

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»
Институт естественных и точных наук
Факультет математики, механики и компьютерных технологий
Кафедра прикладной математики и программирования
Направление подготовки: 01.03.02 Прикладная математика и информатика

РАБОТА ПРОВЕРЕНА

Рецензент, доцент кафедры ИТЭ

к.ф.-м.н.

_____/ Е.В. Бунова

« ____ » _____ 20 ____ г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ

Заведующий кафедрой, д.ф.-м.н.,

профессор

_____/ А.А. Замышляева

« ____ » _____ 20 ____ г.

Использование метода сплайнов при решении интегральных уравнений

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ
ЮУрГУ–01.03.02.2020.153.ПЗ ВКР

Руководитель работы,
ст. преподаватель

_____/ М.Ю. Сартасова

« ____ » _____ 2020 г.

Автор работы

Студент группы ЕТ-412

_____/ А.А. Кирякова

« ____ » _____ 2020 г.

Нормоконтролер,
ст. преподаватель

_____/ Н.С. Мидоночева

« ____ » _____ 2020 г.

Челябинск
2020

АННОТАЦИЯ

Кирякова А.А. Использование метода сплайнов при решении интегральных уравнений. – Челябинск: ЮУрГУ, ЕТ-412 50 с., 8 ил., 3 табл., библиогр. список – 20 наим.

Данная работа посвящена разработке способа решения интегральных уравнений с использованием метода сплайнов.

В первом разделе был проведен анализ предметной области, рассмотрены методы, применяющиеся при решении интегральных уравнений. Также были рассмотрены виды сплайнов и способы их построения.

Во втором разделе описан способ решения интегральных уравнений методом сплайнов.

В каждом разделе присутствуют выводы по проведенной работе на данном этапе, в заключение описана достигнутая цель поставленной задачи, данной выпускной квалификационной работы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1 МЕТОДЫ И СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	6
1.1 Классификация интегральных уравнений	6
1.1.1 Линейные интегральные уравнения.....	6
1.1.1.1 Уравнение Фредгольма 2-го рода	6
1.1.2 Нелинейные интегральные уравнения.....	8
1.1.2.4 Уравнение Вольтерра	9
1.2 Методы решения интегральных уравнений	9
1.2.1 Преобразование Лапласа.....	9
1.2.2 Метод последовательных приближений	9
1.2.3 Метод резольвент.....	10
1.2.3 Метод сведения к алгебраическому уравнению	11
1.2.3 Метод замены интеграла конечной суммой.....	12
1.3 Метод сплайнов.....	12
1.3.1 Линейный сплайн.....	15
1.3.2 Кубический сплайн	16
1.3.3 Сплайн Акима	18
1.3.4 Кривые Безье и В-сплайны	19
1.3.5 Полиномиальные сплайны.....	21
1.3.6 Параболические сплайны.....	22
1.4 Вывод к первому разделу	24
2 РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА И ФРЕДГОЛЬМА I РОДА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА СПЛАЙНА.....	25

2.1 Интегрирование и дифференцирование многомерных функций	25
2.2 Решение интегральных уравнений Вольтерра I рода.....	31
2.3 Решение интегральных уравнений Фредгольма I рода.....	40
2.4 Метод кубического сплайна	44
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	48
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	49

ВВЕДЕНИЕ

В век информационных технологий все чаще обращаемся к интернет ресурсам для решения интегралов или интегральных уравнений с целью экономии времени. Некоторые задачи можно быстро решить аналитически, а для других необходимо время чтобы использовать численные методы.

Существует много методов и способов решения интегральных уравнений. Некоторые из них трудоемки и для них необходимо не мало времени чтобы разобраться как их применять, как работать с формулами и т. д.

Сплайны имеют довольно многочисленные применения как в математической теории, так и в разнообразных вычислительных приложениях. В частности, сплайны двух переменных интенсивно используются для задания поверхностей в различных системах компьютерного моделирования. Сплайн функции были известны математикам давно, но интенсивное изучение началось примерно в середине XX века. Впервые в 1946 году Исаак Шёнберг употребил этот термин в качестве обозначения класса полиномиальных сплайнов. До 1960 годов сплайны были в основном инструментом теоретических исследований, они часто появлялись в качестве решений различных задач. С развитием вычислительной техники началось использование сплайнов в компьютерной графике и моделировании, что продолжается и по сей день.

Цель: Разработать способ решения интегральных уравнений с использованием метода сплайнов.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- 1) анализ существующих методов решения интегральных уравнений;
- 2) рассмотреть виды сплайнов и изучить способы их построения;
- 3) разработать способ решения интегральных уравнений.

1 МЕТОДЫ И СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1 Классификация интегральных уравнений

Интегральными уравнениями называют уравнения, в которых неизвестная функция независимого (скалярного или векторного) аргумента встречается под знаком интеграла.

1.1.1 Линейные интегральные уравнения

Линейные интегральные уравнения – это интегральные уравнения, в которых неизвестная функция входит линейно:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds + f(x),$$

где $\varphi(x)$ – искомая функция, $f(x)$, $K(x, s)$ – известные функции, λ – параметр.

Функция $K(x, s)$ – называется ядром интегрального уравнения, а функция $f(x)$ – свободным членом.

В зависимости от вида ядра и свободного члена линейные уравнения можно разделить ещё на несколько видов.

1.1.1.1 Уравнение Фредгольма 2-го рода

Уравнение Фредгольма 2-го рода имеет вид:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds = f(x).$$

Пределы интегрирования могут быть конечными и бесконечными. Переменные удовлетворяют неравенству: $a \leq x, s \leq b$.

Ядро и свободный член должны быть непрерывными:

$$K(x, s) \in C(a \leq x, s \leq b), f(x) \in C([a, b])$$

или удовлетворять условиям:

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2 dx ds < +\infty, \quad \int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

Ядро, которое удовлетворяют последнему условию, называют фредгольмовым.

Если $f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$, то уравнение называется однородным, иначе неоднородным интегральным уравнением.

1.1.1.2 Уравнение Фредгольма 1-го рода

Уравнения Фредгольма 1-го рода выглядят так же, как и уравнение Фредгольма 2-го рода, только в них отсутствует часть, содержащая неизвестную функцию вне интеграла. Таким образом, уравнение имеет вид:

$$\int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds = f(x).$$

При этом ядро и свободный член удовлетворяют условиям, сформулированным для уравнений Фредгольма 2-го рода.

1.1.1.3 Уравнение Вольтерра 2-го рода

Отличием уравнения Вольтерра от уравнения Фредгольма, в том, что один из пределов интегрирования является переменным. Таким образом уравнение Вольтерра 2-го рода имеет вид:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, s)\varphi(s)ds + f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

1.1.1.4 Уравнение Вольтерра 1-го рода

В уравнении Вольтерра 1-го рода отсутствует неизвестная функция вне интеграла.

$$\int_a^x K(x, s)\varphi(s)ds = f(x),$$

1.1.2 Нелинейные интегральные уравнения

Существует множество нелинейных интегральных уравнений, поэтому дать им полную классификацию не является возможным. Вот лишь их некоторые типы, имеющие теоретическое и прикладное значение.

1.1.2.1 Уравнение Урысона

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x, s, \varphi(s))ds, K(x, s, \varphi) \in C(a \leq x, s \leq b; -M \leq \varphi \leq M),$$

где M – постоянная величина, которая не всегда может быть определена.

1.1.2.2 Уравнение Гаммерштейна

Уравнение Гаммерштейна являются частным случаем уравнения Урысона и имеет вид:

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x, s)F(s, \varphi(s))ds.$$

1.1.2.3 Уравнение Ляпунова-Лихтенштейна

Уравнения Ляпунова-Лихтенштейна содержат существенно нелинейные операторы, уравнения вида:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_{[1]}(x, s)\varphi(s)ds + \mu \int_a^b \int_a^b K_{[1,1]}(x, s, z)\varphi(s)\varphi(z)dsdz + \dots$$

1.1.2.4 Уравнение Вольтерра

$$\varphi(x) = \int_a^x F(x, s, \varphi(s)) ds,$$

где функция $F(x, s, \varphi)$ непрерывна по совокупности своих переменных.

1.2 Методы решения интегральных уравнений

При решении интегральных уравнений не всегда удается найти аналитическое решение. Выбор метода решения зависит от вида уравнения. Рассмотрим некоторые из методов.

1.2.1 Преобразование Лапласа

Для применения метод преобразования Лапласа, необходимо чтобы входящий в него интеграл имел вид свертки двух функций:

$$\int_0^x f(x-t)g(t)dt = F(p)G(p).$$

В том случае, когда ядро является функцией разности двух переменных:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-s)\varphi(s)ds.$$

1.2.2 Метод последовательных приближений

Метод последовательных приближений применяется для уравнения Фредгольма 2-го рода, если выполняется условие:

$$|\lambda||b-a| \max_{a \leq x, s \leq b} |K(x, s)| < 1.$$

Это условие необходимо для сходимости ряда Лиувилля-Неймана:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (K^k f)(x),$$

который и является решением уравнения, $(K^k f)(x)$ – k -ая степень интегрального оператора $(K^k f)(x)$:

$$(Kf)(x) = \int_a^b K(x, s)f(s)ds.$$

Решение является хорошим приближением при достаточно малых $|\lambda|$.

Метод последовательных приближений также применим при решении уравнений Вольтерра 2-го рода. В этом случае ряд Лиувилля-Неймана сходится при любых значениях $|\lambda|$.

1.2.3 Метод резольвент

Данный метод является не самым быстрым решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода, при этом нельзя указать других путей решения задачи.

Если ввести следующие обозначения:

$$K_0(x, t) = K(x, t),$$

$$K_1(t, s) = K(t, s).$$

Тогда повторными ядрами ядра $K(x, s)$ будут ядра $K_p(x, s)$:

$$K_p(x, s) = \int_a^b K(x, t)K_{p-1}(t, s) ds.$$

Ряд, составленный из повторных ядер:

$$\mathcal{R}(x, s, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k K_{k+1}(x, s),$$

называется резольвентой ядра $K(x, s)$ и является регулярно сходящимся при $a \leq x, s \leq b$ и условию сходимости ряда Лиувилля-Неймана. Решение интегрального уравнения представляется в виде:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \mathcal{R}(x, s, \lambda) f(s) ds.$$

1.2.3 Метод сведения к алгебраическому уравнению

В том случае, если ядро интегрального уравнения Фредгольма является вырожденным:

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^N f_i(x) g_i(s),$$

то интегральное уравнение можно свести к системе алгебраических уравнений. В таком случае уравнение можно представить в виде:

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^N f_i(x) \int_a^b g_i(s) \varphi(s) ds + f(x) = \lambda \sum_{i=1}^N c_i f_i(x) + f(x),$$

где $c_i = \int_a^b \varphi(s) g_i(s) ds$.

