\mathbf{F}^{(k)})$ в реальном времени для мониторинга амплитуд A_{mK} гармоник как в токе, так и в напряжении. Легко получить и текущий угол φ разности фаз между $i(t)$ и $u(t)$, исчислив его, например, в долях от T (или от $T0$).



Амплитуды «псевдогармоник» при отличии T от T_0 на m %

В любом случае при $T \neq T_0$ цифровой алгоритм по (6) обнаружит «высшие гармоники», которых в сети может и не быть. Используя единственное число $Z^{(K)} = R + j\omega_K L$, подход с «основной частотой» [4] не может заменить матрицу \mathbf{Z} , требуя уточнений в виде «хитростей» типа «мощности искажения» и т.п. На рис. показаны зависимости амплитуд фиктивных «гармоник» 2, 3 и 5 при сокращении T относительно T_0 на m процентов.

Подход по Фризе и многофазные системы. В отличие от практического инженерного стандарта исчислений мощностей и энергопотоков на основе привязки к «основной частоте», ведущего, как показано выше, к неизбежным неточностям, погрешности подхода по Фризе не связаны с необходимостью учитывать основной период и могут быть сведены к аппаратному минимуму, не создавая основ для принципиальных ошибок алгоритма.

По С. Фризе [5] цепью эффективно потребляется лишь энергия, пропорциональная коллинеарному вектору \mathbf{U} составляющей \mathbf{I}_r тока \mathbf{I} . Располагая ММЗ длиной k ($k=1, 2, \dots, N$) для \mathbf{U} и \mathbf{I} в любой момент времени $t=k \cdot \Delta t$, применим для определения \mathbf{I}_r формулу проектирования вектора \mathbf{I} на вектор \mathbf{U} :

$$\mathbf{I}_r = \frac{(\mathbf{U}, \mathbf{I})}{(\mathbf{I}, \mathbf{I})} \cdot \mathbf{U} = g(k) \cdot \mathbf{U}, \quad (6)$$

где введена $g(k)$ – текущая скалярная проводимость к моменту $t=k \cdot \Delta t$.

За время $T = N \cdot \Delta t$ энергия, связанная с коллинеарной составляющей, составит величину $Wr = (\mathbf{I}_r, \mathbf{U}) \cdot N \cdot \Delta t$ и даст величину мощности, отождествляемой часто с мощностью потерь – активной:

$$P = (\mathbf{I}_r, \mathbf{U}) / N. \quad (7)$$

Выражение (7) даст традиционные оценки, например, типа величины $P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi)$, лишь в том случае, когда начало и конец отсчётов разделены интервалом, цельнократным периоду T_0 на оси t («базисные состояния»). В общем же случае величина энергии, полученная с помощью составляющей \mathbf{I}_r , для произвольного интервала может оказаться далёкой от величины энергии, рассчитанной известными вариантами расчётов для «основной частоты».

В отношении учёта энергии Wq , отличной от Wr и называемой «неактивной» или «реактивной», основным признано положение о том, что она пропорциональна ортогональной к функции внешнего воздействия составляющей состояния системы. Ортогональная составляющая $\mathbf{I}_x = \mathbf{I} - \mathbf{I}_r$ вектора \mathbf{I} должна удовлетворять условию $(\mathbf{U}, \mathbf{I}_x) = 0$. Например, за отрезок $0 \div N \cdot \Delta t = T_0$ наблюдения величина «неактивной» энергии $Wq(k) = (\mathbf{I}_x, \mathbf{U}) \cdot \Delta t$ даст известные величины реактивных мощности $Q(T) = Wq/N$ и стандартные моногармонические проводимости $b(T)$. Ортогональность векторов \mathbf{I}_x и \mathbf{U} обеспечивает выполнение «правила треугольника» для \mathbf{I}_x , \mathbf{I}_r и \mathbf{I} и, соответственно, для энергий $Wq = (\mathbf{I}_x, \mathbf{U}) \cdot \Delta t$, $Wr = (\mathbf{I}_r, \mathbf{U}) \cdot \Delta t$ и для $|\mathbf{I}| \cdot |\mathbf{U}| \cdot \Delta t$ при любой форме $i(t)$ и $u(t)$ и для любого t . В подходе Фризе, следовательно, нет места «мощностям искажения» и т.п. искусственным составляющим.

