УДК 517.9

ОБ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ МЕТОДА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Е.В. Табаринцева

Рассматривается граничная обратная задача для нелинейного параболического уравнения. Получена оценка модуля непрерывности нелинейной обратной задачи на одном из стандартных множеств равномерной регуляризации. Для построения устойчивых приближенных решений обратной задачи используется метод квазиобращения. Получена точная по порядку оценка погрешности приближенных решений. Доказана оптимальность по порядку метода квазиобращения на рассмотренном классе равномерной регуляризации.

Ключевые слова: параболическое уравнение, нелинейное уравнение, граничная обратная задача, метод приближенного решения, оценка погрешности

Введение

Рассматривается одномерная постановка обратной граничной задачи теплообмена. Так как обратная граничная задача является неустойчивой в стандартных функциональных пространствах, то основными вопросами при ее исследовании являются вопросы построения устойчивых приближенных решений и оценки точности приближенных решений. Приближенное решение строится методом квазиобращения, который состоит в замене неустойчивой исходной задачи устойчивой задачей для гиперболического уравнения с «малым» параметром. Получена точная по порядку оценка погрешности построенного приближенного решения на одном из классов корректности обратной граничной задачи. Получена оценка модуля непрерывности для нелинейной обратной задачи – основной оценочной функции, позволяющей исследовать методы приближенного решения на оптимальность. Доказана оптимальность по порядку метода квазиобращения с выбором параметра регуляризации по схеме М.М. Лаврентьева на рассмотренном классе корректности.

Вопросы теплообмена имеют особое значение в таких областях техники, как авиационная и ракетно-космическая техника, энергетика, металлургия. Диагностика и идентификация процессов теплообмена могут быть связаны с решением обратных задач различных типов, однако, граничные обратные задачи – это один из наиболее важных и распространенных в тепловом моделировании классов задач. Граничные обратные задачи представляют и методический интерес, т.к. задачи данного типа, по сравнению с коэффициентными и геометрическими задачами, как правило, имеют большую склонность к искажению результатов, связанную с некорректностью постановок, априорная информация о точном решении граничных обратных задач бывает ограниченной.

Рассмотренная в данной работе одномерная постановка обратной граничной задачи является основной расчетной моделью, для которой должны быть построены эффективные методы обработки экспериментальных данных.

Постановка задачи

Рассматривается задача восстановления функции $v(t)=u(1,t)$, $v(t)\in L_2[0,\infty)$ (граничного условия), где функция $u(x,t)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-a(x)u+f(u) \quad (0<x<1;\ t>0)\\ u(x,0)=0;\ u(0,t)=0\end{gathered} \tag{1}$$

и дополнительному условию:

$$u_x(0,t)=q(t),\ t>0. \tag{2}$$

Здесь $q(t)\in L_2[0;\infty)$ – заданная функция, $a(x)\in C^2[0,1],\ a(x)\geq 0$, $u(\bullet,t)\in C^2(0,1)\bigcap C([0,1]);\ u(x,\bullet)\in W_2^1(0,\infty)$; $f(\cdot)$ – непрерывная функция, такая, что $f:L_2[0,\infty)\to L_2[0,\infty)$ – отображение, удовлетворяющее условию Липшица:

$$\|f(u)-f(v)\|\leq L\|u-v\|.$$

Будем предполагать, что для заданной функции $q(t) \in L_2[0;\infty)$ поставленная обратная задача имеет решение $v(t)$, принадлежащее множеству:

$$M = \{v \in L_2[0;\infty);\ \ v' \in L_2[0;\infty)\ \ \|v\|^2_{L_2[0;\infty)} + \|v'\|^2_{L_2[0;\infty)} \le r^2\},$$

но точные значения функции $q(t)$ не известны. Известны уровень погрешности $\delta > 0$ и функция $q_\delta(t)$ такая, что $\|q - q_\delta\| \le \delta$**.** Требуется построить приближенное решение исходной обратной задачи и оценить его уклонение от точного решения.

Оценка условной устойчивости нелинейной обратной задачи

Рассмотрим следующие линейные нормированные пространства: $X = L_2(0,\infty)$ – пространство функций, суммируемых с квадратом, определенных при $t \in [0,\infty)$ (принимающих действительные значения), Φ – пространство комплекснозначных функций, определенных при $t \in [0,\infty)$, допускающих аналитическое продолжение в полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$ и таких, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(s+i\sigma)|^2\, ds < C$ при всех $\sigma < 0$.