Умножив предыдущее равенство на $g_i(x)$ и проинтегрировав его по x на отрезке $[a, b]$, получаем систему алгебраических уравнений для неизвестных чисел c_i :

$$c_i = \lambda \sum_{k=1}^N a_{ik} c_k + b_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

где $a_{ik} = \int_a^b g_i(x) f_k(x) dx$, $b_i = \int_a^b g_i(x) f(x) dx$ – числовые коэффициенты.

Методом сведения к алгебраическому уравнению можно решить уравнение Фредгольма с любым ядром, если в качестве вырожденного ядра, близкого к действительному, взять отрезок Тейлора для функции $K(x, s)$.

1.2.3 Метод замены интеграла конечной суммой

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода:

$$\varphi(x_k) - \lambda \int_a^b K(x_k, t)\varphi(t)dt = f(x_k).$$

Заменяем интеграл с помощью квадратурной формулы:

$$\varphi(x_k) - \lambda \sum_{m=1}^n K(x_k, x_m)\varphi(x_m) = f(x_k).$$

Получаем линейную систему n алгебраических уравнений с n неизвестными $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)$, которое является приближенными значениями решения $\varphi(x)$ в точках x_1, x_2, \dots, x_n . В качестве приближенного решения исходного интегрального уравнения можно применять функцию:

$$\overline{\varphi(x)} = \lambda \sum_{m=1}^n A_m K(x, x_m)\varphi(x_m).$$

В результате рассмотрения различных подходов к решению интегральных уравнений можно сделать вывод: если интегральные уравнения нельзя решить аналитическим путем, то необходимо использовать один из численных методов для аппроксимации (или интерполяции) подынтегральных функций. Для численного решения интегральных уравнений выберем метод сплайнов.

1.3 Метод сплайнов

Под сплайном обычно понимают кусочно-заданную функцию, совпадающую с более простыми функциями на каждом элементе разбиения своей области определения. Сплайны обладают исключительно хорошими аппроксимативными свойствами, универсальностью и обеспечивают простоту реализации вычислительных алгоритмов, полученных на их основе. При этом алго-

ритмы построения сплайнов совпадают с алгоритмом метода конечных элементов, который является основным промышленным методом прочностного анализа в системе автоматизированного проектирования (САПР). Несмотря на то, что в настоящее время традиционной прикладной сферой использования интерполяционных сплайнов стали значительно шире, чем просто описание некоторых кривых. В реальном мире большое количество физических процессов по самой своей природе являются сплайнами. То есть сплайн – не выдуманная математическая абстракция, а во многих случаях он является решением дифференциальных уравнений, описывающих вполне реальные физические процессы (например, в механике это деформация гибкой пластины или стержня, зафиксированной в отдельных точках; в термодинамике это теплообмен в стержне, составленном из фрагментов с различной теплопередачей; в химии – диффузия через слои различных веществ; в электричестве – распространение электромагнитных полей через разнородные среды и т. д.)

Сплайн строится между двумя узлами сетки. Если он линейный, то это прямая линия, если параболический – парабола, если кубический – кривая третьего порядка. Иными словами, количество узлов зависит только от количества сплайнов, но не их порядок. Таким образом, для сетки $\{x_i\}$ из $n + 1$ узла ($i = 0, 1, \dots, n$) имеем n сплайнов $S_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, аргумент x должен лежать в интервале от x_i до x_{i+1} .

Как известно, по двум точкам прямая строится однозначно. С целью построения параболы, нужно или задать еще одну точку, или ввести граничное условие, т. е. значение не самой функции, а некоторой ее производной в одной из границ отрезка. В параболических сплайнах применяется первая производная. Чтобы построить кубическую кривую, надо либо задать еще две точки, либо ввести два граничных условия. В кубических сплайнах задают значение либо первой, либо второй производной в обеих границах отрезка. Хотя

возможны и другие комбинации – значение первой и второй производной в одной из границ отрезка и т. п.

Широкий класс методов решения интегральных уравнений основан на использовании техники сплайнов. В работе Алберга [18] приведена вычислительная схема для решений уравнений II рода.

Решение записывается в виде кубического сплайна, который представляется через фундаментальные сплайны. Относительно неизвестных значений y_1 получается система уравнений с плотной матрицей. Элементами матрицы являются интегралы. Если i не является собственным числом однородного уравнения и $K(t, \tau) \in C^n$, то сплайн сходится к точному решению, а ошибка решения имеет порядок $\|h\|^\alpha$.

В работе С.Б. Стечкина и Ю.И. Субботина [4] изложена похожая методика для уравнений Фредгольма II рода. Искомое решение представляется в виде разложения по В-сплайнам. Введение ограничений на свойства ядер и выбор пространств искомых решений $y(t) \in C^n$ позволяет получить оценку ошибки решения и его k -производных в $C[a, b]$, имеющую порядок h^{n-k} .

В работе А.И. Гребенникова [5] рассматриваются вопросы применения сплайнов для решения некорректных задач. Показано, что алгоритмы построения интерполяционных и сглаживающих сплайнов аналогичны методам регуляризации. В работе В.А. Морозова [6] содержится очень важный теоретический результат, суть которого заключается в том, что применение сплайнов для решения уравнений I рода уже является регуляризующей процедурой. Сплайны при этом должны удовлетворять условию аппроксимации – стремлений к нулю нормы ошибки аппроксимации при увеличении числа разбиений.

В зависимости от типов сегментов, соединяющих вершины сплайна, различают несколько основных видов сплайнов: линейный, кубический, сплайн Акима, В-сплайн и сплайн Безье, полиномиальный сплайн, параболический сплайн.

1.3.1 Линейный сплайн

Как все интерполирующие полиномы, сплайны имеют вид:

$$P(x) = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i,$$

где $P(x)$ – полином, c_i – действительная константа, φ_i – система линейных независимых функций, т. е. любая функция этой системы не может быть представлена в виде линейной комбинации других.

Количество узлов n не равно порядку сплайна m , а количество сплайнов равно $n - 1$. Исходя из этого:

$$S_i(x) = \sum_{j=0}^m c_{ji}(x - x_i)^j, i = 0, 1, \dots, n - 1, m = 1, 2, 3. \quad (1.1)$$

Для того чтобы не использовать константы c с двумя индексами, следует заменить эти коэффициенты таким образом:

$$a_i = c_{0i}, b_i = c_{1i}, d_i = c_{2i}, g_i = c_{3i}.$$

Линейный сплайн – это сплайн, составленный из полиномов первой степени, т. е. из отрезков прямых линий (рисунок 1).

Согласно формуле (1.1), линейный сплайн имеет вид:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i), i = 0, 1, \dots, n - 1,$$

где $a_i = y_i$, $b_i = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$.

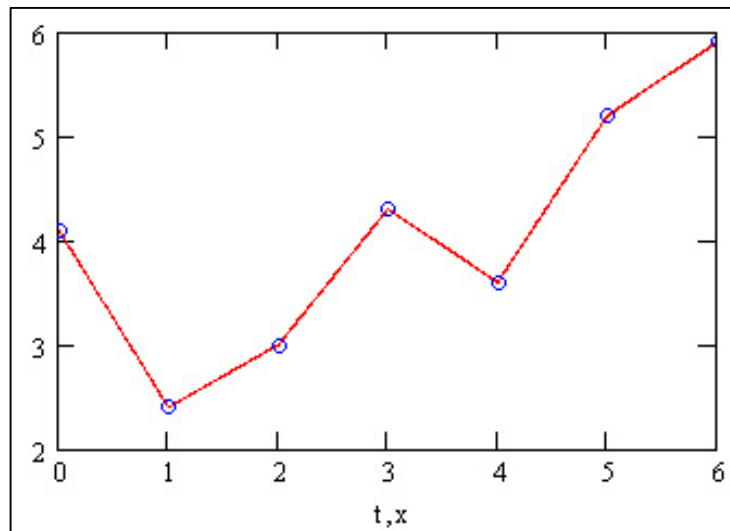


Рисунок 1 – Линейный сплайн

Точность интерполяции линейными сплайнами невысока, следует отметить, что они не обеспечивают непрерывности первых производных. В некоторых случаях кусочно-линейная аппроксимация функции может оказаться предпочтительнее, чем аппроксимация более высокого порядка. Например, линейный сплайн сохраняет монотонность переданного в него набора точек.

1.3.2 Кубический сплайн

Кубический сплайн – гладкая функция, область определения которой разбита на конечное число отрезков, на каждом из которых она совпадает с некоторым кубическим многочленом (полиномом).

Функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$, разбитом на части $[x_{i-1}, x_i]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$. Кубическим сплайном дефекта 1 (разность между степенью и гладкостью сплайна) называется функция $S(x)$, которая:

- 1) на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, является многочленом степени не выше третьей;
- 2) имеет непрерывные первую и вторую производные на всем отрезке $[a, b]$;

3) в точках x_i выполняется равенство $S(x_i) = f(x_i)$, т. е. сплайн $S(x)$ интерполирует функцию f в точках x_i .

Для того чтобы построить сплайн, необходимы дополнительные требования – граничные условия:

1) «естественный сплайн» – граничные условия:

$$S''(a) = S''(b) = 0;$$

2) непрерывность второй производной – граничные условия:

$$S'''(a) = S'''(b) = 0;$$

3) периодический сплайн – граничные условия:

$$S'(a) = S'(b), S''(a) = S''(b).$$

Одним их главных преимуществ кубических сплайнов является то, что они лишены недостатка, когда полученная интерполирующая функция имеет точки, где производная не является непрерывной, т. е. график функции содержит точки «излома».

Основываясь на вышеизложенном, можно заключить, что кубический сплайн лишен недостатков методов глобальной интерполяции.

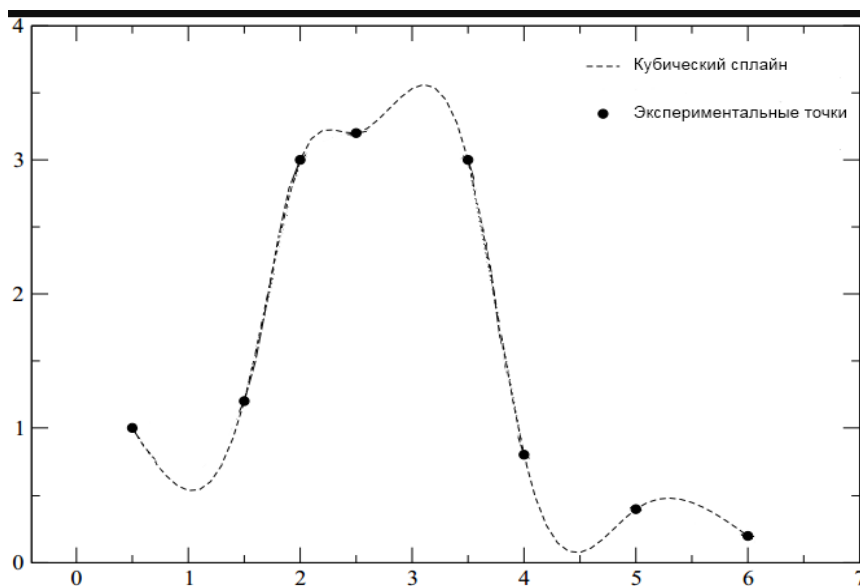


Рисунок 2 – Выбросы при интерполяции кубическими сплайнами

Для каждого интервала между узлами задается многочлен степени не выше третьей, при этом накладываются условия, требующие, чтобы первая и вторая производная функции были непрерывны, что с одной стороны, упрощает вычисления, а с другой – позволяет избежать резких скачков кривизны. Помимо указанных преимуществ, у кубических сплайнов есть один существенный недостаток: в районе точки, далеко отстоящей от соседей, такие сплайны могут делать неожиданные выбросы (рисунок 1).