В многофазных системах подход Фризе расширен Бухгольцем и Депенброком – «FBD-подход», [2]. Основу расширения составляет использование накопленных ММЗ в виде текущих векторов (\mathbf{U}, \mathbf{I}) из напряжений и токов, заданных на m -полюсах многофазной цепи относительно произвольного единого нуля цепи (помечены звёздочкой *). Из них формируются обобщённые мгновенные значения (u_Σ, i_Σ) :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{a^*} \\ u_{b^*} \\ u_{c^*} \\ \dots \\ u_{m^*} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} i_{a^*} \\ i_{b^*} \\ i_{c^*} \\ \dots \\ i_{m^*} \end{bmatrix}, \quad u_\Sigma = \sqrt{\sum_{\mu=1}^m u_{\mu^*}^2}, \quad i_\Sigma = \sqrt{\sum_{\mu=1}^m i_{\mu^*}^2}. \quad (8)$$

На основе \mathbf{U} и \mathbf{I} вводится обобщённая мгновенная мощность:

$$p_\Sigma = \mathbf{U} \cdot \mathbf{I}^T. \quad (9)$$

При равенстве времени T наблюдения периоду T_0 получим известные:

$$I_\Sigma = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i_\Sigma^2 dt}, \quad U_\Sigma = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u_\Sigma^2 dt}. \quad (10)$$

Главной категорией FBD-подхода теория вводит за время наблюдения T «обобщённую активную мощность» P_Σ :

$$P_\Sigma = \frac{1}{T} \int_0^T p_\Sigma dt. \quad (11)$$

Введение P_Σ по (11) позволяет мгновенный ток разложить на составляющие – активную (пропорциональную u_μ) и ортогональную. Активные токи $i_{\alpha\mu}$ ответственны за энергию, переданную за время T учёта токами i_μ :

$$i_{a\mu} = \frac{P_{\Sigma}}{U_{\Sigma}^2} \cdot u_{\mu}^* = G_a \cdot u_{\mu}^* \quad (12)$$

Остальные составляющие $i_{n\mu}$ токов, не участвующие в передаче средней величины энергии за время T , считаются неактивными:

$$i_{i\mu} = i_{\mu} - i_{a\mu} \quad (13)$$

Далее FBD-метод вводит составляющие токов, связанные с обобщённой мгновенной мощностью (9). Считается, что за колебания энергии в гармониках и неуровновешенностях системы ответственны «мощностные токи»:

$$i_{p\mu} = \frac{P_{\Sigma}}{u_{\Sigma}^2} \cdot u_{\mu}^* = G_p \cdot u_{\mu}^* \quad (14)$$

Так называемые «безмощностные токи» не связаны с каким-либо запасом энергии в цепи и обусловлены местными искажениями формы:

$$i_{z\mu} = i_{\mu} - i_{p\mu} \quad (15)$$

За колебания мгновенной эквивалентной проводимости G_p около средней G_a , а также за колебания p_{Σ} около P_{Σ} отвечают «вариационные токи»:

$$i_{v\mu} = i_{p\mu} - i_{a\mu} = i_{n\mu} - i_{z\mu} \quad (16)$$

Таким образом, результирующее ортогональное разложение токов, предлагаемое FBD-методом, выглядит так:

$$\|i_{\mu}\|^2 = \|i_{a\mu}\|^2 + \|i_{i\mu}\|^2 = \|i_{\dot{a}\mu}\|^2 + \|i_{v\mu}\|^2 + \|i_{z\mu}\|^2 \quad (17)$$

Основным показателем в этом подходе считается энергия, учтённая как интеграл по времени величины P_z по (11). Алгоритм учёта, как видим, не содержит привязок моментов начала и конца учёта к «основной частоте».

Вывод. Сравнивая предлагаемые FBD-теорией величины с введенными в [1] величинами, а также с алгоритмами их обработки, легко заметим, что, помимо идентичности введённых в [1] проводимости и активной мощности, выявляются и пути цифровой реализации вычислений величин P_{Σ} и G_a в (11) и (12) выше. Таким образом, в целом алгоритмы FBD несложно реализовать в устройствах цифровой обработки информации при учёте энергии, потребляемой многофазной системой, и дискретизации измерительной информации. При этом необходимости во введении искусственных показателей типа «мощностей искажения» не возникает. Следует, однако, заметить, что инженерная практика до сих пор предпочитает опору расчётов на «основную гармонику» – используются консервативная теория мощности (СРТ, основанная на расширенном толковании формул комплексного метода) и RQ-теория. Это связано с временной незаметностью

алгоритмических погрешностей на фоне нынешней конечной точности практических приборов. Очевидно, со временем ситуация изменится и заставит обратить внимание на приведённые выше алгоритмические принципиальные расхождения подходов.

Библиографический список

1. Грамм, М.И. Спектрально-матричные методы расчётов в электротехнике и принцип минимума потерь / М.И. Грамм, Ю.Н. Немов, Ф.Н. Шакирзянов. – М.: Изд. дом МЭИ, 2006.
2. Hirofumi Akagi, Edson Hirokazu Watanabe, Mauricio Aredes. Instantaneous power theory and applications to power conditioning. – N.Y., Tokyo.: John Wiley and Sons, 2007.
3. Воеводин, В.В. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами / В.В. Воеводин, Е.Е. Тыртышников. – М.: Наука, 1987.
4. Budeanu C.I. Puisslanses reactiv'es et fictives. Inst. Romain de l'Energie, Bucharest, Rumania, 1927.
5. Fryze S. Wirk-, Blind- und Scheinleistug in elektrischen Stromkreisen mit nichtsinusformigem Verlauf von Strom und Spannung. – Elektrotechnische Zeitschrift, 1932, Heft 25.

[К содержанию](#)