Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет
(Национальный исследовательский университет) »

Институт естественных и точных наук
Факультет математики, механики и компьютерных технологий
Кафедра математического анализа и МПМ

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Рецензент
к.ф.-м.н., доцент
___________/Е.Г. Белов/
“_____” _________ 2020 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой,
д.ф.-м.н.,зав.каф.
___________/В.Л. Дильман/
“_____” _________ 2020 г.

ЭВРИСТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ В БИМАТРИЧНЫХ ИГРАХ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
ЮУрГУ – 01.03.01–2020–306-01-060. ВКР

Руководитель работы
к.ф.-м.н., доцент
___________/ К.Н. Кудрявцев/
“_____” __________2020 г.

Автор
Студент группы ИЕТН-415
_________/А.А. Зайцев/
“_____” _________ 2020 г.

Нормоконтролер
к.ф.-м.н., доцент
___________/М.А. Корытова/
“____” __________ 2020 г.

Челябинск
2020

Аннотация

УДК 519.83

Зайцев А.А.

Эвристический алгоритм поиска равновесия по Нэшу в биматричных играх. / А. А. Зайцев. – Челябинск, 2020. – 21 с.

В работе рассматриваются биматричные игры. На основе свертки Гермейера предлагается новый алгоритм построения равновесия по Нэшу в классе биматричных игр.

Список лит. – 11 назв.,

Оглавление

1. Введение

Построение равновесия по Нэшу в биматричных играх относится к задачам класса неполиномиальной сложности, а точнее, к задачам класса сложности PPAD (В информатике **PPAD** (*«Многочленные Паритетные Аргументы на Направленных графах»*) является классом сложности, введенным Christos Papadimitriou в 1994. PPAD - подкласс TFNP, основанного на функциях, которые, как могут показывать, являются полными паритетным аргументом. Класс привлек значительное внимание в области алгоритмической теории игр, потому что это содержит проблему вычисления Равновесия Нэша, и эта проблема, как показал Чен и Дэн в 2005, была полна для класса [1]), это означает, что с ростом размерности матрицы слишком быстро растет сложность вычислений, поэтому предпринимаются постоянные попытки построить новые алгоритмы, новые приближенные методы поиска равновесия по Нэшу, имеющих более высокую скорость сходимости. В дипломной работе предлагается один из таких алгоритмов.

2. История

Человек на протяжении всей своей жизни вынужден принимать различные решения по вопросам его деятельности, в особенности в финансовой и экономической сферах. Наилучшие результаты будут получены, если человек воспользуется математическими методами. Самые лучшие стратегии в области математического моделирования учёные предлагали ещё в восемнадцатом веке. В девятнадцатом веке Антуан Курно и Жозеф Бертран рассматривали классические примеры теории игр, такие как задачи ценообразования, задачи производства с маленькой конкуренцией. А в начале 20 столетия Эмиль Борель и Эрнст Цермело выдвинули идею математической теории конфликта интересов [2].

Теория игр как наука появилась относительно недавно. Ее придумали математик и экономист, Джон фон Нейман и Оскар Моргенштерн. В 1940х они написали книгу «Теория игр и экономическое поведение».

Отдельно нужно рассказать о Джоне Нэше.

Джон Нэш в 1949 году написал диссертацию на тему теории игр, и потом через 45 лет он получил Нобелевскую премию по экономике. В самых первых концепциях теории игр подвергались анализу игры антагонистического типа, в которых имеются игроки, выигравшие за счёт проигравших. Но Джон Нэш разработал такие аналитические методы, согласно которым все игроки либо проигрывают, либо выигрывают [2].

Разработанные Нэшем ситуации впоследствии назвали «равновесием по Нэшу». Отличаются они тем, что все стороны игры применяют наиболее оптимальные стратегии, благодаря чему и создаётся устойчивое равновесие. Сохранять равновесие очень выгодно для игроков, ведь в противном случае какое-то одно изменение может негативно сказаться на их положении [2].

Благодаря работе Джона Нэша теория игр возымела мощнейший импульс в своём развитии. Кроме того, математические инструменты экономического моделирования были всерьез пересмотрены. Джон Нэш сумел доказать, собственно, что классическая точка зрения на вопрос конкуренции, где каждый играет только за себя, не является оптимальной, и более действенными и самыми эффективными являются стратегии, такие что, в них игроки делают лучше себе, изначально делая лучше другим [2].