Таким образом, опираясь на то, что входными данными задачи по сути является набор результирующих точек некоторого эксперимента или испытаний, а значит, в общем случае гипотетическая результирующая кривая является гладкой, то логично, в качестве основного метода интерполяции выбрать кусочную интерполяцию сплайнами 3-го порядка.

1.3.3 Сплайн Акима

В 1970 году Хироши Акима предложил модификацию привычного кубического сплайна с целью избавления от нежелательных выбросов.

Сплайн Акимы – это особый вид сплайна, устойчивый к выбросам. Недостатком кубических сплайнов является то, что они склонны осциллировать в окрестностях точки, существенно отличающейся от своих соседей. На графике (рисунок 3) приведен набор точек, содержащий несколько выбросов.

Пунктирной линией обозначен кубический сплайн с естественными граничными условиями. На отрезках интерполяции, граничащих с выбросом, сплайн заметно отклоняется от интерполируемой функции – сказывается влияние выброса. Сплошной линией обозначен сплайн Акимы. Можно видеть, что, в отличие от кубического сплайна, сплайн Акимы в меньшей мере подвержен влиянию выбросов – на отрезках, граничащих с выбросом, практически отсутствуют признаки осцилляции.

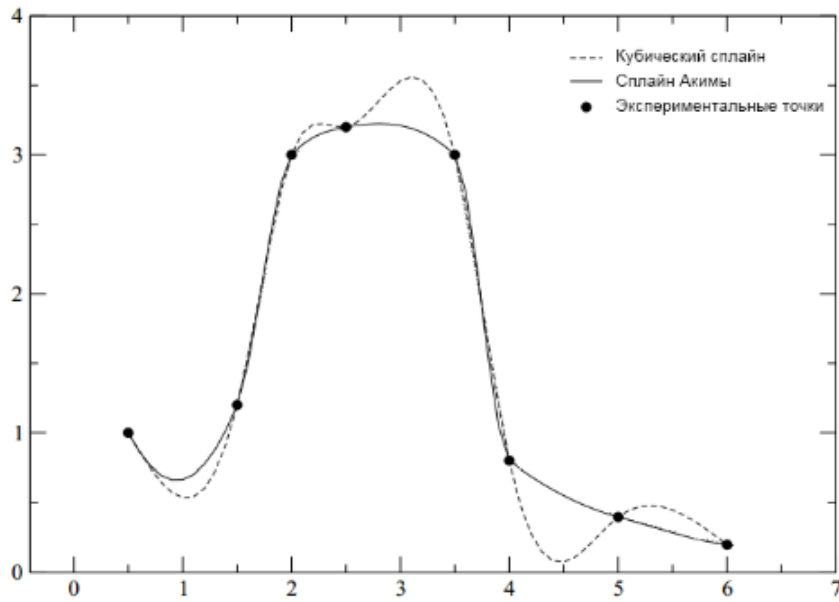


Рисунок 3 – Сравнение интерполяционных методов

Это также локальный метод, однако он не аддитивен, т. е. интерполяционная функция от суммы двух функций, в общем случае, отличается от суммы соответствующих интерполяционных функций. Согласно методу выбирают:

$$s_i = \frac{w_{i+1}[\tau_{i-1}, \tau_i]g + w_{i-1}[\tau_i, \tau_{i+1}]g}{w_{i+1} + w_{i-1}},$$

$$w_j = |[\tau_j, \tau_{j+1}]g - [\tau_{j-1}, \tau_j]g|.$$

Аппроксимация, выполненная по этому методу имеет, в общем случае порядок $O(|r|^2)$.

1.3.4 Кривые Безье и В-сплайны

В последнее время множество компьютерных графических редакторов разного назначения реализуют опцию рисования линий «от руки». Для создания плавных кривых чаще всего применяется алгоритм интерполяции Безье. Кривые Безье – это сплайны, для которых разработаны алгоритмы редактирования визуальным способом при помощи так называемых управляющих линий. Алгоритм этот был предложен, в свое время, Безье – сотрудником французского автомобильного концерна «Рено» и использован в соответствующей

компьютерной системе автоматического проектирования.

При работе с фигурами Безье пользователю достаточно представлять на интуитивном уровне, как его действия будут влиять на форму кривых, а разбираться в сложных аспектах их расчетов совершенно не нужно. Приведем (без формул) два примера расчета родственных кривых – так называемых *B*-сплайнов).

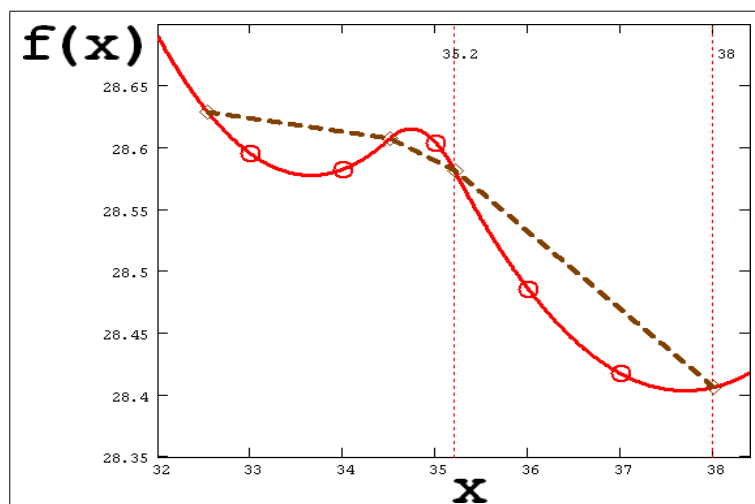


Рисунок 4 – B-сплайн интерполяция (пунктир-управляющие линии)

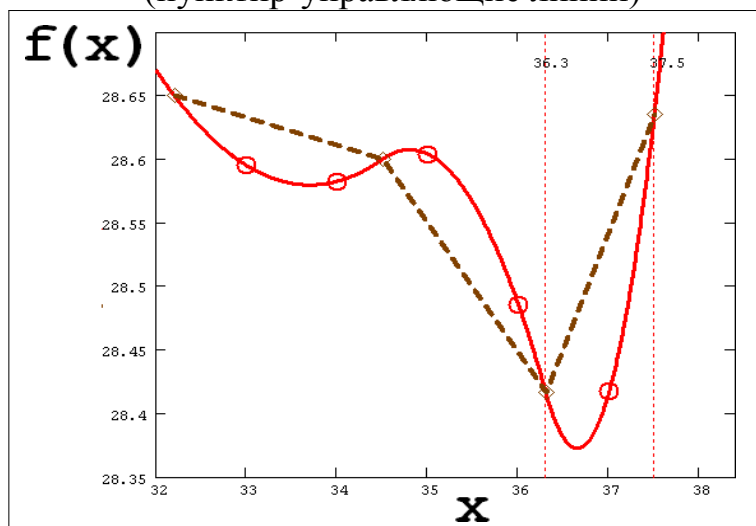


Рисунок 5 – B-сплайн интерполяция (другие управляющие точки)

На рисунках 4 и 5 приведены два примера интерполяции квадратичными *B*-сплайнами. Интерполяция *B*-сплайнами, отличается от обычной сплайн-ин-

терполяции тем, что сшивка элементарных парабол производится не в узлах x_i , а в других точках u_i , называемых управляющими точками, координаты которых определяются пользователем. В графических редакторах пользователь просто перемещает по экрану компьютера сами точки, либо управляющие линии, т. е. отрезки, их соединяющие, применяя, в большинстве случаев, обычную технику перетаскивания мышью.

На рисунках 4 и 5 (на примере тех же данных о курсе доллара) видно, как сильно изменяется картина В-сплайн-интерполяции при смещении набора управляющих точек, т. е. при определении нового вектора абсцисс управляющих точек u . Управляющие точки показаны ромбами.

1.3.5 Полиномиальные сплайны

Полиномиальным сплайном называется сплайн произвольной степени P дефекта r , который определяется как функций $S(x)$, удовлетворяющая условиям:

$$1) S^{P+1}(x) = 0, x \in (t_i, t_{i+1});$$

$$2) S(x) \in C^{P-r}[a, b].$$

Точки $\{t_i\}_{i=1}$ называют узлами сплайна. Производная порядка $(P + 1 - r)$ от сплайна $S(x)$ может быть разрывной на отрезке $[a, b]$. В случае, если $P = 2n - 1$, т. е. сплайнов нечетной степени, существование, единственность сплайна, интерполирующего заданные значения в узлах $x_i = t_i$, следует из результатов в работе [5].

В определении интерполирующего сплайна в концевых точках отрезка фигурируют дополнительные, по сравнению задаваемыми в остальных точках сетки, условия. Эти условия часто принято выделять отдельно от интерполяционных условий, которые называются «краевыми» условиями.

Краевые условия различают нескольких типов:

1) периодические:

$$S^{(K)}(a) = S^{(K)}(b), K = 0, \dots, 2n - 2; \quad (1.2)$$

2) первого типа:

$$S^{(K)}(x_i) = y_i^{(K)}, K = 0, \dots, n - 1; j = 1, N; \quad (1.3)$$

3) второго типа:

$$S^{(K)}(x_i) = y_i^{(K)}, K = n, \dots, 2n - 2; j = 1, N. \quad (1.4)$$

Если в условии (1.4) $y_i^{(K)} = 0$, то сплайн называют натуральным.

Полиномиальный сплайн нечетной степени имеет вид:

$$S(x) = \sum_{j=1}^{2n} c_{ij} u_j(x - x_{i-1}), x \in (x_{i-1}, x_i),$$

где $u_j(x) = \frac{x^{j-1}}{(j-1)!}$.

