УДК 624.042.8:534.1

ПОСТРОЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ

А.Н. Потапов

Приведены условия обобщённой ортогональности форм собственных колебаний упругой диссипативной системы, для которых традиционные классические условия ортогональности являются частным случаем. В рамках теории временного анализа дан алгоритм построения форм собственных колебаний упругопластической системы на основе использования схематизированной диаграммы деформирования с упрочнением. Согласно условию невырожденного состояния упругопластической диссипативной системы, каждому квазилинейному интервалу соответствуют локальные пластические зоны, характеризуемые размерами, количеством зон и их расположением на расчётной схеме сооружения. Так как внутри интервалов параметры пластических зон неизменны, то условия обобщённой ортогональности собственных форм колебаний упругопластической системы выполняются по аналогии с формами колебаний упругой диссипативной системы. Проведён анализ собственных колебаний шарнирной балки с тремя степенями свободы с учётом локальных пластических зон с различной длиной и различным расположением зон в узлах.

Ключевые слова: упругопластическая система, собственная форма, колебание, пластическая зона, ортогональность, матрица жёсткости.

1. Вводная часть. Современные конструкции работают в условиях сложных динамических воздействий, когда наибольшие напряжения в основных несущих элементах зачастую превышают величину предела упругости. Текучесть волокон приводит к пластическим зонам, оказывающим сильное влияние на работу конструкций. Заметный интерес к этим зонам проявляется со стороны специалистов в области сейсмостойкого строительства [1–4].

Появление пластических зон приводит к изменению жесткостных параметров системы, а следовательно, к изменению её внутренних динамических характеристик. Анализ фактов обзора работ, посвящённых изучению влияния зон текучести на изменения собственных характеристик конструкций и их элементов, говорит о крайне ничтожном числе публикаций в этом направлении [5, 6].

Исследование частотно-демпфированных характеристик и форм собственных колебаний каркасного здания при упругопластическом анализе на основе диаграммы Прандтля проводилось в работах автора [7, 8]. В на-

стоящей статье изучается влияние локальных зон пластичности, их размеров и мест расположений в расчётной схеме дискретной диссипативной системы (ДДС) на её параметры собственных колебаний.

2. Основные соотношения. Формы собственных колебаний системы определяются её деформированным состоянием, вызванным действием инерционных и диссипативных сил. В линейно-деформируемой системе собственные формы неизменны в процессе колебаний, поэтому их конфигурация не зависит от времени. Это проявляется в фундаментальном свойстве: отношение двух любых ординат k-й собственной формы P_k есть постоянная величина: p_{jk} / p_{ik} = const. Кроме того, для любой пары собственных форм P_k, P_j $(k \neq j)$ выполняются свойства ортогональности [9]:

$$P_j^{\mathrm{T}} M P_k = 0, \qquad P_j^{\mathrm{T}} K P_k = 0 \tag{1}$$

$$(k, j = 1, \dots, n;\ k \neq j),$$

где $M = \mathrm{diag}\,(m_1, \dots, m_n)$, $K = K^{\mathrm{T}}$ – матрицы масс и жесткости.

Условия ортогональности (1) справедливы для консервативных систем. Однако они выполняются и для ДДС с моделью пропорционального (однородного) демпфирования; в этом случае к этим условиям добавляется ещё условие ортогональности, включающее матрицу демпфирования C:

$$P_l^{\mathrm{T}} C P_k = 0 \ (k \neq l). \tag{2}$$

Наличие условий (1), (2) является следствием разделения в нормальных координатах всех трёх сил: инерции, упругости и демпфирования.

В общем случае диссипативных конструкций с произвольной матрицей демпфирования уравнения движения к нормальным координатам привести нельзя, поэтому построение соотношений ортогональности встречает значительные затруднения [10].

3. Обобщенная ортогональность собственных форм упругой ДДС. В задаче упругих колебаний ДДС с произвольной симметрической матрицей демпфирования C получены соотношения обобщённой ортогональности собственных форм (3) и диагональной формы (4) для уравнения движения собственных форм в виде матричных уравнений [8]:

$$\Lambda P^{\mathrm{T}} M P + P^{\mathrm{T}} M P \Lambda + P^{\mathrm{T}} C P = E, \tag{3}$$

$$\Lambda P^{\mathrm{T}} M P \Lambda - P^{\mathrm{T}} K P = \Lambda, \tag{4}$$

где $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – диагональная матрица спектральных характеристик; $P = [P_1, \dots, P_n]$ – матрица форм собственных колебаний.