Рассмотрим линейный оператор $F_0 : L_2[0,1] \to \Phi$, действующий по правилу $F(\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-i\lambda t} f(t)dt$ (преобразование Фурье функций, заданных на полупрямой). Оператор $F : L_2[0,1] \to \Phi$ является изометрией.

Применяя к исходной обратной задаче преобразование Фурье, имеем следующую задачу для нелинейного обыкновенного уравнения второго порядка: требуется определить функцию $V(\lambda) = U(1;\lambda) \in \Phi$, где $U(x;\lambda)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &U_{xx}(x,\lambda) = i\lambda U(x,\lambda) + a(x)U(x,\lambda) + g(U); \\ &U(0,\lambda) = 0;\ U_x(0,\lambda) = Q(\lambda) \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $U(x,\lambda) = Fu = \int\limits_0^\infty e^{-i\lambda t} u(x,t)dt$ – образ Фурье функции $u(x,t)$; отображение $g : \Phi \to \Phi$ действует по правилу:

$$g(U) = F(f(F^{-1}U)).$$

Заметим, что отображение $g : \Phi \to \Phi$ удовлетворяет условию Липшица.

Задача (4) равносильна интегральному уравнению:

$$U(x,\lambda) = \frac{sh\mu_0\sqrt{\lambda}x}{\mu_0\sqrt{\lambda}} Q(\lambda) + \int\limits_0^x \frac{sh\mu_0\sqrt{\lambda}(x-\xi)}{\mu_0\sqrt{\lambda}} \left[g(U(\xi,\lambda)) + a(\xi)U(\xi,\lambda)\right] d\xi, \tag{5}$$

где $\mu_0 = \frac{1}{2}(1+i)$.

Рассмотрим величину:

$\omega(M,\delta)=\sup\left\{\left\|v_1(t)-v_2(t)\right\|: v_1,v_2\in M,\ \left\|q_1(t)-q_2(t)\right\|\le\delta\right\}$ – модуль непрерывности для нелинейной обратной задачи: на множестве M. Выполняется следующая теорема.

Теорема 1. Существуют постоянные $C>0$: $\delta_0>0$, такие, что для всех $\delta<\delta_0$ выполняется неравенство:

$$\omega(M,\delta)\le\frac{C}{\ln^2\delta}.$$

Метод приближенного решения

Метод квазиобращения для решения линейных неустойчивых задач был предложен в [3]. Далее рассматривается модификация метода квазиобращения для решения нелинейной некорректно поставленной задачи.

Вместо некорректно поставленной исходной задачи рассмотрим вспомогательную задачу для гиперболического уравнения с малым параметром $\varepsilon>0$: требуется определить функцию $v_\delta(t)=u_\delta^\varepsilon(1,t)\in L_2(0;\infty)$, где $u_\delta^\varepsilon(x,t)$ удовлетворяет условиям:

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u_\delta^\varepsilon}{\partial t^2}+\frac{\partial u_\delta^\varepsilon}{\partial t}=\frac{\partial^2 u_\delta^\varepsilon}{\partial x^2}-a(x)u_\delta^\varepsilon+f(u_\delta^\varepsilon),\ (0<x<1;\ t>0)$$
$$u_\delta^\varepsilon(x,0)=\frac{\partial u_\delta^\varepsilon}{\partial t}(x,0)=0;\ u_\delta^\varepsilon(0,t)=0;\ \frac{\partial u_\delta^\varepsilon}{\partial x}(0,t)=q_\delta(t) \tag{6}$$

Таким образом, функцию:

$$v_\delta^{\varepsilon(\delta)}(t)=u_\delta^{\varepsilon(\delta)}(1,t), \tag{7}$$

при подходящем выборе зависимости $\varepsilon=\varepsilon(\delta)$ будем рассматривать в качестве приближенного решения исходной задачи.