Чтобы выписать оценки погрешности интерполяции для менее гладких функций, предварительно опишем некоторые свойства полиномиальных сплайнов нечетной степени. Это «первое интегральное соотношение», свойства минимальной нормы и наилучшего приближения, которые имеют важное самостоятельное значение в теории полиномиальных сплайнов, т. к. позволяют установить существование и единственность интерполирующего сплайна. Из этих свойств следует эквивалентность определения интерполирующего полиномиального сплайна нечетной степени и его определения как экстремального элемента подходящим образом выбранного гильбертова пространства. Также эти свойства позволяют обосновать использование сплайнов в задачах сглаживания экспериментальных данных.

1.3.6 Параболические сплайны

Для корректного построения параболического сплайна необходимо задавать две системы узлов на отрезке $[a, b]$:

1) узлы интерполяции $\omega: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$,

2) узлы сплайна $x_{i-1} < \bar{x}_i < x_i, i = \overline{1, N}, h_i = x_i - x_{i-1}$.

Интерполяционным параболическим сплайном для $f(x)$ $[a, b]$ называется функция $S(x)$ такая, что:

1) $S(x) = \sum_{k=0}^2 a_k^i (x - \bar{x}_i)^k, x \in [\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}], i = \overline{0, N}$;

2) $S(x) \in C^1[a, b]$;

3) $S(x_i) = f_i, i = \overline{0, N}$.

1.3.7 Сплайн-экстраполяция

Для вычисления сплайн-экстраполяции достаточно просто указать соответствующее значение аргумента, которое лежит за границами рассматриваемого интервала.

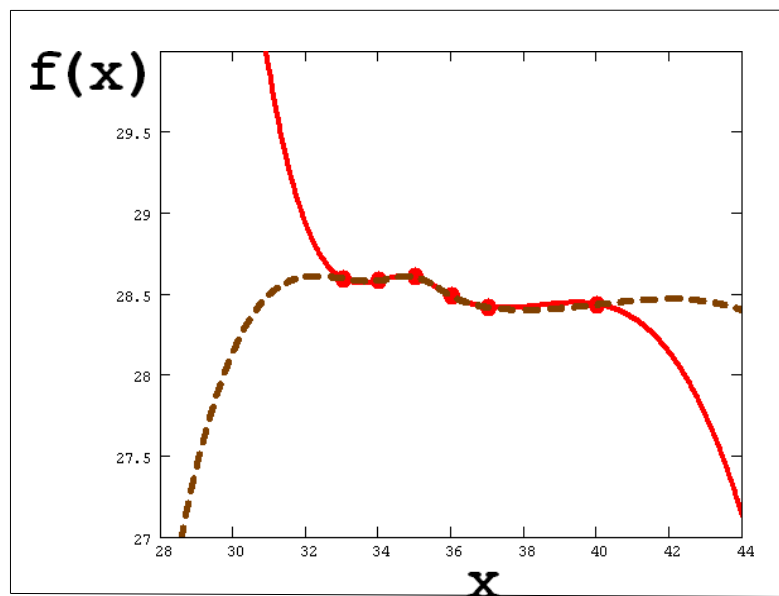


Рисунок 6 – Сплайн-экстраполяция
(два варианта расчета сплайна)

При построении экстраполяции следует соблюдать осторожность, не забывая о том, что ее успех определяется значимостью ближайших к границе интервала точек. Чем дальше от них экстраполировать зависимость, заданную экспериментальными точками, тем менее точным будет результат.

Сказанное иллюстрируется на рисунках 6 и 7, на которых изображены результаты сплайн-экстраполяции (два варианта которой приведены на рисунке 6 в виде сплошной кривой и пунктира), а также линейной экстраполяции (пунктир на рисунке 7).

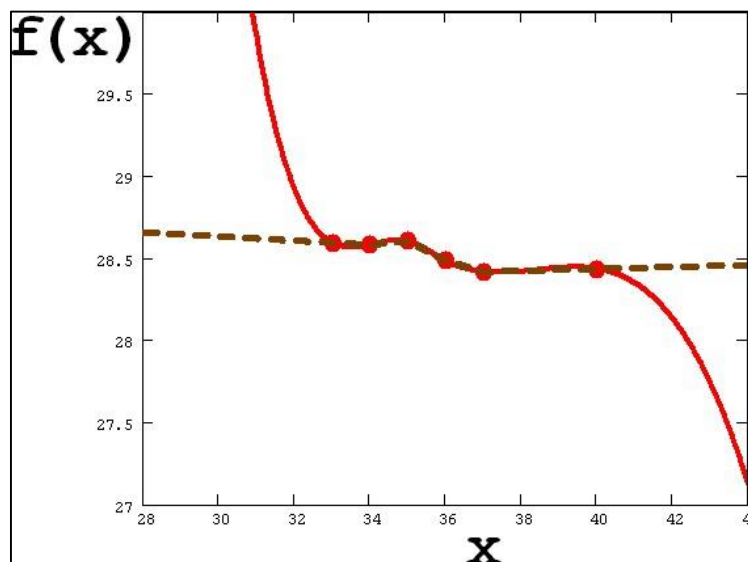


Рисунок 7 – Сплайн и линейная экстраполяция (сравнение)

На рисунке 6 показано сравнение профиля кубического и квадратичного сплайна за пределами рассматриваемого интервала данных. Видно, что вдали от него результаты экстраполяции совершенно различны, что, конечно, объясняется ее параболической зависимостью от аргумента x .

1.4 Вывод к первому разделу

На данный момент существует большое количество видов интегральных уравнений и из всего многообразия возьмем уравнение Вольтерра I рода и уравнение Фредгольма I рода. Использование сплайнов при решении интегральных уравнений является одним из наиболее эффективных методов по качеству получаемых результатов.

2 РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЛТЕРРА И ФРЕДГОЛЬМА I РОДА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА СПЛАЙНА

2.1 Интегрирование и дифференцирование многомерных функций

Прежде всего отметим, что поставленные задачи в математике изучены достаточно хорошо. Выбор метода их решения проведем следующим образом. В самом начале выделим два принципиально различных подхода. Первый подход заключается в получении решения в форме аналитического выражения. Удобство такой формы решения заключается в простоте восприятия, возможности его анализа, оценки влияния, входящих в него величин на все решение, легкости программирования и т. д. Существенный недостаток аналитических методов состоит в том, что с их помощью решается крайне малое число задач. Особенно это справедливо для задач во временной области. Практически с помощью этих методов можно рассчитывать самые простые излучатели или решать какие-либо идеализированные задачи. Например, когда подынтегральная функция мало изменяется внутри области интегрирования, она может быть вынесена за знак интеграла и получается в аналитическом виде.

В отличие от аналитических, вычислительные методы имеют более широкую сферу использования, универсальны в применении, некоторые из них обладают простыми способами оценки точности решения. Эффективность использования многих вычислительных методов связана с возможностью применения ЭВМ. И хотя в развитии ЭВМ достигнуты значительные успехи, по-прежнему, проблемой при решении электродинамических задач остаются быстродействие ЭВМ и емкость ее оперативной памяти.

В последнее время получили значительное распространение так называемые квазианалитические методы, которые сочетают некоторые свойства аналитических и вычислительных методов. В первую очередь к ним следует отнести конечно-разностные методы. Однако, и у них имеются свои недостатки,

например, «неоднозначность» выбора разностной схемы и сложность проверки сходимости и устойчивости решения.

Возможно применение различных аппроксимативных методов, в частности аппроксимация многочленами. Основной недостаток использования многочленов состоит в том, что их поведение в окрестности какой-либо точки определяет их поведение в целом, т. е. небольшие изменения в одной точке меняют весь многочлен. Кроме того, при большом числе разбиений степени многочленов очень велики.

Одним из более перспективных квазианалитических методов, который не обладает перечисленными недостатками, является метод сплайн-функций [18]. Под названием сплайн-функций в настоящее время понимается довольно большой класс функций. Однако, в данной работе будут использоваться только кусочно-полиномиальные сплайны. Теория сплайнов достаточно хорошо разработана. Особо следует отметить работы В. А. Василенко, на основе которых созданы эффективные пакеты программ [16].

Суть метода заключается в том, что весь интервал изменения непрерывной функции разбивается на отрезки. В каждой из точек разбиения подсчитывается значение функции. Между точками разбиения функция аппроксимируется полиномом. Полинома определяется из условия равенства значений функции и ее производных до определенного порядка слева и справа от точки разбиения. Использование полиномов нечетной степени обеспечивает устойчивость вычислительного процесса нахождения и хорошую точность аппроксимации. Сплайн от функции одной переменной x имеет вид

$$f_1(x) = \sum_{k=0}^{2p-1} a_k^{(i)} \frac{(x-x_1)^k}{k!}, \quad i = \overline{0, N}, \quad x \in [a, b], \quad (2.1)$$

где $a_k^{(i)}$ – коэффициенты сплайна, которые вычислены исходя из условий равенства функций и их производных в общих точках соседних интервалов.

Величина $2p - 1$ называется степенью сплайна. Удобство использования формы представления сплайна (2.1) состоит в том, что легко могут быть вычислены интеграл от сплайна и производная в любой точке. Так, для интеграла имеем:

$$\int_a^b f_1(x) dx = \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^{2p-1} a_k^{(i)} \frac{(x - x_i)^{k+1}}{(k+1)!}, \quad (2.2)$$

а для производной

$$f_i(x) = \sum_{k=1}^{2p-1} a_k^{(i)} \frac{(x - x_1)^{k-1}}{(k-1)!}. \quad (2.3)$$

Важным обстоятельством является и то, что используемые сплайны образуют, в некотором смысле, «естественный базис» в W_2^P .

Возможность и результаты использования метода сплайнов при решении некоторых электродинамических задач отражены во многих работах.

Общая методика использования полиномиальных сплайнов для расчета полей излучателей НСВ выглядит следующим образом.

Подынтегральные выражения аппроксимируются сплайном нечетной степени. Коэффициенты сплайнов находятся с использованием комплекта программ ODD из библиотеки программ LIDA-3, являющейся модифицированной разработкой. Для аппроксимации выбираются сплайны третьей степени, которые затем интегрируются и дифференцируются или наоборот.