Каждому вектору P_k, определяющему k-ю собственную форму демпфированных колебаний, соответствует характеристическое комплексное число $\lambda_k = -\varepsilon_k + i\omega_k$, содержащее в вещественной части коэффициент демпфирования – ε_k и в мнимой – частоту собственных колебаний – ω_k.

В отличие от традиционных условий ортогональности (1), (2) соотношение обобщенной ортогональности матрицы P (3) содержит связанные между собой матрицы M, C и диагональную форму Λ.

Из (3), (4) следует система скалярных уравнений:

$$P_j^{\mathrm{T}}[M(\lambda_j + \lambda_k) + C]P_k = 0 \ (k \neq j), \tag{5}$$

$$P_j^{\mathrm{T}}[M\lambda_j\lambda_k - K]P_k = 0 \ (k \neq j), \tag{6}$$

$$P_k^{\mathrm{T}}[2M\lambda_k + C]P_k = 1 \ (k = j;\ k, j = 1, \ldots, n). \tag{7}$$

Каждая из систем уравнений (5) и (6) выражает $n(n–1)$ условий обобщенной ортогональности собственных форм P_k, P_j при $k \neq j$, а система уравнений (7) представляет n условий нормирования форм при $k = j$.

В случае консервативной системы ($C = 0$, $\varepsilon_j = \varepsilon_k = 0$) из (5), (6) ввиду $(\lambda_j + \lambda_k) = i(\omega_k + \omega_j) \neq 0$ и $\lambda_j \cdot \lambda_k = -\omega_k \cdot \omega_j \neq 0$ следуют формулы (1).

4. Обобщенная ортогональность форм колебаний упругопластической ДДС. При упругопластических колебаниях появление текучести в элементах конструкции сопровождается снижением параметров жесткости системы. Наличие зон пластических деформаций конструкции приводит к перераспределению внутренних усилий и напряжений и как следствие – к изменению конфигурации собственных форм. Поэтому отношение ординат p_{jk} и p_{ik} произвольной k-й собственной формы, взятое в различные моменты времени, уже не будет постоянной величиной: $p_{jk} / p_{ik} \neq \mathrm{const}$.

На рис. 1 показан фрагмент расчётной динамической модели (для определённости – стержневой), где в окрестности j-го узла развиваются пластические деформации с размерами локальных зон a_j и b_j (соответственно, слева и справа от узла) или в относительных величинах $\alpha_j = a_j / d$, $\beta_j = b_j / d$, где d – расстояние между соседними узлами. На границах пластической зоны величина напряжений соответствует пределу текучести $\sigma_{\text{т}}$. Согласно схематизированной диаграмме деформирования с упрочнением (рис. 2) в j-м узле нормальное напряжение $\sigma_{\max} > \sigma_{\text{т}}$ не должно превышать предел прочности $\sigma_{\text{в}}$, при котором происходит разрушение узла.

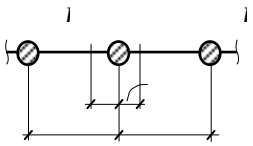

Рис. 1. Фрагмент РДМ с пластической зоной (a_i, b_i) в окрестности j-го узла

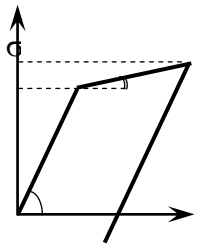

Рис. 2. Билинейная диаграмма «σ–ε»

В соответствии с математическими моделями колебаний [8, 11] строилась редукционная схема анализа упругопластической системы для диаграмм типа Прандтля и с упрочнением. Процесс вычисления неупругой реакции сводился к многократному вычислению реакции на i-х квазилинейных интервалах $t \in [t_i, t_{i+1}]$ ($i = 0, 1, 2, \ldots$), внутри которых параметры рас-

четной модели (элементы матриц жесткости $K(t_i)$ и демпфирования $C(t_i)$) оставались неизменными.