Несмотря на то, что изначально в поле зрения теории игр находились и экономические модели, до 50-х годов прошлого века она была лишь формальной теорией, ограниченной рамками математики. Однако со второй половины XX века предпринимаются попытки её использования и в экономике, и в антропологии, и в технике, и в кибернетике, и в биологии. В период Второй мировой войны и по её окончании теорию игр начали рассматривать военные, разглядевшие в ней серьёзный аппарат в деле развития стратегических решений [2].

В период 60-70-х годов интерес к данной теории угас, невзирая даже на то, что она давала хорошие математические результаты. Но с 80-х годов начинается активное применение теории игр на практике, главным образом, в менеджменте и экономике. В течение же нескольких последних десятилетий актуальность её значительно выросла, а некоторые современные экономические направления и вовсе невозможно представить без неё [2].

Не будет лишним сказать также и о том, что существенный вклад в развитие теории игр внёс труд «Стратегия конфликта» 2005 года лауреата Нобелевской премии по экономике Томаса Шеллинга. В своей работе Шеллинг рассмотрел множество стратегий, которыми пользуются участники конфликтного взаимодействия. Данные стратегии совпали с тактиками конфликт-менеджмента и аналитическими принципами, применяющимися в конфликтологии, а также с тактиками, которые используются для управления конфликтами в организациях [2].

В психологической науке и ряде других дисциплин понятие «игра» имеет несколько иной смысл, чем в математике. Культурологическая интерпретация термина «игра» была представлена в книге «Homo Ludens» Йохана Хёйзинга, где автор толкует о применении игр в этике, культуре и правосудии, а также указывает на то, что сама игра существенно превосходит человека по возрасту, ведь и животные тоже склонны играть [2].

Также понятие «игра» можно встретить в концепции Эрика Бёрна, известного по книге «Люди, которые играют в игры». Здесь, правда, идёт речь об исключительно психологических играх, основой которых является трансакционный анализ [2].

3. Основные понятия

Биматричные игры относятся к классу бескоалиционных игр. Бескоалиционность понимается в том смысле, что игроки не образуют никаких коалиций, не ведут переговоров о согласовании своих действий и преследуют только свои собственные интересы. Цель каждого игрока в такой игре - получить как можно больший индивидуальный выигрыш.

Пусть заданы непустые множества X_i, где $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим множество $X = X_1 \times \dots \times X_n$, то есть $X = \{x = (x_1, \dots, x_n) | x_i \in X_i, i = 1, \dots, n\}$. Для каждого $i = 1, \dots,$ определяем функцию $H_i: X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \to R^1$. Процесс бескоалиционной игры кратно можно описать следующим образом. Участники игры независимо друг от друга выбирают стратегии $x_i \in X_i, i = 1, \dots, n$. В результате в игре складывается набор стратегий $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$, называемый ситуацией, и i-й игрок получает выигрыш $H_i(x)$. В качестве исхода игры рассматривается вектор $H(x) = (H_1(x), \dots, H_n(x))$. При этом игрок i предпочитает ситуации x ситуацию x' тогда, когда $H_i(x') > H_i(x)$. Если $H_i(x') = H_i(x)$, то ситуации x и x' для игрока i равноценны [3].

Определение 1 [3]. *Бескоалиционной игрой n лиц в нормальной форме называется упорядоченная тройка*

$$\Gamma = \left(N, \{X_i\}_{i \in N,} \{H_i\}_{i \in N}\right),$$

в которой $N = \{1,\ 2,\ 3, \dots ,\ n\}$ – множество игроков, X_i – множество стратегий игрока i, H_i – функция выигрыша игрока i, определенная на декартовом произведении множеств стратегий игроков $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ (множество ситуаций игры), называется бескоалиционной игрой [2].

Рассмотрим частные случаи бескоалиционной игры.

Определение 2 [3]. Если множества стратегий игроков X_i, где $i \in \{1, \dots, n\}$ конечны, то игра называется конечной бескоалиционной игрой n лиц.