Выбор третьей степени сплайна обусловлен тем, что обеспечивается оптимальное соотношение между временем счета и оптимальной ошибкой аппроксимации. Многочисленные расчеты тестовых примеров и полей реальных излучателей показали, что и увеличение числа точек разбиения, и увеличение степени сплайна ведет к уменьшению относительной ошибки аппроксимации. Однако, при этом естественно возрастает и время счета. Замечено, что увеличение числа точек разбиения дает более быстрое уменьшение ошибки, чем

увеличение степени сплайна. Ниже представлены результаты тестовых расчетов, которые иллюстрируют влияние на точность расчетов соотношения степени сплайна и количества точек разбиения. На рисунке 7 представлено относительная ошибка аппроксимации функции $\sin x/x$ сплайнами:

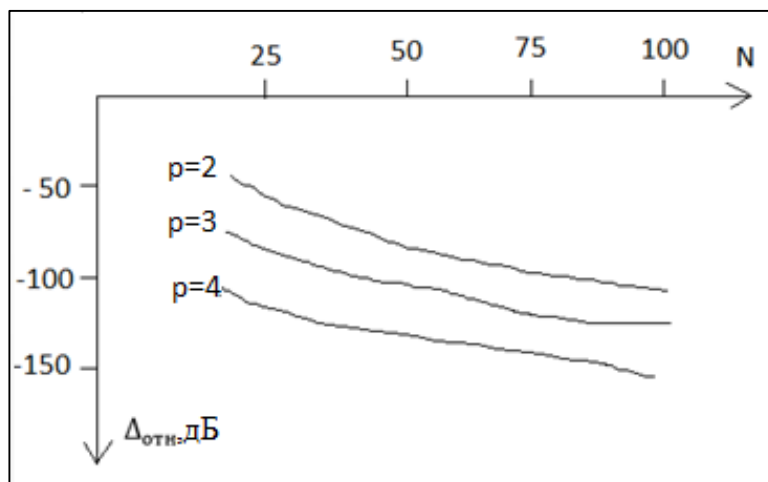


Рисунок 7 – Относительная ошибка аппроксимации

третьей ($p=2$), пятой ($p=3$) и седьмой ($p=4$) степеней для различного числа точек аппроксимации N . На рисунке 8 представлена зависимость «эффективности счета» от величин p и N .

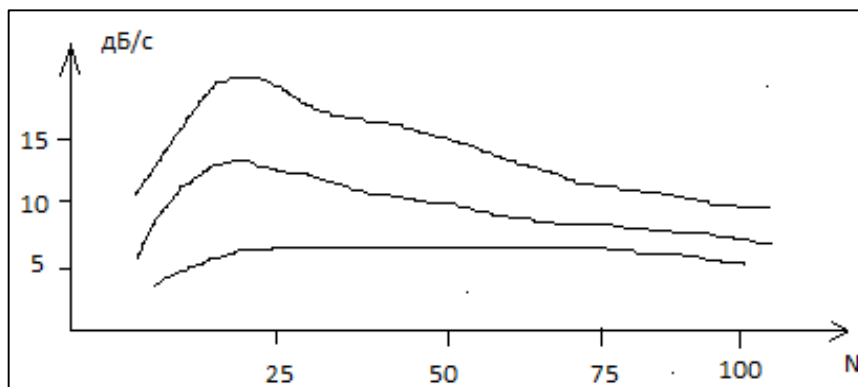


Рисунок 8 – Зависимость «эффективности счета»

За «эффективность счета» принято отношение величины относительной ошибки в дБ ко времени, которое необходимо затратить для получения этой ошибки.

Из рисунков видно, что существует некоторое оптимальное соотношение между степенью сплайна и количеством точек разбиения. Дальнейшее

увеличение p и N не приводит к значительному уменьшению ошибки, а время счета значительно увеличивается.

Из вышеизложенного делаем вывод, что оптимальным значением степени сплайна является третья ($p = 2$).

Результаты по аппроксимации сплайном двумерной функции

$$f(x, y) = \sin x * \sin y \quad (2.4)$$

представлены в таблице 1, где приведена относительная ошибка $\Delta_{\text{отн}}$ вычисления функции по формуле (2.4) в середине между точками разбиения.

Область определения функции $f(x, y) - [0, \pi; 0, \pi]$.

Использовались равномерные сетки с различными форматами $I * J$.

Таблица 1 – Результаты по аппроксимации сплайном

$I*J$	3*3	5*5	7*7	9*9	11*11
$\Delta_{\text{отн}}$	$2,7*10^{-2}$	$1*10^{-3}$	$1,7*10^{-4}$	$1,6 * 10^{-4}$	$1,5*10^{-4}$

Из таблицы видно, что увеличение количества точек разбиения не приводит к пропорциональному уменьшению ошибки.

В таблице 2 приведена относительная ошибка вычисления

Таблица 2 – Относительная ошибка вычисления

$I * J$	5*5	7*7	9*9	11*11
$\Delta_{\text{отн}}$	$5*10^{-3}$	$1*10^{-3}$	$3*10^{-4}$	$1*10^{-4}$

Интеграла от функции (2.8) в зависимости от числа разбиений. Результаты расчетов показывают, что интегрирование осуществляется с высокой точностью.

Проверка точности дифференцирования осуществлялась путем вычисления операций $rot, div, grad div$ от векторного поля, которое было задано составляющими:

$$\left. \begin{aligned} A_x &= \cos x * \cos y * \cos z \\ A_y &= \cos x + \cos y + \cos z \\ A_z &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

на интервале $[-\pi, \pi; -\pi, \pi; -\pi, \pi]$.

Вычисление операции *grad* осуществлялось от функции A_x , заданной в формуле (2.5). Относительная ошибка вычисления дифференциальных операций приведена в таблице 3. Количество точек разбиения по каждой переменной одинаково и равно 9.

Анализ таблиц показывает, что для получения относительной ошибки расчетов порядка десятых долей процента, достаточно использовать 4-5 точек разбиения на один перепад изменения функции от минимума до максимума или наоборот.

Таблица 3 – Относительная ошибка вычисления

	$\text{rot } \vec{A}$	$\text{div } \vec{A}$	$\text{grad div } \vec{A}$	$\text{grad } \vec{A}$
$\Delta_{\text{отн}}$	$5,2 * 10^{-4}$	$1,4 * 10^{-2}$	$1,5 * 10^{-2}$	$1,6 * 10^{-4}$

В общем случае теория сплайнов допускает априорную оценку точности аппроксимации. Однако, процесс этот довольно трудоемкий. Более простым оказывается проведение вычислительного эксперимента. Увеличение числа точек разбиения и сравнение получаемых результатов позволяют быстро найти оптимальное значение числа точек разбиения по каждой переменной.

К недостаткам метода сплайн-аппроксимации следует отнести: повышенную ошибку расчета в первых и последних двух точках интервала разбиения: достаточно большое время расчета. Первый недостаток связан с неопределенностью задания производных в начальных и конечных точках интервала. Второй объясняется размерностью задачи, т. к. приходится проводить расчеты с функциями четырех переменных. В отдельных частных случаях возможны упрощения, которые будут отмечаться по ходу изложения.

2.2 Решение интегральных уравнений Вольтерра I рода

Вопросу решения интегральных уравнений Вольтерра I рода посвящено достаточно много работ. Возможно, что наиболее полное изложение методов решения с программами расчетов приведено в работе [1]. Согласно предложенной в ней классификации, уравнение вида:

$$\int_0^t K(t - \tau)y(\tau)d\tau = f(t) \quad (2.6)$$

относят к уравнению Вольтерра I рода типа свертки. Можно доказать [2] что, если:

$$\|f(x)\|_{c^1} < k_1, \quad (2.7)$$

$$\|K(t - \tau)\|_{c^1} < k_2, \quad (2.8)$$

$$\min\|K(t, t)\| = k_3, \quad (2.9)$$

то при точном задании исходных данных и для точного метода решения интегральный оператор имеет ограниченный обратный оператор с нормой:

$$\|A^{-1}\|_{c^1 \rightarrow c} = \frac{1}{k_3} \exp\left(\frac{k_2}{k_3}(b - a)\right).$$

Следовательно, уравнение (2.6) имеет непрерывное и единственное решение. Приведенный результат – часть более общего результата [3], где отмечается, что, если для уравнений первого рода топология правой части сильнее топологии решений, то задача является корректной. Из приведенных результатов следует, что выбор пространств решений и пространств исходных данных определяет процедуру регуляризации рассматриваемой задачи.

Вопрос устойчивости решения должен изучаться в зависимости от метода решения. Рассмотрим кратко некоторые результаты для наиболее употребительного метода квадратур [1]. Этот метод заключается в замене интеграла конечной суммой:

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=1}^n A_i f(t_i) + R[f], \quad (2.10)$$

где $R[f]$ – остаточный член. Здесь чаще всего используют формулы прямоугольников (левого, среднего, правого), формулу трапеций и формулу Симпсона. Технику применения этих формул и вычислительные алгоритмы можно найти в работе [1] приведены величины для h_{onm} :

$$\left. \begin{aligned} h_{onm} &= O(\sigma_5^2) \text{ для левых и правых прямоугольников} \\ h_{onm} &= O(\sigma_7^2) \text{ для средних прямоугольников и трапеций} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

где σ – ошибка задания правой части ($\sigma \in L_2$). Если с погрешностью задано ядро, то величину h выбирают порядка (см. [1])

$$h_{onm} \approx O\left(\sigma^{\frac{1}{3}}\right) \quad (2.12)$$

Из других методов решений часто используют метод коллокации. В работе [1] приведены основные соотношения для этого метода.

Суть используемой в данной работе методики заключается в следующем. Для аппроксимации искомой функции и ядра выбирается сплайн третьей степени. Это обеспечивает выполнение двух условий:

$$\left. \begin{aligned} K(t - \tau) &\in W_2^2[a, b] \\ y(\tau) &\in W_2^2[a, b] \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Для аппроксимации функции правой части выбирается сплайн седьмой степени, обеспечивающий:

$$f(t) \in W_2^4[a, b], \quad (2.14)$$

Эти условия являются более «жесткими», чем условия (2.7)–(2.9), что обеспечивает корректность решения задачи [1].

Представим искомую функцию в виде сплайна:

$$y_t(\tau) = \sum_{l=0}^3 a_{i,j} \frac{(\tau - \tau_i)^l}{l!}, \tau \in [0, \tau_n], i = \overline{1, n}. \quad (2.15)$$

Ядро $K(t - \tau)$ является функцией двух переменных t и τ , т. е. для его аппроксимации в общем случае необходимо использовать двумерный сплайн. Однако обе переменные соответствуют одной физической величине – времени и поэтому возможен переход к одномерному сплайну.

Это осуществляется следующим образом. Величина интервалов разбиения Δt по t и $\Delta \tau$ по τ выбирается одинаковой. Переменные входят в ядро с разными знаками, поэтому необходимо «инвертировать» номеров отсчетов, т. е. если число интервалов разбиения ядра по τ равно m , то текущий индекс в полиномиальном выражении должен быть не i , а $m - i$.

Учитывая число разбиений по t , общий индекс при τ должен быть $m - k + 1$. Итак, представим ядро в виде сплайна:

$$K(t - \tau) = \sum_{j=0}^3 b_{k,i,j} \frac{(\tau - \tau_{m-i+k})^j}{j!}, \tau \in [0, \tau_m], i = \overline{1, m}, \quad (2.16)$$

а функцию правой части в виде:

$$f_i(\tau) = \sum_{j=0}^7 c_{i,j} \frac{(\tau - \tau_i)^j}{j!}, \tau \in [0, \tau_{i+m-1}], i = \overline{1, n + m - 1}. \quad (2.17)$$

Для построения схемы решения уравнения Вольтерра рассмотрим вначале решение прямой задачи.