Каждому такому интервалу соответствует некоторая локальная пластическая зона (одна или несколько) с фиксированными параметрами. Любые изменения параметров происходят только на границах интервалов – в критических точках t_i, t_{i+1}, ... В результате анализ колебаний упругопластической системы сводится к последовательному ряду дискретно изменяющихся квазилинейных систем, реализуемых на интервалах по схеме упругого расчёта.

В [8] показано, что при невырожденном состоянии квазилинейной системы (при $\det K(t_i) > 0$) последнюю можно рассматривать как упругую систему, но только с пониженным частотным спектром. В этом случае для такой системы выполняются приведённые соотношения (3)–(7). В частности, условия ортогональности (3), (5), (7) принимают вид ($t \in [t_i, t_{i+1}]$):

$$\Lambda P^{\mathrm{T}} M P + P^{\mathrm{T}} M P \Lambda + P^{\mathrm{T}} C(t_i) P = E; \tag{8}$$

$$P_j^{\mathrm{T}}[M(\lambda_j + \lambda_k) + C(t_i)]P_k = 0 \quad (k \neq j), \tag{9}$$

$$P_k^{\mathrm{T}}[2M\lambda_k + C(t_i)]P_k = 1 \quad (k = j;\ k, j = 1, \dots, n). \tag{10}$$

Данные условия будут справедливыми только тогда, когда две произвольные собственные формы P_k, P_j ($k \neq j$) принадлежат одному и тому же квазилинейному интервалу $t \in [t_i, t_{i+1}]$ или, что одно и то же, *соответствуют пластическим зонам с одинаковыми параметрами относительно размеров, количества и места расположения зон*.

Пример. Рассмотрим задачу упругопластических колебаний шарнирной балки с тремя степенями свободы под динамическим воздействием. Параметры РДМ балки: двутавр № 70, сталь 09Г2, $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ МПа, жесткость балки $EJ = 2{,}83 \cdot 10^9$ кН·см^2, $d = 300$ см (рис. 3а). Массы равны $m_1 = m_3 = 0{,}5$ кН·с^2/м; $m_2 = 0{,}6$ кН·с^2/м. Характеристики прочности и деформативности материала балки: $\sigma_т = 305$ МПа, $\sigma_в = 440$ МПа, $\delta_т = \sigma_т / E = 0{,}00145$, $\delta_в = 0{,}21$.

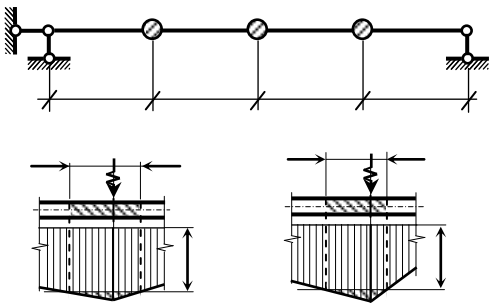

Рис. 3. РДМ балки (а); фрагменты эпюр изгибающих моментов для пластических зон в окрестности: б – узла 2; в – узла 3

В соответствии с моделью непропорционального демпфирования матрица демпфирования принимается в виде [8]:

$$C = (KT + TK)/2,$$

где $T = \gamma W_0^{-1}$, $W_0 = \mathrm{diag}(w_{01}, \dots, w_{0n})$, $w_{0i} = \sqrt{r_{ii} / m_i}$ (r_{ii}, m_i – диагональные элементы матриц K и M), $\gamma = \delta/\pi$, $\delta = 0{,}07$.