Определение 3 [3]. Бескоалиционная игра Г, в которой принимают участие два игрока, называется игрой двух лиц $\big(\Gamma = (X_1,\ X_2,\ H_1,\ H_2)\big)$.

Определение 4 [3]. Конечная бескоалиционная игра двух лиц называется биматричной.

При этом удобно считать, что $X_1 = \{1, \dots, m\}$, $X_2 = \{1, \dots, n\}$, а функции H_1 и H_2 записываются в виде матриц

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \cdots & \beta_{mn} \end{bmatrix}.$$

Здесь элементы $\alpha_{ij} = H_1(i, j)$ и $\beta_{ij} = H_2(i, j)$ матриц A и B являются соответственно выигрышами игроков 1 и 2 в ситуации (i, j), $i \in X_1, j \in X_2$.

В процессе биматричной игры игрок 1 выбирает номер i-й строки, а игрок 2 (одновременно и независимо) – номер j-го столбца матрицы (A, B). В результате в игре образуется ситуация (i, j), причем игрок 1 получает выигрыш α_{ij}, а игрок 2 – выигрыш β_{ij} [3].

Биматричную игру можно записать в виде

$$(A, B) = \begin{bmatrix} (\alpha_{11}, \beta_{11}) & \cdots & (\alpha_{1n}, \beta_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_{m1}, \beta_{m1}) & \cdots & (\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \end{bmatrix}.$$

Стратегией первого игрока в этой игре является выбор строки, которая выбирается в обеих матрицах одновременно. Стратегия второго игрока – выбор столбца в матрицах. Эти стратегии задаются как номер строки i, для первого игрока и номер столбца j для второго.

В качестве примера бескоалиционной игры давайте рассмотрим такую биматричную игру как «Семейный спор».

Рассмотрим биматричную игру (игра двух лиц) с матрицей

$$(A,B)=\begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} II_1 & II_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (4,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,4) \end{pmatrix} \end{array}$$

Муж (игрок 1) и жена (игрок 2) могут выбрать одно из двух развлечений: Хоккейный матч или поход в кинотеатр. Таким образом множество стратегий игрока 1 имеет вид $X_1=\{I_1,I_2\}$, где I_1 – хоккейный матч, I_2 – кинотеатр, а множество стратегий второго игрока $X_2=\{II_1,II_2\}$, где II_1- хоккейный матч, II_2 – кинотеатр. Муж (первый игрок) предпочитает пойти на хоккей, но жене (второй игрок) лучше всего сходить в кинотеатр и посмотреть романтическую комедию. Поэтому в случае появления ситуации (I_1,II_1) первый игрок выигрывает больше чем второй игрок (вектор выигрышей (4, 1)), а в ситуации (I_2,II_2) второй игрок выиграет больше чем первый (вектор выигрышей (1, 4)). Однако обоим важнее быть вместе на одном мероприятии, чем участвовать в развлечении, хотя и в предпочтительном, одному, так как если они имеют разные желания (ситуации (I_1,II_2) или (I_2,II_1)), то в обоих случаях выигрыши игроков равны нулю.

Как уже отмечалось, решить задачу (игру) означает рекомендовать каждому игроку наилучший в некотором смысле ход или стратегию. Однако в теории бескоалиционных игр нет единого подхода к выборке понятия оптимального хода, так как известно целое множество принципов оптимальности, дающих различные решения игры. При этом выбор определенного принципа оптимальности приводит к различным постановкам задачи, что нужно искать.

Одним из основных принципов оптимальности является равновесие по Нэшу [4]. Равновесие Нэша – это набор стратегий, которые разыгрывают игроки, со свойством, при котором ни один игрок не выигрывает если изменит свою стратегию. Интуитивно это означает, что, если бы игроку сообщили о том какие стратегии выбрали его противники и конкуренты, он все равно решил бы сохранить свою первоначально заданную стратегию. За эту концепцию Джон Нэш получил Нобелевскую премию 1994 года по экономическим наукам за «Анализ равновесия в теории некооперативных игр».