Ядро $K(t - \tau)$ последовательно «надвигается» на функцию $y(\tau)$. В общем случае число разбиений n функции $y(\tau)$ не равно числу разбиений ядра m , поэтому рассмотрим различные варианты их соотношений отдельно.

Число разбиений функции $f(t)$, будет равно $n + m - 1$, т. к. только при пересечении функции $y(\tau)$ и ядра $K(t - \tau)$ интеграл не равен нулю. Подставляя (2.15) – (2.17) в (2.1) и заменяя нижний предел интегрирования на τ_i , а верхний – на τ_{i+1} , имеем для $i + 1$ -го момента времени:

$$1) n = m$$

$$f_{i+1} = \sum_{k=1}^i \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \sum_{l=0}^3 \left(\frac{a_{k,l}}{l!} (\tau - \tau_k)^l \sum_{j=0}^3 \frac{b_{m-i+k-1,j}}{j!} (\tau - \tau_k)^j \right) d\tau, \quad (2.18a)$$

при $i < n - 1$;

$$f_{i+1} = \sum_{k=i-m+2}^{n-1} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \sum_{l=0}^3 \left(\frac{a_{k,l}}{l!} (\tau - \tau_k)^l \sum_{j=0}^3 \frac{b_{m-i+k-1,j}}{j!} (\tau - \tau_k)^j \right) d\tau, \quad (2.18б)$$

при $i > n - 1$;

2) $n > m$

$$f_{i+1} = \sum_{k=1}^i \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \sum_{l=0}^3 \left(\frac{a_{k,l}}{l!} (\tau - \tau_k)^l \sum_{j=0}^3 \frac{b_{m-i+k-1,j}}{j!} (\tau - \tau_k)^j \right) d\tau, \quad (2.19a)$$

при $i < m - 1$;

$$f_{i+1} = \sum_{k=i-m+2}^i \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \sum_{l=0}^3 \left(\frac{a_{k,l}}{l!} (\tau - \tau_k)^l \sum_{j=0}^3 \frac{b_{m-i+k-1,j}}{j!} (\tau - \tau_k)^j \right) d\tau, \quad (2.19б)$$

при $m - 1 < i < n - 1$;

$$f_{i+1} = \sum_{k=i-m+2}^{n-1} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \sum_{l=0}^3 \left(\frac{a_{k,l}}{l!} (\tau - \tau_k)^l \sum_{j=0}^3 \frac{b_{m-i+k-1,j}}{j!} (\tau - \tau_k)^j \right) d\tau, \quad (2.19в)$$

при $i > n - 1$;

3) $n < m$

$$f_{i+1} = \sum_{k=1}^i \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \sum_{l=0}^3 \left(\frac{a_{k,l}}{l!} (\tau - \tau_k)^l \sum_{j=0}^3 \frac{b_{m-i+k-1,j}}{j!} (\tau - \tau_k)^j \right) d\tau, \quad (2.20a)$$

при $i < n - 1$;

$$f_{i+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \sum_{l=0}^3 \left(\frac{a_{k,l}}{l!} (\tau - \tau_k)^l \sum_{j=0}^3 \frac{b_{m-i+k-1,j}}{j!} (\tau - \tau_k)^j \right) d\tau, \quad (2.20б)$$

при $n - 1 < i < m - 1$;

$$f_{i+1} = \sum_{k=i-m+2}^{n-1} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \sum_{l=0}^3 \left(\frac{a_{k,l}}{l!} (\tau - \tau_k)^l \sum_{j=0}^3 \frac{b_{m-i+k-1,j}}{j!} (\tau - \tau_k)^j \right) d\tau, \quad (2.20B)$$

при $i > m - 1$.

Рассмотрим интеграл от произведения сплайнов, который стоит под знаком суммы по k . Обозначим его через I_k . Обозначим через r коэффициенты разложения сплайн-функции ядра $r = m - i + k - 1$, интеграл I_k имеет вид:

$$I_k = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \sum_{l=0}^3 \left(\frac{a_{k,l}}{l!} (\tau - \tau_k)^l \sum_{j=0}^3 \frac{b_{r,j}}{j!} (\tau - \tau_k)^j \right) d\tau. \quad (2.21)$$

Вынесем коэффициенты $a_{k,l}$ за знак интеграла и рассмотрим интеграл вида:

$$Q_1 = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau - \tau_k)^l \sum_{j=0}^3 \frac{b_{r,j}}{j!} (\tau - \tau_k)^j d\tau, \quad (2.22)$$

Поскольку шаг дискретизации $h = \tau_{k+1} - \tau_k$ одинаковый, то для интеграла Q_1 имеем:

$$Q_1 = \sum_{l=0}^3 \frac{b_{r,l}}{l!} \frac{h^{l+1+i}}{l+1+i}, \quad (2.23)$$

где $r = m - i + k - 1$; $l = \overline{0,3}$; $i = \overline{1, n + m - 1}$; $k = \overline{1, l}$.

Подставив (2.23) в (2.21), получим выражение для нахождения интеграла:

$$I_k = \sum_{l=0}^3 \frac{a_{k,l}}{l!} Q_1 = \sum_{l=0}^3 \frac{a_{k,l}}{l!} \sum_{j=0}^3 \frac{b_{r,j}}{j!} \frac{h^{j+1+i}}{j+1+i}, \quad (2.24)$$

Найденный интеграл I_k подставляем в формулы (2.18)–(2.20) и получаем следующий результат:

1) $n = m$

$$f_{i+1} = \sum_{k=1}^i \sum_{l=0}^3 \frac{a_{k,l}}{l!} \sum_{j=0}^3 \frac{b_{m-i+k-1,j}}{j!} \frac{h^{j+1+i}}{j+1+i}, \quad (2.24a)$$

при $i < n - 1$;

$$f_{i+1} = \sum_{k=i-m+2}^{n-1} \sum_{l=0}^3 \frac{a_{k,l}}{l!} \sum_{j=0}^3 \frac{b_{m-i+k-1,j}}{j!} \frac{h^{j+1+i}}{j+1+i}, \quad (2.24b)$$

при $i < n - 1$;

2) $n > m$

$$f_{i+1} = \sum_{k=1}^i \sum_{l=0}^3 \frac{a_{k,l}}{l!} \sum_{j=0}^3 \frac{b_{m-i+k-1,j}}{j!} \frac{h^{j+1+i}}{j+1+i} \quad (2.25a)$$

при $i < m - 1$;

$$f_{i+1} = \sum_{k=i-m+2}^i \sum_{l=0}^3 \frac{a_{k,l}}{l!} \sum_{j=0}^3 \frac{b_{m-i+k-1,j}}{j!} \frac{h^{j+1+i}}{j+1+i}, \quad (2.25b)$$

при $m - 1 < i < n - 1$;

$$f_{i+1} = \sum_{k=i-m+2}^{n-1} \sum_{l=0}^3 \frac{a_{k,l}}{l!} \sum_{j=0}^3 \frac{b_{m-i+k-1,j}}{j!} \frac{h^{j+1+i}}{j+1+i}, \quad (2.25b)$$

при $i > n - 1$;

3) $n < m$

$$f_{i+1} = \sum_{k=1}^i \sum_{l=0}^3 \frac{a_{k,l}}{l!} \sum_{j=0}^3 \frac{b_{m-i+k-1,j}}{j!} \frac{h^{j+1+i}}{j+1+i} \quad (2.26a)$$

при $i < n - 1$;

$$f_{i+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=0}^3 \frac{a_{k,l}}{l!} \sum_{j=0}^3 \frac{b_{m-i+k-1,j}}{j!} \frac{h^{j+1+i}}{j+1+i}, \quad (2.26b)$$

при $n - 1 < i < m - 1$;

$$f_{i+1} = \sum_{k=i-m+2}^{n-1} \sum_{l=0}^3 \frac{a_{k,l}}{l!} \sum_{j=0}^3 \frac{b_{m-i+k-1,j}}{j!} \frac{h^{j+1+i}}{j+1+i}, \quad (2.26B)$$

при $i > m - 1$.

Формулы (2.24)–(2.26) составляют основу алгоритма нахождения функции $f(t)$. Для упрощения записи в формулах (2.24)–(2.26) сумму по j обозначим через K_1 :

$$K_1 = \sum_{j=0}^3 \frac{b_{m-i+k-1,j}}{j!} \quad (2.27)$$

Подставим (2.27) в (2.24) и получим:

$$f_{i+1} = \sum_{k=1}^i \sum_{l=0}^3 \frac{a_{k,l}}{l!} K_1, \quad (2.28a)$$

при $i < n - 1$;

$$f_{i+1} = \sum_{k=i-m+2}^{n-1} \sum_{l=0}^3 \frac{a_{k,l}}{l!} K_1 \quad (2.28b)$$

при $i > n - 1$.

Аналогичные соотношения получаются из (2.25) и (2.26).

Рассмотрим теперь обратную задачу, т. е. найдем функцию $y(t)$. Для этого воспользуемся формулами, которые были выведены ранее, например, формулами (2.24) и (2.28). Нам известны функция $f(t)$ и ядро $K(t - \tau)$, точнее коэффициенты их разложения в сплайн. Для нахождения $y(t)$ фактически требуется найти коэффициенты $a_{i,j}$. С каждым узлом связаны 4 коэффициента, т.е. для их нахождения требуется 4 уравнения. Для их составления разобьем каждый i -тый интервал на 4 подотрезка и по формуле (2.28) подсчитаем значение интеграла в каждом новом узле. Количество узлов на i -ом интервале равно 5.