В упругопластическом режиме колебаний матрица жёсткости строилась с помощью матрицы податливости

$L(t_i) = K(t_i)^{-1}$. Её элементы перемещения $\delta_{kl}(t_i)$ имеют вид: $\delta_{kl}(t_i) = \delta_{kl} \cdot f_{kl}(t_i)$, где δ_{kl} – элементы матрицы податливости упругой системы; $f_{kl}(t_i)$ – поправочные функции, зависящие от размеров и расположения зон пластичности, от величины $\xi = E_0 / E$, где $E = \mathrm{tg}\,\varphi$, $E_0 = \mathrm{tg}\,\varphi_0$ (рис. 2). Для пластических зон в окрестности узла 2 ($\alpha = a_2/d$, $\beta = b_2/d$, рис. 3 *б*) функции $f_{kl}(t_i)$ принимают значения ($\xi = 0{,}003$; $v = (1/\xi - 1) = 332{,}33$):

$$f_{11} = 1 + v\cdot[\psi_1(\alpha) + \psi_2(\beta)]/36;\ \ f_{22} = 1 + v\cdot[\psi_2(\alpha) + \psi_2(\beta)]/16;$$

$$f_{12} = f_{21} = 1 + v\cdot[\psi_3(\alpha) + \psi_2(\beta)]/22;\ \ f_{33} = 1 + v\cdot[\psi_2(\alpha) + \psi_1(\beta)]/36;$$

$$f_{13} = f_{31} = 1 + v\cdot[\psi_3(\alpha) + \psi_3(\beta)]/28;\ \ f_{23} = f_{32} = 1 + v\cdot[\psi_2(\alpha) + \psi_3(\beta)]/22,$$

где $\psi_1(\gamma) = 12\gamma + 6\gamma^2 + \gamma^3$, $\psi_2(\gamma) = 12\gamma - 6\gamma^2 + \gamma^3$, $\psi_3(\gamma) = 12\gamma - \gamma^3$ ($\gamma = \alpha, \beta$).

Величина предельного момента M_0 на рис. 3 соответствует $\sigma_т$.

Для локальных пластических зон в окрестности узла 2 показаны формы собственных колебаний P_k ($k = 1, 2, 3$) (рис. 4). На рис. 5 приведена вторая форма для различных пластических зон в окрестности узлов 2 и 3.

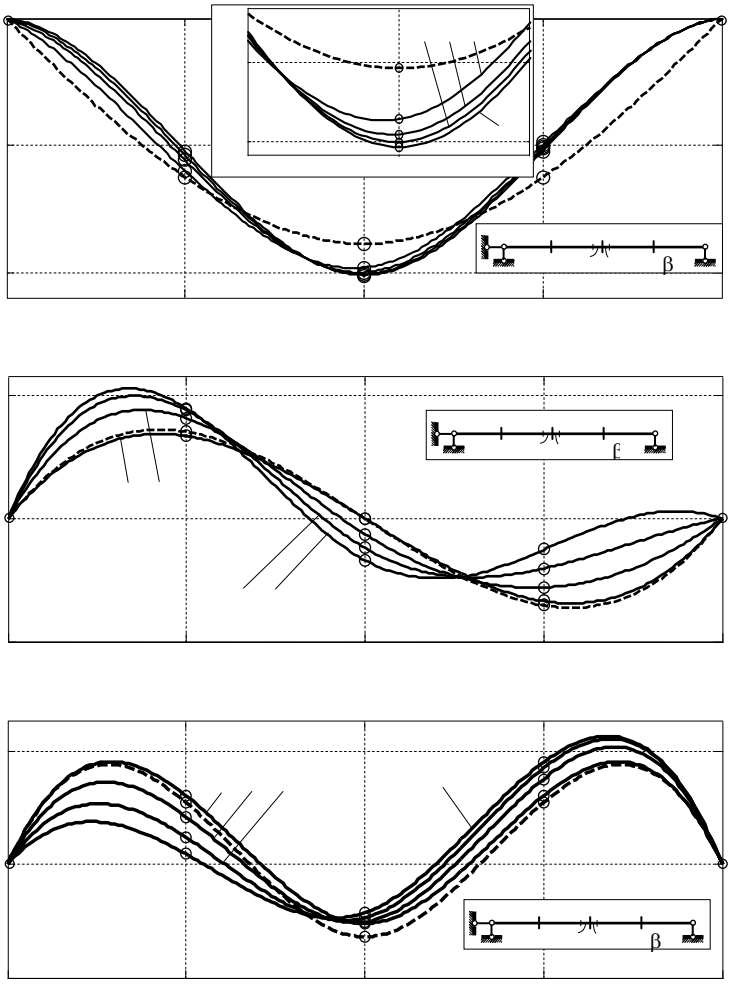

Рис. 4. 1-я (а), 2-я (б) и 3-я (в) собственные формы для зон текучести в узле 2 при α_2: 1 – 0,1; 2 – 0,2; 3 – 0,3; 4 – 0,5; ($\beta_2 = 0{,}1$)