Рассмотрим бескоалиционную игру N лиц в чистых стратегиях (неантагонистическую):

$$\Gamma = \langle N, \{\boldsymbol{X}_i\}_{i\in N}, \{f_i(x)\}_{i\in N}\rangle, \qquad (1)$$

где $N = \{1, \dots, N\}$ множество номеров игроков, при этом каждый игрок не объединяется с другими в коалицию и выбирает чистую стратегию $x_i \in \boldsymbol{X}_i \subset R^{n_i}$, в результате всего образуется такая ситуация

$$x = (x_1, \dots, x_N) \in \boldsymbol{X} = \prod_{i\in N} \boldsymbol{X}_i \subset R^n \quad (n = \sum_{i\in N} n_i);$$

на множестве ситуаций **X** для каждого $i \in N$ определена функция выигрыша $f_i(x)$, значение которой называется выигрышем i-го игрока.

Определение 5 [5]. Ситуация $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ называется ситуацией равновесия по Нэшу в чистых стратегиях, если для всех $x_i \in X_i, i \in N$ справедливо неравенство

$$f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq f_i\big(x_i \ , x_{-i}^*\big).$$

или

$$\max_{x_i\in X_i} f_i(x^*||x_i) = f_i(x^*) \quad (i \in N)$$

для игры (1).

Определение 6 [5]. Совокупность всех равновесных по Нэшу ситуаций игры называется множеством равновесий Нэша.

Определение 7 [6]. Смешанной стратегией игрока I в биматричной игре с матрицами размера mxn будем называть вектор

$x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, где $x_i \geq 0, j = 1, \dots, m \quad и \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$

Аналогично определим смешанную стратегию игрока II как

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, где $y_i \geq 0,\ j = 1, \dots, n \ \ и \ \ \sum_{i=1}^{n} y_j = 1.$

Таким образом, вектора x и y представляют собой распределения вероятностей на множествах чистых стратегий, а их координаты

x_i и y_j соответственно, представляет собой вероятности, с которыми игрок I (II) выбирает чистую стратегию i (j).

Теорема 1 [6]. В биматричной игре всегда существует равновесие в смешанных стратегиях.

4. Свертка Гермейера

Рассмотрим бескоалиционную игру n лиц (1). Следуя [7], введем N скалярных функций

$$\varphi_i(x, z) = f_i(z||x_i) - f_i(z) \quad (i \in N), \qquad (2)$$

где $z = (z_1, \dots, z_N), z_i \in \boldsymbol{X}_i (i \in N),\ z \in \boldsymbol{X},\ x \in \boldsymbol{X}$. Гермейеровская свертка [8, с.43] скалярных функций (2) будет

$$\varphi(x, z) = \max_{j=1,\dots N} \varphi_j(x, z). \qquad (3)$$

Игре (1) поставим в соответствие антагонистическую игру

$$\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X}, \varphi(x,z) \rangle, \qquad (4)$$

в которой игрок под номером 1 выбирает свою стратегию $x \in \boldsymbol{X}$ с целью увеличить, а его противник формирует стратегию $z \in \boldsymbol{X}$, добиваясь возможного уменьшения платежной функции $\varphi(x,z)$ из (2) и (3).

Седловая точка $(x^0, z^*) \in \boldsymbol{X}^2$ игры (4) определяется цепочкой неравенств

$$\varphi(x, z^*) \leq \varphi(x^0, z^*) \leq \varphi(x^0, z) \quad \forall x, z \in \boldsymbol{X}, \quad (5)$$

в этом случае седловую точку образуют минимаксная z^*

$$\left(\min_{z \in X} \max_{x \in \boldsymbol{X}} \varphi(x,z) = \max_{x \in \boldsymbol{X}} \varphi(x, z^*)\right)$$

и максиминная x^0

$$\left(\max_{x \in \boldsymbol{X}} \min_{z \in \boldsymbol{X}} \varphi(x,z) = \min_{z \in \boldsymbol{X}} \varphi(x^0, z)\right)$$

стратегии игры (4).

Достаточному условию существования Парето-равновесной ситуации игры (1) посвящено следующее утверждение.

Теорема 2. Если для антагонистической игры (4) существует седловая точка (x^0, z^*) (выполнено (5)), то минимаксная стратегия z^*является равновесием по Нэшу для игры (1).

