УДК 621.03 + 531.1

ЖИВАЯ МЕХАНИКА

В.Г. Некрутов, Р.Г. Закиров, П.С. Мальцев, Н.А. Дорофеев

Проведено исследование кинематических характеристик сложного движения точки и тела с использованием векторного представления координат и их линейного преобразования в системе Mathcad. Изложен алгоритм «оживления» полученного решения путем воссоздания виртуальной лаборатории, позволяющей совместить анализ полученного решения с его визуализацией, в том числе и анимационной.

Ключевые слова: векторное представление, сложное движение, траектории движения.

При решении задач механики часто оказывается целесообразным (а иногда и необходимым) рассматривать движение точки (или тела) одновременно по отношению к двум системам отсчета, из которых одна считается основной или условно неподвижной, а другая определенным образом движется по отношению к первой. Движение, совершаемое при этом точкой (или телом), называют сложным. Использование компьютерных технологий позволяет не только наглядно представить кинематику их движения, но и найти те формы исследования, которые дают возможность определять кинематические параметры движения точки и тела в любой момент времени, представить визуально как исследуемый объект, так и кинематику его движения [1].

Исследование кинематических параметров сложного движения рассмотрим на примере планетарной передачи, используя векторную форму представления кинематических параметров движения, а также матрицы преобразования декартовых координат. Планетарную передачу можно изобразить графически, задав: радиус сателлита 2 – r2, радиус солнечного колеса 3 – r3 и длину водила 1 – OA= r2+r3 (рис. 1). Для исследования кинематических параметров плоскопараллельного движения тел планетарной передачи с внешним зацеплением необходимо задать скорость вращения водила 1 – ω1z, а также выразить в векторной форме координаты и угловые скорости тел.

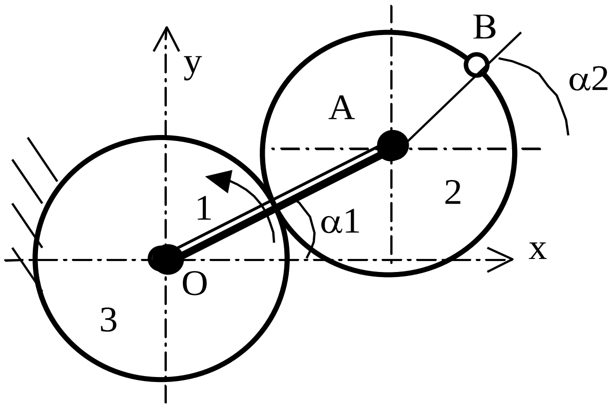

Рис. 1. Планетарная передача

Чтобы обрести навыки составления алгоритмов решения задач с использованием системы Mathcad [2, 3], алгоритм решения ниже выделен рамкой, поскольку его запись несколько отличается от обычно принятой, но позволяет успешно реализовать его в этой системе. Пусть задано:

$$r2 := 0.5 \qquad r3 := 3 \cdot r2 \qquad OA = l \qquad l := r3 + r2 \qquad \omega 1z := \frac{\pi}{2}$$

Зададим пределы и шаг изменения переменной времени – t:

$$t0 := 4 \qquad t := 0, 0.02 .. t0$$

Выразим угловые скорости водила и сателлита в векторной форме:

$$\omega 1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega 1z \end{pmatrix} \qquad \omega 2z := \omega 1z \cdot \left(1 + \frac{r3}{r2}\right) \qquad \omega 2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega 2z \end{pmatrix}$$

Углы поворота водила и сателлита вокруг собственных осей z1 и z:

$$\alpha(t) := \omega 1z \cdot t$$
$$\alpha 2(t) := \omega 2z \cdot t$$

Выразим в векторной форме радиус-векторы точек: A и B:

$$A(t) := l\cdot\begin{pmatrix}\cos(\alpha(t))\\ \sin(\alpha(t))\\ 0\end{pmatrix}\qquad AB(t) := r2\cdot\begin{pmatrix}\cos(\alpha 2(t))\\ \sin(\alpha 2(t))\\ 0\end{pmatrix}\qquad B(t) := A(t) + AB(t)$$

Если использовать векторную форму представления координат, то можно определять не только координаты, скорости и ускорения этих точек в любой момент времени, но также и осуществить визуализацию движения точек и тел, включая и анимационную, используя для реализации алгоритма решения систему Mathcad [3]. Если же представить на сателлите еще одну материальную точку М, находящуюся в относительном движении (в направлении АВ по каналу), то необходимо использовать матрицы линейного преобразования координат.