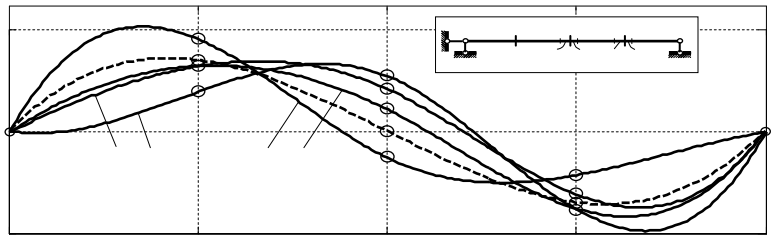

Рис. 5. 2-я собственная форма для зон текучести:
1 – α_2 = 0,3; β_2 = 0,1; 2 – α_3 = 0,002; β_3 = 0, 002;
3 – α_3 = 0,002; β_3 = 0,1; 4 – α_3 = 0,5; β_3 = 0,002

Из анализа рис. 4, 5 следует, что упругопластические собственные формы по конфигурации резко отличаются от соответствующих форм упругих колебаний, изображённых на рисунках пунктирной линией. Конфигурация упругопластических форм зависит от интенсивности развития пластических деформаций, влияющей на размеры (длину) пластических зон в опасном сечении (рис. 4); от количества участков с нелинейной работой материала; от их места расположения на расчётной модели (рис. 5).

В зонах текучести в отличие от упругих участков расчётной модели резко возрастают кривизны оси стержня, поэтому даже при небольших размерах пластических зон собственные формы могут значительно отличаться от соответствующих упругих форм. Так, длина 2-й формы (рис. 5, позиция 2), построенной при текучести в 3-м узле (рис. 3 *в*) для локальной пластической зоны 0,004*d*, составляет (0,004*d*/ 4*d*)100 % = 0,1 % пролёта балки l = 4*d*, т.е. 1/1000 часть пролёта. Сравнение данной формы с её «двойником» – собственной формой, полученной при текучести во 2-м узле (рис. 5, позиция 1) с длиной пластической зоны 0,4*d* (10 % пролёта балки), показывает их отличие по конфигурации не только от формы упругих колебаний (пунктир), но и существенное отличие друг от друга.

Заметим, что при нелинейном анализе конструкций численными методами шагового интегрирования динамическая реакция, как правило, строится с помощью первоначальных (т.е. упругих) форм недемпфированных колебаний. Это считается допустимым, «если неупругие деформации не приводят к большим изменениям характера их прогибов …» [9]. Однако на практике оценки влияния текучести на изменения перемещений обычно не проводятся. Поэтому возникает вопрос о корректности подходов, основанных на использовании упругих форм в нелинейном анализе.

Ниже показано выполнение условий ортогональности (3) для форм колебаний с пластической зоной во 2-м узле (рис. 4). Функции $f_{kl}(t_i)$ построены при: α_2 = 0,2; β_2 = 0,1. Значения матрицы демпфирования составили:

$$C = \begin{bmatrix} 0.0318 & -0.0228 & 0.00596 \\ -0.0228 & 0.0308 & -0.0281 \\ 0.00596 & -0.0281 & 0.0384 \end{bmatrix} \text{ (кН·с/см).}$$

Для матрицы собственных форм P и диагональной формы Λ будем иметь:

$$P = \begin{bmatrix} 0.431 & 0.819 & 0.420 + i0,39*10^{-2} \\ 0.803 & -0.127 + i0,12*10^{-2} & -.509 - i0,46*10^{-2} \\ 0.411 & -0.560 - i0,25*10^{-2} & 0.752 \end{bmatrix}, \ \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} (c^{-1}),$$

где $\lambda_1 = -0,006+i11,499$; $\lambda_2 = -2,905+i279,799$; $\lambda_3 = -6,677+i418,187$ (c^{-1}).