Применяя к (6) преобразование Фурье, получим следующую задачу для нелиейного уравнения второго порядка: требуется определить функцию $V_\delta^\varepsilon(\lambda)=U_\delta^\varepsilon(1,\lambda)\in\Phi$, где $U_\delta^\varepsilon(x,\lambda)$ удовлетворяет условиям:

$$(U_\delta^\varepsilon)_{xx}(x,\lambda)=(i\lambda-\varepsilon\lambda^2)U_\delta^\varepsilon(x,\lambda)+a(x)U_\delta^\varepsilon(x,\lambda)+f(U_\delta^\varepsilon(x,\lambda));$$
$$U_\delta^\varepsilon(0,\lambda)=0;\ (U_\delta^\varepsilon)_x(0,\lambda)=Q_\delta(\lambda) \tag{8}$$

Задача (8) равносильна интегральному уравнению:

$$U_\delta^\varepsilon(x,\lambda)=s_\varepsilon(\lambda,x)Q_\delta(\lambda)+\int_0^x s_\varepsilon(\lambda,x-\xi)\left[g(U_\delta^\varepsilon(\xi,\lambda))+a(\xi)U_\delta^\varepsilon(\xi,\lambda)\right]d\xi \tag{9}$$

где $s_\varepsilon(x,\xi)=\dfrac{sh\sqrt{i\lambda-\varepsilon\lambda^2}x}{\sqrt{i\lambda-\varepsilon\lambda^2}}$.

Оценка погрешности метода приближенного решения

Рассмотрим приближенное решение v_δ^ε граничной обратной задачи, определенное формулой (7). В качестве характеристики точности приближенного решения рассмотрим величину

$$\Delta(\varepsilon,\delta)=\sup\left\{\left\|v_\delta^\varepsilon-v\right\|: v\in M_r;\ \left\|v-v_\delta\right\|\le\delta\right\}.$$

Воспользуемся очевидной оценкой:

$$\Delta(\varepsilon,\delta)\le\Delta_1(\varepsilon)+\Delta_2(\varepsilon,\delta),$$

где

$$\Delta_1(\varepsilon)=\sup\left\{\left\|v^\varepsilon-v\right\|:\ v\in M_r\right\},$$

$v^\varepsilon(t)=u_\varepsilon(1,t)$, где $u^\varepsilon(x,t)$ – решение задачи (6) с точно заданным начальным условием.

$$\Delta_2(\varepsilon,\delta)=\sup\left\{\left\|v_\delta^\varepsilon-v^\varepsilon\right\|:\left\|q-q_\delta\right\|\le\delta\right\}.$$

Оценим величины $\Delta_1(\varepsilon)$, $\Delta_2(\varepsilon,\delta)$.

Для величины $\Delta_2(\varepsilon,\delta)$ имеем оценку:

$$\Delta_2(\varepsilon,\delta)\le\delta\sup_{\lambda\ge0}\left|s_\varepsilon(1,\lambda)\right|\le\delta e^{1/2\sqrt{\varepsilon}}.$$

Далее,

$$\Delta_1(\varepsilon)\le r\sup_{\lambda\ge0}\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\left|s_\varepsilon(1,\lambda)\frac{\mu_0\sqrt{\lambda}}{sh\mu_0\sqrt{\lambda}}-1\right|. \qquad (10)$$

Имеем следующее неравенство:

$$\sup_{\lambda\ge0}\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\left|s_\varepsilon(1,\lambda)\frac{\mu_0\sqrt{\lambda}}{sh\mu_0\sqrt{\lambda}}-1\right|\le C\varepsilon.$$

Следовательно, $\Delta_1(\varepsilon)\le Cr\varepsilon.$

Выберем зависимость $\varepsilon=\varepsilon_0(\delta)$ из условия:

$$\delta e^{1/2\sqrt{\varepsilon}}=Cr\varepsilon\,.$$

Выполняется следующая теорема

Теорема 2. Существуют постоянные $\delta_0;C$ такие, что для любого $\delta\in(0,\delta_0)$ справедлива оценка погрешности метода квазиобращения на множестве M :

$$\Delta(\varepsilon_0(\delta),\delta)\le\frac{C}{\ln^2\delta}.$$

Из теоремы 2 с **учетом** теоремы 1 получаем очевидное.

Следствие. Метод **квазиобращения** оптимален по порядку на множестве M .

Библиографический список

1. Лаврентьев, М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М.М.Лаврентьев. – Новосибирск: Наука, 1962.

2. Танана, В.П. Об оптимальном по порядку методе решения одной обратной задачи для параболического уравнения / В.П. Танана // Докл. РАН. – 2006. – Т. 407. – №3. – С. 316–318.

3. Латес, Р. Метод квазиобращения и его приложения / Р. Латес, Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1970.

4. Иванов, В.К. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи / В.К. Иванов, И.В. Мельникова, А.И. Филинков. – М.: Наука, 1995.