Методику составления матриц линейного преобразования координат, построение траекторий и визуализацию сложного движения точки рассмотрим на примере задачи (рис. 1), решаемой с использованием системы Mathcad. При составлении матрицы необходимо учитывать, что ее элементами являются направляющие косинусы между осями подвижной и неподвижной систем.

Если подвижная система вращается по отношению к неподвижной системе, матрица обратного преобразования координат являются функцией угла поворота сателлита вокруг собственной оси – $\alpha 2(t)$:

$$Mo1 = \begin{pmatrix}\cos(x1,x) & \cos(x1,y) & \cos(x1,z)\\ \cos(y1,x) & \cos(y1,y) & \cos(y1,z)\\ \cos(z1,x) & \cos(z1,y) & \cos(z1,z)\end{pmatrix}\qquad Mo1(t) := \begin{pmatrix}\cos(\alpha 2(t)) & -\sin(\alpha 2(t)) & 0\\ \sin(\alpha 2(t)) & \cos(\alpha 2(t)) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Если задать закон движения точки М относительно точки А по каналу, например, как функцию угловой скорости водила, то вектор АМ, представленный в векторной форме в подвижной системе координат как вектор АМ(t), с использованием матрицы обратного преобразования координат можно переопределить в вектор АМ1(t) в неподвижной системе координат, а, координаты точки М в неподвижной системе координат переопределятся в вектор М1(t):

$$AM = r2\cdot\cos\left(\frac{r3}{r2}\cdot\omega 1z\cdot t\right)\qquad AM(t) := r2\cdot\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{r3}{r2}\cdot\omega 1z\cdot t\right)\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\qquad \begin{array}{l}AM1(t) := Mo1(t)\cdot AM(t)\\ M1(t) := A(t) + AM1(t)\end{array}$$

Методику визуализации сложного движения точки и тела с использованием матриц линейного преобразования координат и с применением анимационной графики поясним на примере рассмотренной задачи. Алгоритм «оживления» сложного движения точки предполагает исполнение следующих этапов: создание траекторий движения, контуров точек и тел; создание в графическом редакторе системы Mathcad объектов в проекциях для их графического изображения; создание анимационного клипа.

Алгоритму создания анимационного клипа должен предшествовать алгоритм расчета кинематических параметров, в котором необходимо задать интервал исследования переменной – t. Затем необходимо задать число фрагментов графического изображения – Fra, а также фрагментную переменную времени t2=t0*FRAME/Fra. FRAME – это фрагментная переменная системы Mathcad, принимающая числовые значения от 0 до заданного числа фрагментов анимационного клипа [2, 3]. Поскольку координаты точки М в неподвижной системе отсчета уже найдены – M1(t), то для пофрагментного представления контура точки М нужно указать, что это координаты точки в этот момент времени t2, M2=M1(t2). Для создания контура прямой, соединяющей заданные точки, необходимо задать координаты начальной точки вектора и сам вектор, воспользовавшись переменной j, принимающей два значения 0 и 1. Так, например, контур водила: oA_j= A2*j, или контур паза: aB_j= A2 +AB(t2)*(2j–1). Аналогично создаются контуры неподвижного колеса и сателлита (алгоритм создания этих контуров выделен рамкой).

$$\mathbf{N} := 144 \qquad \mathbf{j} := 0..1 \qquad \mathbf{t2} := \frac{\mathbf{t0}}{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{FRAME}$$

Фрагментные контуры точек А, В и М: $\mathbf{A2} := \mathbf{A}(\mathbf{t2}) \quad \mathbf{B2} := \mathbf{B}(\mathbf{t2}) \quad \mathbf{M2} := \mathbf{M1}(\mathbf{t2})$