Для сравнения показаны λ_k, соответствующие упругому решению: $\lambda_1 = -0,171+i85,073$; $\lambda_2 = -3,081+i354,425$; $\lambda_3 = -12,321+i720,449$ (c^{-1}).

Вычисление левой части соотношения в (3) с помощью приведённых значений матриц M, C, P и Λ приводит к единичной матрице. Для внедиагональных элементов этой матрицы реализуются условия обобщённой ортогональности в скалярной форме (5). Диагональные элементы матрицы получены при нормировании матрицы форм P с помощью диагональной матрицы:

$$D = \begin{bmatrix} 1.9624 - i1.9626 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4215 - i0.4226 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3358 - i0.3386 \end{bmatrix},$$

обеспечивающей выполнение условий (7).

Выводы. Показано, что традиционные (классические) соотношения ортогональности форм собственных колебаний – частный случай более общих условий обобщённой ортогональности форм, справедливых для упругой диссипативной системы. Установлено, что собственные формы упругопластической системы на квазилинейном интервале, соответствующем одинаковым параметрам пластических зон, обладают свойством обобщённой ортогональности, которое определяется уравнениями, аналогичными уравнениям упругой диссипативной системы.

На примере собственных колебаний шарнирной балки показано, что формы упругопластической диссипативной системы по своим конфигурациям качественно отличаются друг от друга (при локальных пластических зонах, расположенных в различных узлах расчётной схемы), а также от конфигураций соответствующих упругих собственных форм.

Развитие предложенного подхода к построению собственных форм с учётом упругопластических деформаций открывает возможность создания более совершенных методов расчёта конструкций при нелинейных колебаниях.

Библиографический список

1. Килимник, Л.Ш. К разработке методики оценки предельных состояний многоэтажных каркасных зданий при сейсмических воздействиях / Л.Ш. Килимник // Тр. Центр. науч.-исслед. ин-та строит. конструкций им. В.А. Кучеренко.– 1975. – Вып. 44. – С. 66–82.

2. Соснин, А.В. Об особенностях методологии нелинейного статического анализа и его согласованности с базовой нормативной методикой расчета зданий и сооружений на действие сейсмических сил / А.В. Соснин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Строительство и архитектура». – 2016. – Т. 16, № 1. – С. 12–19. DOI: 10.14529/build160102.

3. Paulay T., Priestley M.J.N. Seismic Design of Reinforced Concrete and Masonry Buildings. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 1992. – 744 p.

4. Inel M., Ozmen H.B. Effects of Plastic Hinge Properties in Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Buildings // Engineering Structures. 2006. No. 28. Pp. 1494–1502.

5. Найда, А.А. Остаточные деформации импульсно нагруженных балок, допускающих большие прогибы в пределах упругости / А.А. Найда // Ученые записки ЦАГИ. – 1987. – Т. XVIII, № 5. – С. 106–112.

6. Витвицкий, Н.К. Вычисление частот собственных изгибных колебаний балок за пределом упругости при наличии пластических зон / Н.К. Витвицкий // Известия Томского ордена трудового красного знамени политехнического института им. С.М. Кирова. – 1967. – Т. 154. – С. 28–34.

7. Потапов, А.Н. Анализ внутренних динамических параметров конструкций при неупругих колебаниях / А.Н. Потапов // Известия вузов. Строительство. – 2000. – № 6. – С. 31–37.

8. Потапов, А.Н. Динамический анализ дискретных диссипативных систем при нестационарных воздействиях / А.Н. Потапов. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2003. – 167 с.

9. Клаф, Р. Динамика сооружений / Р. Клаф, Д.Ж. Пензиен. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.

10. Пашков, И.А. Об ортогональности собственных форм колебаний вязкоупругого тела / И.А. Пашков // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – № 4. – С. 104–111.

11. Потапов, А.Н. Построение математической модели физически нелинейных колебаний многоэтажного каркаса / А.Н. Потапов, Н.А. Зямбаев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Строительство и архитектура». – 2017. – Т. 17, № 3. – С. 12–17. DOI: 10.14529/build170302.

К содержанию