Доказательство. В правом неравенстве из (5) положим $z = x^0$, тогда, с учетом (2) и (3) имеем

$$\varphi(x^0, x^0) = \max_{j=1,\dots,N,N+1} \varphi_j(x^0, x^0) = 0.$$

Отсюда, согласно (5) при всех $x \in X$ будет

$$0 \geq \varphi(x, z^*) = \max_{j=1,\dots,N,N+1} \varphi_j(x, z^*).$$

Поэтому справедлива цепочка импликаций: при $\forall x \in X$

$$\left[0 \geq \max_{j=1,\ldots,N} \varphi_j(x, z^*) \geq \varphi_j(x, z^*)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\varphi_j(x, z^*) \leq 0 \ (j = 1, \ldots, N)\right] \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \ [f_i\,(z^*\,||x_i\,) - f_i\,(z^*) \leq 0 \ \ \forall x_i \in X_i \ \ (\mathrm{i} \in \mathrm{N})]$$

$$\Rightarrow \left\{\left[\max_{x_i \in X_i} f_i(z^*||x_i) = f_i(z^*) \ \ (i \in N)\right] \Rightarrow\right.$$

$$\Rightarrow [z^* \in X^e]\,,$$

здесь использовано включение $X^e \subseteq X$.

Замечание 1. Теорема 2 обосновывает следующий способ построения равновесия по Нэшу x^* в игре (1):

Шаг 1. Используя функции выигрыша $f_i(x)(i \in N)$ из (1) и вектора $z = (z_1, \ldots, z_N), z_i \in \boldsymbol{X}_i, x = (x_1, \ldots, x_N), x_i \in \boldsymbol{X_i}(i \in N)$, построить функцию $\varphi(x, z)$ по формулам (2) и (3).

Шаг 2. Найти седловую точку (x^0, z^*) антагонистической игры (6). И тогда z^* будет Парето-равновесным решением игры (1).

5. Метод построения равновесия по Нэшу в биматричной игре с использованием свертки Гермейера

Следуя теореме 2, можно предложить метод построения равновесия по Нэшу в биматричной игре, основанный на использовании свертки гермейера функции выигрыша игроков

Рассмотрим биматричную игру Г, которая определена двумя матрицами A и B размерности n × m.

Смешанные стратегии первого игрока представляют собой вектора-столбцы $x_1 = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(n)})$ и $z_1 = \left(z_1^{(1)}, z_1^{(2)}, \dots, z_1^{(n)}\right)$.

Смешанные стратегии второго игрока представляют собой вектора-столбцы $x_2 = \left(x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_2^{(m)}\right)$ и $z_2 = (z_2^{(1)}, z_2^{(2)}, \dots, z_2^{(m)})$.

После того как игроки выбрали свои стратегии, складываются ситуации $x = (x_1, x_2)$ и $z = (z_1, z_2)$ соответственно.

В ситуации x выигрыш игрока 1 имеет вид

$$f_1(x) = x_1' A x_2 = \left(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(n)}\right) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_2^{m} \end{pmatrix},$$

а выигрыш игрока 2 соответственно будет

$$f_1(x) = x_1' A x_2 = \left(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(n)}\right) \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_2^{(m)} \end{pmatrix}.$$

Определим сверстку Гермейера функции выигрыша игроков следующего вида

$$\varphi(x, z) = \max\{ f_1(x_1, z_2) - f_1(z_1, z_2), f_2(z_1, x_2) - f_2(z_1, z_2) \}$$

и антагонистическую игру

$$\Gamma_\alpha = \langle X, Z, \varphi(x, z) \rangle ,$$

в которой, как стратегии первого игрока $x \in X$, так и стратегии второго игрока $z \in Z$ являются ситуациями игры Г, множества таких стратегий $X = Z$ совпадают между собой, и функция выигрыша первого игрока есть $\varphi(x, z): X \times Z \to R$.

Можно показать (аналогично [7]), что минимаксная стратегия z^0 из седловой точки в антагонистической игре Γ_α является ситуацией равновесия по Нэшу в игре Г, при этом

$$\min_{z \in Z} \max_{x \in X} \varphi(x, z) = 0.$$

Следовательно, поиск равновесия по Нэшу в игре Г можно свести к построению минимаксной стратегии z^0 в игре Γ_α.