Контур катящегося колеса: $\mathbf{Kk}(\mathbf{t}) := \mathbf{A2} + \mathbf{AB}(\mathbf{t})$

Контур неподвижного колеса: $\mathbf{R3}(\mathbf{t}) := \mathbf{r3} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha(\mathbf{t})) \\ \sin(\alpha(\mathbf{t})) \\ 0 \end{pmatrix}$

Контур водила: $\mathbf{oA_j} := \mathbf{A2} \cdot \mathbf{j}$

Контур паза: $\mathbf{aB_j} := \mathbf{A2} + \mathbf{AB}(\mathbf{t2}) \cdot (2 \cdot \mathbf{j} - 1)$

Для построения траектории сложного движения точки достаточно вызвать двухмерный график графического редактора Mathcad и отложить по горизонтальной оси проекцию вектора – M1(t) с индексом 0, а по вертикальной оси – с индексом 1. Контур точки в конкретный момент времени – t1 можно показать, если на осях отложить $M2(t1)_0$ и $M2(t1)_1$. Аналогично обрисовываются контуры колес, водила и паза.

На рис. 2 представлены: траектории движения точек М и В, их контуры, а также контуры колес, водила и паза в фрагментный момент времени t2= 0,2 с, построенные в системе Mathcad.

Отметим, что движение, совершаемое точкой М по отношению к подвижной системе отсчета (к сателлиту и осям Oxyz), называется относительным движением. Траектория, описываемая точкой М в относительном движении, а также скорость и ускорение точки М по отношению к осям подвижной системы отсчета Oxyz называются относительными и обозначаются Vr и Ar. Движение, совершаемое подвижной системой отсчета

Oxyz (и всеми точками тела, связанными с нею) по отношению к неподвижной системе Ox1y1z1, является переносным движением.

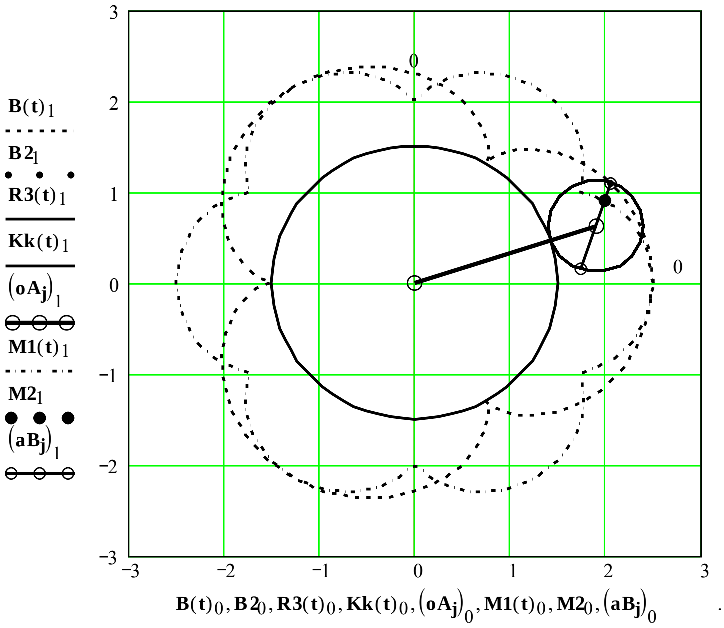

Рис. 2. Графическое представление траекторий движения точек M и B,
их контуров и объектов, подлежащих оживлению при создании клипа

Для представления вектора относительной скорости точки M в неподвижной системе, а также вектора угловой скорости подвижной системы координат и вектора переносной скорости точки удобно использовать матрицу обратного линейного преобразования координат.