Запишем систему уравнений для первого интервала. Вместо K_1 , используемого в (2.28) будем писать $K_{q,1}$

$$K_{q,1} = \sum_{j=0}^3 \frac{b_{m-1,j} (qh_1)^{j+1+i}}{j! (j+1+i)}, \quad (2.29)$$

где $h_1 = \frac{h}{4}$. Здесь в зависимости от подузла, в котором находим значение интеграла, шаг h домножается на номер подынтервала q , соответствующий данному подузлу, $q = \overline{1,5}$. Индекс при коэффициентах $b_{i,j}$ равен $m - 1$, так как каждый раз берем наложение $m - 1$ интервала ядра и i - того интервала функции $y(t)$. Система уравнений для 1-ого интервала имеет вид:

$$\begin{cases} a_{1,0}K_{1,0} + a_{1,1}K_{1,1} + \frac{a_{1,2}}{2!}K_{1,2} + \frac{a_{1,3}}{3!}K_{1,3} = f_{1,2}, \\ a_{1,0}K_{2,0} + a_{1,1}K_{2,1} + \frac{a_{1,2}}{2!}K_{2,2} + \frac{a_{1,3}}{3!}K_{2,3} = f_{1,3}, \\ a_{1,0}K_{3,0} + a_{1,1}K_{3,1} + \frac{a_{1,2}}{2!}K_{3,2} + \frac{a_{1,3}}{3!}K_{3,3} = f_{1,4}, \\ a_{1,0}K_{4,0} + a_{1,1}K_{4,1} + \frac{a_{1,2}}{2!}K_{4,2} + \frac{a_{1,3}}{3!}K_{4,3} = f_{1,5}. \end{cases} \quad (2.30)$$

Запишем (2.30) в матричном виде:

$$KA_1 = F_1, \quad (2.31)$$

где

$$K = \begin{bmatrix} K_{1,0} & K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} \\ K_{2,0} & K_{2,1} & K_{2,2} & K_{2,3} \\ K_{3,0} & K_{3,1} & K_{3,2} & K_{3,3} \\ K_{4,0} & K_{4,1} & K_{4,2} & K_{4,3} \end{bmatrix},$$

$$A_1 = (a_{1,0} a_{1,1} a_{1,2} a_{1,3})^T,$$

$$F_1 = (f_{1,2} f_{1,3} f_{1,4} f_{1,5})^T.$$

Матрица K и вектор F_1 известны. Решая систему (2.31), находим вектор A_1 – коэффициенты полиномиального разложения сплайнов для узла с номером I .

Составим систему уравнений для второго интервала. Для этого разобьем второй интервал на 4 подотрезка, новые узлы обозначим через $\tau_{2,j}$, $j = \overline{1,5}$, и найдем значения интеграла в этих узлах, начиная со второго.

Здесь нужно учитывать, что:

$$f_{2,j} = \sum_{l=0}^3 \frac{a_{k,l}}{l!} K_{q,l} + f_l,$$

т. е. интеграл на втором интервале равен сумме интегралов на первом интервале плюс интеграл на подынтервале с номером j . В соответствии с этим запишем систему:

$$\begin{cases} a_{2,0}K_{1,0} + a_{2,1}K_{1,1} + \frac{a_{2,2}}{2!}K_{1,2} + \frac{a_{2,3}}{3!}K_{1,3} = f_{2,2} - f_1, \\ a_{2,0}K_{2,0} + a_{2,1}K_{2,1} + \frac{a_{2,2}}{2!}K_{2,2} + \frac{a_{2,3}}{3!}K_{2,3} = f_{2,3} - f_1, \\ a_{2,0}K_{3,0} + a_{2,1}K_{3,1} + \frac{a_{2,2}}{2!}K_{3,2} + \frac{a_{2,3}}{3!}K_{3,3} = f_{2,4} - f_1, \\ a_{2,0}K_{4,0} + a_{2,1}K_{4,1} + \frac{a_{2,2}}{2!}K_{4,2} + \frac{a_{2,3}}{3!}K_{4,3} = f_{2,5} - f_1, \end{cases} \quad (2.32)$$

или в матричной форме:

$$KA_2 = F_2^1, \quad (2.33)$$

где K – та же матрица, что и в (2.31)

$$A_2 = (a_{2,0}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3})^T,$$

$$F_2^1 = F_2 - F_1,$$

$$F_2 = (F_{2,2}F_{2,3}F_{2,4}F_{2,5})^T.$$

Решая (2.33) относительно A_2 , получим коэффициенты разложения функции $y(t)$ для 2-го узла.

В общем виде для i -го интервала можно записать

$$KA_1 = F_1^{i-1}, \quad (2.34)$$

$$A_1 = (a_{1,0} a_{1,1} a_{1,2} a_{1,3})^T,$$

$$F_2^{i-1} = F_1 - F_{i-1},$$

$$F_1 = (F_{1,2} F_{1,3} F_{1,4} F_{1,5})^T.$$

Таким образом, для нахождения коэффициентов сплайнов функции $y(t)$ необходимо на каждом интервале решать систему четырех уравнений с одинаковой матрицей, но с разными правыми частями. Аналогичным образом могут быть найдены и коэффициенты разложения в сплайн ядра уравнения $K(t - \tau)$.

Проведенный тестовый расчет для функции $f(t) = \sin t$ и ядра $K(t - \tau) = 1$ на интервале $[0, \pi]$ показал, что при $N = 11$ функция $y(t)$, рассчитанная по найденным коэффициентам сплайна, отличается от функции $\cos t$ на величину не более $1,5 \cdot 10^{-3}$. Это свидетельствует о работоспособности предложенного метода решения уравнения Вольтерра I рода.

2.3 Решение интегральных уравнений Фредгольма I рода

В отличие от уравнения Вольтерра I рода в уравнении Фредгольма верхний предел интегрирования постоянный и не зависит от аргумента.

Данная задача является классической некорректной задачей и ее решение проводят различными методами регуляризации. Наиболее распространен метод регуляризации А.Н. Тихонова [1]. Одна из основных проблем в этом методе – это выбор параметра регуляризации α . Чаще всего выбор величины α какой-либо дополнительной информации. Наиболее распространен обобщенный принцип навязки, в котором критерием выбора α является минимум суммарной погрешности, возникающей за счет исходных данных, неточного задания ядра и погрешности вычислений. Широко используется также модифицированный принцип обобщенной навязки и методов.

Предложенный А.В. Морозовым [1]. Несколько реже использует способ решения модельных примеров (способ вычислительного эксперимента).

В методе регуляризации М.М. Лаврентьева уравнение первого рода превращают в уравнение второго рода добавлением в левую часть слагаемого, пропорционального искомой функции. Здесь, как и в методе Тихонова, важен способ выбора коэффициента пропорциональности α .

В отличие от предыдущих, в методе квазирешений В.К. Иванова [3] принципиальным отличием является введение некоторого компакта M , которому принадлежит точное решение. Вариационная задача в методе Иванова несколько сложнее, чем в методах Тихонова и Лаврентьева, однако на практике ее решение оказывается проще, поскольку не стоит задача выбора параметра α .

Существуют и другие подходы к регуляризации – Бакушинского, Фридмана, статистической регуляризации и т. д. [1], которые используются значительно реже.

Численная реализация упомянутых методов решения может быть самой разной. Очень широко используют метод квадратур, методы конечно-шаговой аппроксимации и проекционного типа, метод собственных функций [1].

В отношении вышеперечисленных методов сделаем одно важное замечание. В основном эти методы применяются для решения электродинамических задач в частотной области. При переходе во временную область возникают дополнительные трудности, которые связаны с учетом «запаздывающего времени» и приводят к резкому росту размерности решаемой задачи. Поэтому более эффективными оказываются другие методы. Чаще всего для решения обратных задач во временной области используют метод моментов [133]. Суть метода проще показывать на примере линейного излучателя. Рассматривается уравнение вида:

$$\int_{-1}^1 y(x_1, t_1) K(x, x_1) dx_1 = f(x, t),$$

$$t_1(x, x_1, t) = t - \frac{|x - x_1|}{c}. \quad (2.35)$$

Это уравнение аппроксимируется дискретной последовательностью отсчетов. Связь между соседними отсчетами задается некоторой интерполяционной функцией. Устанавливая связь между левой и правой частями уравнения, можно получить систему линейных уравнений относительно неизвестных отсчетов функции y . Сама функция y аппроксимируется в виде пространственно-временного импульса:

$$y(x_1, t_1) = \sum_{i_1=1}^N \sum_{j_1=1}^J U_{i_1 j_1} A_{i_1 j_1}, \quad (2.36)$$

где

$$U_{i_1 j_1} = 1 \text{ при } x_{i_1} - \frac{\Delta}{2} < x_1 < x_{i_1} + \frac{\Delta}{2},$$

$$t_{j_1} - \frac{\delta}{2} < t_1 < t_{j_1} + \frac{\delta}{2},$$

$$U_{i_1 j_1} = 0 \text{ – в остальных случаях,}$$

$$x_{i_1} = \Delta i_1, t_{j_1} = \delta j_1.$$

Далее производится поточечная подгонка пространственных и временных подсчетов:

$$\int_{-1}^1 \sum_{j_1=1}^N U_{i_1 j_1} A_{i_1 j_1} K(x, x_1) dx_1 =$$

$$= \sum_{i_1=1}^N \int_{(i_1 - \frac{1}{2})\Delta}^{(i_1 + \frac{1}{2})\Delta} \sum_{j_1=1}^J U(i_1, j_1) A(i_1, j_1) K(i\Delta, x_1) = f(x_i, t_j). \quad (2.37)$$

Между пространственным и временным шагом устанавливается связь $\Delta = c\sigma$ и тогда вид уравнения (2.37) упрощается:

$$f_{i,j} = \sum_{i_1=1}^N A_{i_1,j-|i-i_1|} \int_{(i_1-\frac{1}{2})\Delta}^{(i_1+\frac{1}{2})\Delta} K(i\Delta, x_1) d x_1. \quad (2.38)$$

Величину под знаком интеграла называют коэффициентом взаимодействия:

$$z_{i,i_1} = \int_{(i_1-\frac{1}{2})\Delta}^{(i_1+\frac{1}{2})\Delta} K(i\Delta, x_1) d x_1,$$

и вместо (2.38) записывают:

$$f_{i,j} = \sum_{i_1=1}^N z_{i,i_1} A_{i_1,j} = z_{i,i} A_{i,j} + z_{i,i-1} A_{i-1,j-1} + z_{i,i-2} A_{i-2,j-2} + \dots \quad (2.39)$$

$$+ z_{i,1} A_{1,j-i+1} + z_{i,i+1} A_{i+1,j-1} + z_{i,i+2} A_{i+2,j-2} + \dots + z_{i,N} A_{N,j-N+1}.$$

В этом соотношении первый член соответствует временному шагу с номером j . А все остальные – предшествующим шагам $j-1, j-2$ и т. д. Решая уравнение (2.39) относительно $A_{i,j}$, получают:

$$A_{i,j} = \frac{f_{i,j} - \sum_{i_1=1}^N z_{i,i_1} A_{i_1,j} - |i-i_1|}{z_{i,i}}, \quad (2.40)$$

где суммирование не включает член с $i_1 = i$.

Уравнение (2.40) позволяет найти неизвестные значения $A_{i,j}$ по ранее вычисленным значениям $A_{i,j-1} A_{i,j-2}$ и т. д. и текущим значениям функции $f_{i,j}$. Самое большое преимущество этого метода состоит в том, что решение исходного уравнения (2.35) находится без обращения матриц. Поэтому этот метод и набирается для решения задачи нахождения тока по облучателю.

В работе [15] представлены соотношения для более сложных пространственно-временных базисных функций и примеры решения задач рассеяния несинусоидальных волн на сложных геометрических поверхностях.