Рассмотрим теперь как строится минимакс $\min\limits_{z \in Z} \max\limits_{x \in X} \varphi(x, z)$ и поиск минимаксной стратегии z^0.

Построение минимакса состоит из двух операций, которые выполняются последовательно: из операции *построения внутреннего максимума* и операции *взятия внешнего минимума*.

Операция построения внутреннего максимума

Минимакс $\min\limits_{z \in Z} \max\limits_{x \in X} \varphi(x, z)$ переписывается в виде

$$\min_{z \in Z} \max_{x \in X} \varphi(x, z) =$$

$$= \min_{z \in Z} \max_{x \in X} \max \{ f_1(x_1, z_2) - f_1(z_1, z_2), f_2(z_1, x_2) - f_2(z_1, z_2)\} =$$

$$= \min_{z \in Z} \max_{x \in X} \max\{ x_1' A z_2 - z_1' A z_2, z_1' B x_2 - z_1' B z_2\} =$$

$$= \min_{z \in Z} \max\{ \max_{x \in X}(x_1' A z_2 - z_1' A z_2), \max_{x \in X}(z_1' B x_2 - z_1' B z_2)\} =$$

$$= \min_{z \in Z} \max \left\{ \max_{x_1 \in X_1} (x_1' A z_2) - z_1' A z_2, \max_{x_2 \in X_2} (z_1' B x_2) - z_1' B z_2 \right\}.$$

Исходя из того, что при каждом $z \in Z$ функция $\max\limits_{x_1 \in X_1}(x_1' A z_2)$ равна максимальному элементу вектора $A z_2$, а функция $\max\limits_{x_2 \in X_2}(z_1' B x_2)$ соответственно равна максимальному элементу вектора $z_1' B$, тогда для нахождения внутреннего максимума

$$\max_{x \in X} \varphi(x, z) = \max \left\{ \max_{x_1 \in X_1}(x_1' A z_2) - z_1' A z_2, \max_{x_2 \in X_2}(z_1' B x_2) - z_1' B z_2 \right\}$$

при любой фиксированной стратегии $z = (z_1, z_2)$ надо выполнить такую последовательность действий:

$\mathbf{1}^0$. Вычислить $\max\limits_{x_1 \in X_1}(x_1' A z_2)$, которое будет равно максимальному элементу вектора Az_2;

$\mathbf{2}^0$. Вычислить $\max\limits_{x_2 \in X_2}(z_1' B x_2)$, а это будет равно максимальному элементу вектора $z_1' B$;

$\mathbf{3}^0$. Потом найти максимальное из двух чисел $\max\limits_{x_1 \in X_1}(x_1' A z_2) - z_1' A z_2$ И $\max\limits_{x_2 \in X_2}(z_1' B x_2) - z_1' B z_2$.

Число которое в результате мы найдем и будет $\max\limits_{x \in X} \varphi(x, z)$.

Операция построения внешнего минимума

Главная идея построения внешнего минимума следующая: *находясь в некоторой точке* $z = (z_1, z_2)$ *нужно двигаться в направлении убывания функции* $\max\limits_{x \in X} \varphi(x, z)$.

С учетом такого, функция $\max\limits_{x \in X} \varphi(x, z)$ недифференцируема, и для вычисления направления наискорейшего убывания функции мы будем использовать подход из [9], который основывается на понятии субградиента, и алгоритм проецирования точки на стандартный симплекс [10, с.103].

Итак, в начале для игры Γ_α и фиксированной точки $z = (z_1, z_2) \in Z$ введем понятие активной в точке z функции выигрыша.

Определение 7. Если при фиксированном $\mathrm{z} = (\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2)$ выполнено неравенство

$$\max_{x_1 \in X_1}(x_1' A z_2) - z_1' A z_2 \geq \max_{x_2 \in X_2}(z_1' B x_2) - z_1' B z_2,$$

то будем говорить, что в точке z активна функция f_1, а если верно неравенство

$$\max_{x_1 \in X_1}(x_1' A z_2) - z_1' A z_2 \leq \max_{x_2 \in X_2}(z_1' B x_2) - z_1' B z_2,$$

то будем говорить, что в точке z активна функция f_2.