Если точка M движется по каналу относительно точки A, то абсолютную скорость точки M можно представить как векторную сумму относительной и переносной скорости точки M в неподвижной системе отсчета, плюс абсолютную скорость точки A (полюса).

$$\mathrm{Vmr}(t) = \frac{d}{dt}\mathrm{AM}(t) \quad \mathrm{Vmr}(t) := -\frac{r3}{r2}\cdot r2\cdot \omega 1z\cdot\begin{pmatrix}\sin\left(\frac{r3}{r2}\cdot\omega 1z\cdot t\right)\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \quad \mathrm{Vmr1}(t) := \mathrm{Mo1}(t)\cdot\mathrm{Vmr}(t)$$

$$\mathrm{Va1}(t) := \omega 1\times A(t) \quad \mathrm{Vme1}(t) := \omega 2\times \mathrm{AM1}(t) \quad \mathrm{Vm1}(t) := \mathrm{Va1}(t) + \mathrm{Vme1}(t) + \mathrm{Vmr1}(t)$$

Поскольку вектор относительной скорости может изменяться как по величине, так и по направлению, то производная этого вектора будет равна векторной сумме двух составляющих. Первая составляющая – это производная относительной скорости в подвижной системе отсчета – относительное ускорение, которое с использованием матрицы обратного преобразования координат можно определить и в неподвижной системе координат – Amr1(t):

$$Amr(t) := -\left(\frac{r3}{r2}\right)^2 \cdot \omega 1z^2 \cdot r2 \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{r3}{r2} \cdot \omega 1z \cdot t\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Amr1(t) := Mo1(t) \cdot Amr(t)$$

Вторая составляющая – это векторное произведение угловой скорости подвижной системы на вектор относительной скорости.

Переносная скорость, как показано выше, является векторным произведением угловой скорости подвижной системы на сам радиус-вектор, поэтому производная этого векторного произведения может быть представлена так же, как векторная сумма трех составляющих.

Первая составляющая – это векторное произведение углового ускорения подвижной системы на радиус-вектор (в нашем случае отсутствует, т.к. нет углового ускорения). Вторая составляющая – это векторное произведение угловой скорости подвижной системы на переносную скорость точки – это переносное ускорение, которое также выразим в проекциях неподвижной системы. Необходимо учесть и ускорение полюса, т.е. точки А:

$$Aa1(t) := \omega 1 \times Va1(t) \qquad Ae1(t) := \omega 2 \times Vme1(t)$$

Третья составляющая – это векторное произведение угловой скорости подвижной системы на вектор относительной скорости, которое теперь повторяется, – это ускорение Кориолиса, которое направлено перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы ωe и Vr, в сторону, определяемую поворотом вектора Vr на 90° по направлению вращения подвижной системы (правило Жуковского). Но т. к. подвижная система сама вращается, то ускорение Кориолиса удобнее выражать также в проекциях на оси неподвижной системы.

Таким образом, абсолютное ускорение точки в неподвижной системе при ее сложном движении равно векторной сумме относительного, переносного и ускорения:

$$Amc1(t) := 2 \cdot \omega 2 \times Vmr1(t) \qquad A1(t) := Aa1(t) + Ae1(t) + Amr1(t) + Amc1(t)$$

Графический редактор системы Mathcad позволяет наглядно представить изменение относительной, переносной и абсолютной скоростей точки, а также относительного, переносного, абсолютного и ускорения Кориолиса как по модулю, так и в проекциях на оси координат.

На рис. 3 представлено изменение абсолютной и относительной скоростей точки М в проекциях на оси неподвижной системы координат, а на рис. 4 – изменение абсолютного и ускорения Кориолиса в проекциях на оси неподвижной системы координат.

Рассмотрим пример создания контуров векторов ускорений: полного – Us и ускорения Кориолиса – Amc. Для создания контуров достаточно задать в векторной форме координаты точки М2 и приложить в нее вектор ускорения Us2=A1(t2) или Kar2=Amc1(t2), соответствующий времени фрагмента, воспользовавшись масштабным коэффициентом – Km и переменной j (принимающей два значения: 0 и 1), и присвоить векторам соответственно имена:

$$Us_J = M2+Km*A1(t2))*j \text{ и } Amc_J = M2 + Km*Amc1(t2)*j:$$

$$Km := 0.02 \qquad Us_j := M2 + A1(t2)\cdot j\cdot Km \qquad Kar_j := M2 + Amc1(t2)\cdot j\cdot Km$$