Проведенные тестовые расчеты показали, что использование данного метода дает результаты, совпадающие с результатами из работы [13].

2.4 Метод кубического сплайна

2.4.1 Построение кубического сплайна

Пусть на $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$. Введем сетку

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_N = b$$

и обозначим $f_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, N$.

Сплайном, соответствующим данной функции $f(x)$ и данным узлам $\{x_i\}_{i=0}^N$, называется функция $s(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

а) на каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, N$, функция $s(x)$ является многочленом третьей степени;

б) функция $s(x)$, а также ее первая и вторая производные непрерывны на $[a, b]$;

в) $s(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, N$.

Последнее условие называется условием интерполирования, а сплайн, определяемый условиями а) – в), называется также интерполяционным кубическим сплайном.

Докажем существование и единственность сплайна, определяемого перечисленными условиями. Приведенное ниже доказательство содержит также способ построения сплайна.

На каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, N$, будем искать функцию $s(x) = s_i(x)$ в виде многочлена третьей степени:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3 \quad (2.41)$$

$$x_{i-1} \leq x \leq x_i, i = 1, 2, \dots, N,$$

где a_i, b_i, c_i, d_i – коэффициенты, подлежащие определению.

Поясним смысл введенных коэффициентов. Имеем

$$s'_i(x) = b_i + c_i(x - x_i) + \frac{d_i}{2}(x - x_i)^2,$$

$$s''_i(x) = c_i + d_i(x - x_i), s'''_i(x) = d_i,$$

поэтому

$$a_i = s_i(x_i), b_i = s'_i(x_i), c_i = s''_i(x_i), d_i = s'''_i(x_i).$$

Из условий интерполирования $s(x_i) = f(x_i), i = 1, 2, \dots, N$, получаем:

$$a_i = f(x_i), i = 1, 2, \dots, N.$$

Доопределим, кроме того, $a_0 = f(x_0)$.

Далее, требование непрерывности функции $s(x)$ приводит к условиям

$$s_i = s_{i+1}(x_i), i = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Отсюда, учитывая выражения для функций $s_i(x)$, получаем при $i = 0, 1, \dots, N - 1$ уравнения

$$a_i = a_{i+1} + b_{i+1}(x_i - x_{i+1}) + \frac{c_{i+1}}{2}(x_i - x_{i+1})^2 + \frac{d_{i+1}}{6}(x_i - x_{i+1})^3.$$

Обозначая $h_i = x_i - x_{i-1}$, перепишем эти уравнения в виде:

$$h_i b_i - \frac{h_i^2}{2} c_i + \frac{h_i^3}{6} d_i = f_i - f_{i-1}, i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.42)$$

Условия непрерывности первой производной:

$$s'_i(x_i) = s'_{i+1}(x_i), i = 1, 2, \dots, N - 1,$$

приводят к уравнениям

$$c_i h_i - \frac{d_i}{2} h_i^2 = b_i - b_{i-1}, i = 2, 3, \dots, N. \quad (2.43)$$

Из условия непрерывности второй производной получаем уравнения:

$$d_i h_i = c_i - c_{i-1}, i = 2, 3, \dots, N. \quad (2.44)$$

Объединяя (2.42)–(2.44), получим систему $3N-2$ уравнений относительно $3N$ неизвестных $b_i, c_i, d_i, i = 1, 2, \dots, N$.

Два недостающих уравнения получают, задавая те или иные граничные условия для $s(x)$. Предположим, например, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям $f''(a) = f''(b) = 0$. Тогда естественно требовать, чтобы

$$s''(a) = s''(b) = 0.$$

Отсюда получаем $s_1''(x_0), s_N''(x_N) = 0$, т. е. $c_1 - d_1 h_1 = 0, c_N = 0$.

Заметим, что условие $c_1 - d_1 h_1 = 0$ совпадает с уравнением (2.44) при $i = 1$, если положить $c_0 = 0$. Таким образом, приходим к замкнутой системе уравнений для определения коэффициентов кубического сплайна:

$$h_i d_i = c_i - c_{i-1}, i = 1, 2, \dots, N, c_0 = c_N = 0, \quad (2.45)$$

$$h_i c_i - \frac{h_i^2}{2} d_i = b_i - b_{i-1}, i = 2, 3, \dots, N, \quad (2.46)$$

$$h_i b_i - \frac{h_i^2}{2} c_i + \frac{h_i^3}{6} d_i = f_i - f_{i-1}, i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.47)$$

Убедимся в том, что эта система имеет единственно решение. Исключим из (2.45)–(2.47) переменные $b_i, d_i, i = 1, 2, \dots, N - 1$, и получим систему, содержащую только $c_i, i = 1, 2, \dots, N - 1$. Для этого рассмотрим два соседних уравнения (2.47):

$$b_i = \frac{h_i}{2} c_i - \frac{h_i^2}{6} d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i},$$

$$b_{i-1} = \frac{h_{i-1}}{2} c_{i-1} - \frac{h_{i-1}^2}{6} d_{i-1} + \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}$$

и вычтем второе уравнение из первого. Тогда получим

$$b_i - b_{i-1} = \frac{1}{2}(h_i c_i - h_{i-1} c_{i-1}) - \frac{1}{6}(h_i^2 d_i - h_{i-1}^2 d_{i-1}) + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}.$$

Подставляя найденное выражение для $b_i - b_{i-1}$ в правую часть уравнения (6), получим:

$$h_i c_i + h_{i-1} c_{i-1} - \frac{h_{i-1}^2}{3} d_{i-1} - \frac{2h_i^2}{3} d_i = 2 \left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}} \right). \quad (2.48)$$

Далее, из уравнения (2.45) получаем:

$$h_i^2 d_i = h_i (c_i - c_{i-1}), \quad h_{i-1}^2 d_{i-1} = h_{i-1} (c_{i-1} - c_{i-2})$$

и, подставляя эти выражения в (2.48), приходим к уравнению:

$$h_{i-1} c_{i-2} + 2(h_{i-1} + h_i) c_{i-1} + h_i c_i = 6 \left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}} \right).$$

Окончательно для определения коэффициентов c_i получаем систему уравнений:

$$h_{i-1} c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1}) c_i + h_{i+1} c_{i+1} = 6 \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} \right). \quad (2.49)$$

$$i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad c_0 = c_N = 0.$$

В силу диагонального преобладания система (2.49) имеет единственное решение. Так как матрица системы трехдиагональная, решение легко найти методом прогонки, которая в данном случае устойчива. По найденным коэффициентам c_i коэффициенты b_i и d_i определяются с помощью явных формул:

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}, \quad b_i = \frac{h_i}{2} d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \quad (2.50)$$

Таким образом, доказано, что существует единственный кубический сплайн, определяемый условиями а)–в) и граничными условиями $s''(a) = s''(b) = 0$. Заметим, что можно рассматривать и другие граничные условия.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения выпускной квалификационной работы был выполнен анализ предметной области, изучен вопрос классификации интегральных уравнений с методами и способами решения интегральных уравнений. Также рассмотрены виды сплайнов и способы их построения.

На основе рассмотренных методов был выбран метод сплайнов и разработан способ решения. Таким образом, цели, поставленные в ВКР были достигнуты, задачи решены.

Перспективы. Дальнейшее развитие данной работы будет нацелена на разработку алгоритма программы и выполнение программной реализации.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Верлань, А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков, – Киев: Наукова думка, – 1986. – 542 с.
- 2 Апарцин, А.С. Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода / А.С. Апарцин // Дифференциальные и интегральные уравнения. – 1972. – Вып. 1. – С. 248–258.
- 3 Иванов, В.И. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В.И. Иванов, В.П. Танана. – Москва: Наука. – 1978. – 221 с.
- 4 Стечкин, С.Б. Сплайны в вычислительной математике / С.Б. Стечкин, Ю.И. Субботин. – Москва: Наука. – 1976. – 248 с.
- 5 Гребенников, А.И. Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений / А.И. Гребенников. – Москва: МГУ. – 1983. – 206 с.
- 6 Морозов, В.А. Теория сплайнов и задача устойчивого вычисления значений неограниченных операторов / В.А. Морозов // ЖВМ и МФ. – 1971. – т. II. – С. 545–548.
- 7 Крымский, В.В. Зоны формирования импульса несинусоидального поля / В.В. Крымский // Перспективы развития антенно-фидерной техники и вне элементной базы. – Суздаль. – 1992. – С. 74–75.
- 8 Крымский, В.В. Приемные антенны несинусоидальных волн / В.В. Крымский // Перспективы развития антенно-фидерной и ее 3 элементной базы. – Суздаль. – 1992. – С. 76–77.
- 9 Крымский, В.В. Передающие антенны несинусоидальных волн / В.В. Крымский // Перспективы развития антенно-фидерной техники и ее элементной базы. – Суздаль. – 1992. – С. 78.
- 10 Крымский, В.В. Сверхширокополосные логарифмические спиральные антенны / В.В. Крымский // Перспективы развития антенно-фидерной техники и элементной базы. – Суздаль. – 1992. – С. 79–80.

11 Krymscy, V.V. Antenna for Reciving Pulse Disturbances. Electromagnetic Compartibility, Eleventh Int. Sump.on El ectromagneti c Comparti bility / V.V. Krymscy. – Wroclaw. – 1990. – P. 249–250.

12 Миллер, Э.К. Прямые временные методы расчета излучения и рассеяния волн проводами в неустановившемся режиме / Э.К. Миллер, Дж.Э. Ландт // ТИИЭР. – Том 68. – № II. – 1980. – С. 44–75.

13 Численные методы теории дифракции: Сборник статей. Пер.с англ.- М:Мир, – 1982. – 200 с.

14 Отчет по НИР «Гидрант-МВО» – Челябинск. – ЧПИ. – 1980. – 85 с.

15 Крылов, В.В Известия ВУЗОВ Радиоэлектроника / В.В Крылов, И.П. Ковалев, В.Н. Жаворонков. – 1988. – вып. №11. – С. 34–35.

16 Василенко, В.А. Теория сплайн-функций / В.А. Василенко – Новосиб. гос. ун-т. – 1978. – 234 с.

17 Бессонов, Л.А Теоретические основы электротехники: Электромагнитное поле / Л.А. Бессонов. – Москва: Высшая школа. – 1978. – 231с.

18 Крымский, В.В. Оценка электромагнитной совместимости антенн / В.В Крымский, Е.В. Шафранов – М: Наука. – 1988. – 221 с.

19 Де Бор, К. Практическое руководство по сплайнам: Пер. с англ. / К. Де Бор. – Москва: Радио и связь. – 1985. – 304 с.

20 Рычков, А.Д. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем: Учеб. пособие. / А.Д. Рычков – Новосибирск: Изд-во НГТУ. – 2000. – 29 с.