Теперь рассмотрим функцию $\chi(z) = \max\limits_{x \in X} \varphi(x, z)$, где, в отличии от Γ_α, $z \in R^{n+m}$. Направление наискорейшего убывания $\chi(z)$ в точке z определяется следующим образом:

$\mathbf{1}^0$. Если в точке z активна только функция f_1, то направление наискорейшего убывания $\chi(z)$ в этой точке совпадает с антиградиентном функции $\chi_1(z) = \max_{x_1 \in X_1}(x_1' A z_2) - z_1' A z_2$.

$\mathbf{2}^0$. Если в точке z активна только функция f_2, то направление наискорейшего убывания $\chi(z)$ в этой точке совпадает с антиградиентом функции $\chi_2(z) = \max_{x_2 \in X_2}(z_1' B x_2) - z_1' B z_2$.

$\mathbf{3}^0$. Если в точке z активны и f_1, и f_2, то направление наискорейшего убывания функции $\chi(z)$, согласно [9, с.85], определяется по следующей лемме.

Лемма 1. Пусть в точке z, в которой активны и f_1 *и* f_2, градиент функции

$$\chi_1(z_{1,} z_2) = \max_{x_1 \in X_1}(x_1' A z_2) - z_1' A z_2$$

имеет вид

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial z} = \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial z_1}, \frac{\partial \chi_1}{\partial z_2}\right) = \left(\left(c_1^{(1)}, \dots, c_1^{(n)}\right), \left(c_2^{(1)}, \dots, c_2^{(m)}\right)\right),$$

а градиент функции

$$\chi_2(z) = \max_{x_2 \in X_2}(z_1' B x_2) - z_1' B z_2$$

представлен в виде

$$\frac{\partial \chi_2}{\partial z} = \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial z_1}, \frac{\partial \chi_2}{\partial z_2}\right) = \left(\left(d_1^{(1)}, \dots, d_1^{(n)}\right), \left(d_2^{(1)}, \dots, d_2^{(m)}\right)\right).$$

Тогда направление наискорейшего убывания функции χ(z) в точке z будет

$$g(z) = (g_1(z), g_2(z)) = \left(-\frac{\gamma_1}{\|\gamma_1\|}, -\frac{\gamma_2}{\|\gamma_2\|}\right),$$

где компоненты векторов $\gamma_1 = \left(\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_1^{(n)}\right)$ и $\gamma_2 = \left(\gamma_2^{(1)}, \dots, \gamma_2^{(m)}\right)$ определяются по формулам

$$\gamma_1^{(j)} = d_1^{(j)} - \frac{\sum_{i=1}^{n} d_1^{(i)}\left(c_1^{(i)} - d_1^{(i)}\right)}{2\sum_{i=1}^{n}\left(c_1^{(i)} - d_1^{(i)}\right)^2}\left(c_1^{(j)} - d_1^{(j)}\right) \quad (j = 1, \dots, n)$$

и

$$\gamma_2^{(j)} = d_2^{(j)} - \frac{\sum_{i=1}^{m} d_2^{(i)}\left(c_2^{(i)} - d_2^{(i)}\right)}{2\sum_{i=1}^{n}\left(c_2^{(i)} - d_2^{(i)}\right)^2}\left(c_2^{(j)} - d_2^{(j)}\right) \quad (j = 1, \dots, m)$$

соответственно.

Теперь рассмотрим задачу нахождения проекцию направления наискорейшего убывания функции $\chi(z)$ на множество ситуаций $Z = Z_1 \times Z_2$ игры Г. Множества смешанных стратегий Z_1 и Z_2 игры Г представляют собой стандартные симплексы [10]. Будем использовать алгоритм проецирования, предложенный в [11], его описание взято из [10, с.103]:

Пусть задана точка $c = (c_1, \dots, c_n)$ и стандартный симплекс

$$X = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + \dots + x_n = 1, x_i \geq 0 \ (i = 1, \dots, n)\}.$$

ШАГ 1. Меняем знаки у компонент c_j точки c и числа $\{-c_j\}$ упорядочиваем по не убыванию. Получаем последовательность $a_1 \leq \dots \leq a_n$.