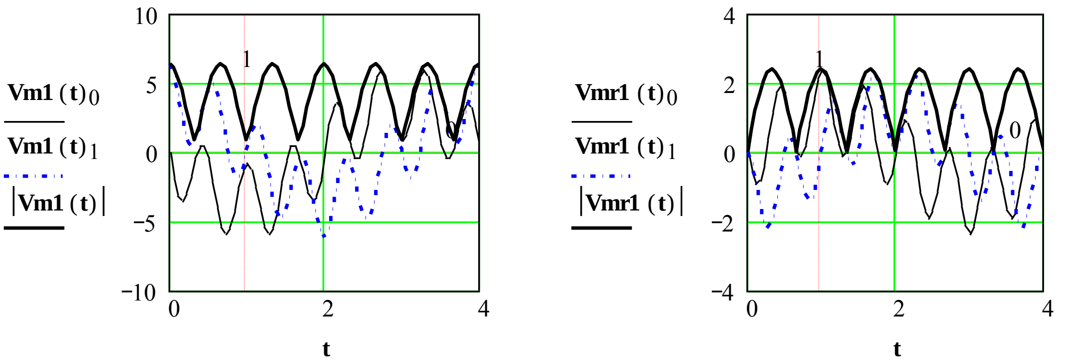

Рис. 3. Изменение абсолютной и относительной скоростей точки М в проекциях

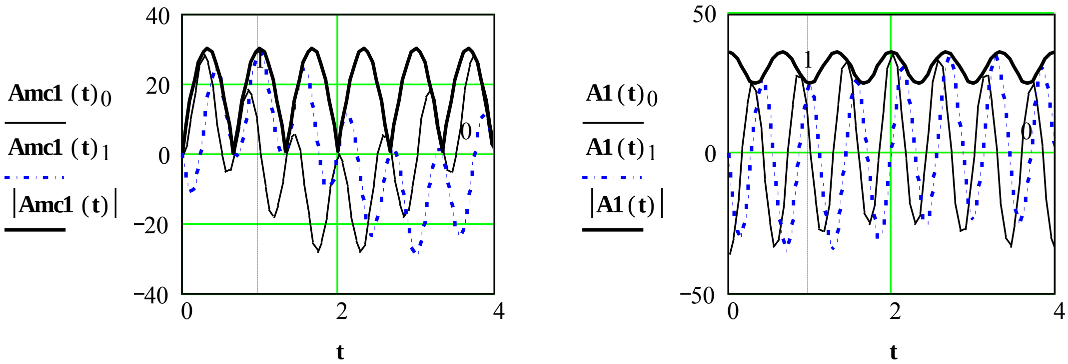

Рис. 4. Изменение ускорений точки М в проекциях на оси неподвижной системы

На рис. 5а представлены контуры точек М и В и векторов ускорений: планетарной передачи с внешним зацеплением при t2= 0,2 с.

Чтобы исследовать и визуально представить кинематику планетарной передачи с внутренним зацеплением, в алгоритм решения необходимо внести изменения (эти изменения представлены ниже и выделены рамкой): длина водила ОА= r3–r2; угловая скорость сателлита обратно направлена по отношению к угловой скорости водила и определяется другим соотношением.

$$r2 := 1 \qquad r3 := 3\cdot r2 \qquad OA = 1 \qquad l := r3 - r2$$

$$\omega1z := \frac{\pi}{2} \qquad \omega1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega1z \end{pmatrix} \qquad \omega2z := \omega1z\cdot\left(1 - \frac{r3}{r2}\right) \qquad \omega2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega2z \end{pmatrix}$$

Внеся эти изменения в алгоритм решения, можно незамедлительно осуществить его визуализацию и представить в графическом редакторе Mathcad планетарную передачу с **внутренним** зацеплением, с контурами колес, водила и паза, а также траекториями движения точек М и В и их контурами в конкретный момент времени – t1, что и показано на рис. 5б.