ШАГ 2. Проводим вычисления по рекуррентной формуле*:*

$$\varphi_1 = 0,$$

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k + k(a_{k+1} - a_k), \quad k = 1, \dots, n-1,$$

пока не встретится индекс $k_0 = n$.

ШАГ 3. Вычисляем λ^*

$$\lambda^* = a_{k_0} + \frac{1}{k_0}\left(1 - \varphi_{k_0}\right).$$

Компоненты x_i^* проекции точки c на стандартный симплекс X имеют вид

$$x_i^* = (\lambda^* + c_i)_+, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $(u)_+ = \max\{0, u\}$.

Итак, начиная с точки $z = (z_1, z_2)$ строим **релаксационную последовательность** переходя к каждой последующей точке, используя следующий **алгоритм**:

$\mathbf{1}^0$. Задаем коэффициент μ (например, $\mu = 1$).

$\mathbf{2^0}$. В точке z находим направление наискорейшего убывания функции

$\chi(z) = \max_{x \in X} \varphi(x, z)$ – вектор $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$.

$\mathbf{3}^0$. Переходим в точку $\tilde{y} = (\widetilde{y_1}, \widetilde{y_2})$ по формуле

$$\widetilde{y_i} = z_i + \mu\gamma_i.$$

$\mathbf{4}^0$. Находим пробную точку $y = (y_1, y_2)$ как проекцию точки $\tilde{y} = (\widetilde{y_1}, \widetilde{y_2})$ на пару стандартных симплексов Z_1, Z_2.

$\mathbf{5}^0$. Если $\chi(y) < \chi(z)$ и активная функция в пробной точке y была активной и в точке z, то в качестве следующей точки релаксационной последовательности выбираем пробную точку y, иначе уменьшаем шаг в 2 раза, выбираем новую пробную точку по формуле

$$y := \frac{1}{2}(z + y)$$

и возвращаемся к пункту 5^0.

Замечание 2. Если значение функции на некотором члене релаксационной последовательности равно нулю, то этот член – точка равновесия по Нэшу в игре Г.

Замечание 3. Если последовательность сошлась к некоторой точке z^*, а $\chi(z^*) > 0$, то надо перейти к другой начальной точке и построить новую релаксационную последовательность.

Замечание 4. Эффективность алгоритма в среднем можно повысить, если выбирать начальные точки для построения релаксационных последовательностей случайным образом из класса либо смешанных, либо чистых стратегий. Таким образом мы получаем два эвристических алгоритма, первый из которых формирует стартовые точки в классе чистых стратегий, а второй в классе смешанных стратегий.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен новый алгоритм поиска равновесия по Нэшу в биматричных играх, основанный на использовании свертки Гермейера функции выигрыша игроков. В дальнейшем предполагается возможное написание программ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Интернет энциклопедия: [сайт]. URL: http://ru.knowledgr.com/

[2] Открытый образовательный портал 4brain: [сайт]. URL: https://4brain.ru/

[3] Орлов В. П. Бескоалиционные игры. Учебно-методическое пособие для вузов // Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета. 2012.

[4] Nash, J. F.: Equilibrium points in N-person games. Proc. Nat. Academ. Sci. USA. 36, 48 – 49 (1950).

[5] Кафедра интегрированных киберсистем МФТИ в ИПУ РАН: [сайт]. URL: https://mipt.ipu.ru/

[6] Мазалов В. В. М 13 Математическая теория игр и приложения: Учебное пособие. — 2"е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2016. — 448 с.

[7] Жуковский В. И., Кудрявцев К. Н. Парето-Равновесная ситуация: Достаточные условия и существование в смешанных стратегиях. 2015.

[8] Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

[9] Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. М.: Наука. 1972.

[10] Тамасян Г. Ш., Просолупов Е. В., Ангелов Т. А. Сравнительное изучение двух быстрых алгоритмов проецирования точки на стандартный симплекс //Дискретный анализ и исследование операций. - 2016. - Т. 23. - N. 2. - С. 100-123.

[11] Малоземов В. Н., Певный А. Б., Быстрый алгоритм проектирования точки на симплекс // Вестник СПбГУ. Сер. 1, 1992, N. - 1. - С. 112-113.