Создание анимационного клипа, воспроизводящего движение механизма его тел и точек, осуществляется через меню системы: «Вид», «Анимация». В окне меню системы Mathcad необходимо указать число фрагментов анимации, затем выделить область документа вместе с объектами, созданными в графическом редакторе, и «щелкнуть» по кнопке «Анимация». После создания видеоклипа необходимо сохранить его в виде отдельного файла, присвоив ему имя. Затем в документе необходимо создать «**знак** видеоклипа», оформив его как гиперссылку на файл видео клипа. «Щелкнув» по этому «**знаку»** видеоклипа, можно воспроизвести анимацию механизма, анализируя движение его тел и заданных точек.

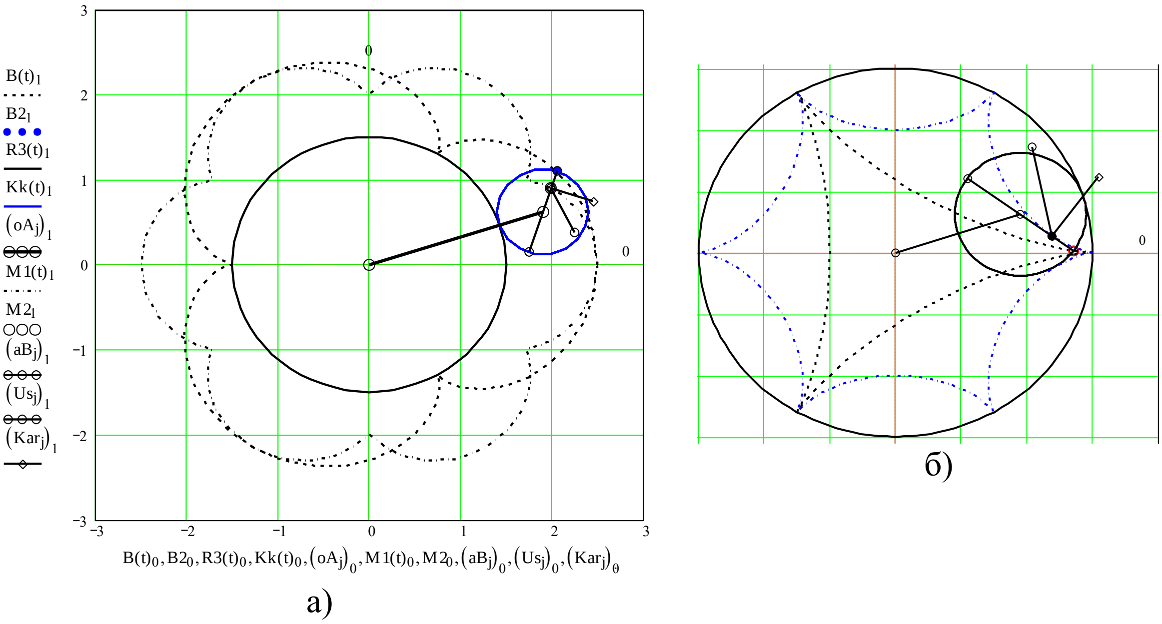

Рис. 5. Графическое представление планетарной передачи:
а) с внешним зацеплением и векторов ускорения Кориолиса и полного;
б) с внутренним зацеплением и траекториями движения точек М и В
и векторов ускорения Кориолиса и полного

Алгоритмы расчета кинематических параметров и создания анимационной графики с использованием системы Mathcad позволяют реализовать виртуальную лабораторию на практике и осуществить визуализацию этого движения, не прибегая к трудоемким аналитическим выкладкам и вычислениям, что способствует лучшему усвоению материала.

Библиографический список

1. Использование компьютерных технологий при решении задач механики. Ч. 2: учебное пособие по выполнению практических работ / В.Г. Некрутов, Ю.П. Сердега, С.В. Сергеев, А.В. Иршин. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2016. – 80 с.
2. Кирьянов, Д.В. Mathcad 15 / Д.В. Кирьянов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012.
3. Макаров, Е.Г. Инженерные расчеты в Mathcad 15: учебный курс / Е.Г. Макаров. – СПб.: Питер, 2011. – 400 с.

К содержанию