УДК 51-77 DOI: 10.14529/mmp190404

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ МНОГОКАНАЛЬНОЙ РЕКЛАМОЙ С ЭФФЕКТОМ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ОТДАЧИ

И.В. Лутошкин[1], *Н.Р. Ямалтдинова*[1]
[1]Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск, Российская Федерация

Анализируется динамическая непрерывная относительно времени модель оптимального распределения рекламных расходов на планируемом периоде при использовании фирмой нескольких медиаканалов разного качества и силы влияния на спрос. Учитывается запаздывающая реакция потребителя на рекламу и нерекламные факторы. При этом, в отличие от классических динамических оптимизационных моделей Нерлова – Эрроу, Видаля – Вульфа и их расширений, предлагаемая модель учитывает накопленные за возможно разные промежутки времени эффекты от воздействия рекламы нескольких медиаканалов и предыдущих объемов продаж. В рамках предлагаемой модели формулируется задача оптимального управления рекламными расходами с нелинейным интегральным уравнением типа Вольтерра, порожденного естественными ограничениями рассматриваемой проблемы. Доказывается теорема о существовании решения данного уравнения. Формулируется теорема о существовании решения задачи максимизации прибыли фирмы на плановом периоде при ограничении на поток рекламных затрат и функциональной зависимости, отражающей реакцию целевой аудитории. Также к задаче применяется принцип максимума и находятся необходимые условия построения оптимальной программы.

Ключевые слова: математическое моделирование; рекламная программа; уравнение Вольтерра; оптимальное управление; принцип максимума; существование решения.

Введение

Рекламные затраты, как и любые другие статьи затрат, учитываются в совокупных издержках фирмы. Однако они обладают свойством быть полностью регулируемыми и практически не зависят от выпуска, в то же время являются мощным инструментом воздействия на потребительские предпочтения. Эффективная стратегия управления данным видом затрат позволяет любой фирме за короткое время при небольших издержках увеличить объем продаж даже без внесения изменений в производственный процесс.

Отметим, что рекламные сообщения редко вызывают мгновенную потребительскую реакцию. В то же время эффект рекламного воздействия может сохраняться некоторое время после выхода такого сообщения. Следовательно, при разработке рекламной стратегии должна быть учтена возможность распределенного во времени запаздывания реакции потребителей. Статистические модели с эффектом распределенного запаздывания, дискретные относительно параметра времени, были рассмотрены в [1]. Понятно, что для практической реализации любой фирме хотелось бы иметь стратегию, позволяющую обосновывать свои действия в любой момент времени в рамках рекламной кампании.

Модель с непрерывно распределенным эффектом от рекламы впервые была предложена А. Бенсоуссаном [2] и позже модифицирована У. Пауэлсом [3]. В этих моделях предполагается, что данное воздействие распределено вплоть до текущего момента времени. Согласно анализу деятельности ряда фирм современного российского рынка [4], был сделан вывод о том, что наибольшее влияние на скорость реакции на рекламу оказывает длительность использования товаров. При разработке моделей для товаров недлительного использования, особенно для товаров первой необходимости, нет смысла рассматривать интервалы длительного воздействия факторов на спрос. Текущая отдача от достаточно давнего рекламного воздействия скорее всего будет носить случайный характер, как и отдача от рекламы на текущем этапе кампании. Также в моделях не были учтены влияния множества нерекламных факторов. При этом очевидно, что помимо рекламы существует и другие внутренние и внешние воздействия на потребительский спрос. Среди множества расширений классической динамической модели рекламы Нерлова – Эрроу [5] были выделены такие нерекламные факторы как цена товара [6–8], его качество [9], узнаваемость бренда [10]. В модели Видаля – Вольфа [11] и ее расширениях [12,13] учитывается доля охваченного рынка, предполагается, что он ограничен. Также в ряде существующих на сегодняшний день моделях рассматриваются влияния других участников рынка [14–18]. Однако помимо перечисленного, существуют и другие контролируемые и неконтролируемые фирмой причины изменения уровня продаж, сохранения или потери интереса к продукту у постоянных покупателей. К тому же остается открытым вопрос измерения качества товара, привлекательности бренда, а также их оценки. При этом справедливая цена, высокое качество, предпочтение товаров определенного бренда, а также, возможно, социальные, экономические и другие внешние факторы стимулируют потребителя совершать повторные покупки. Таким образом, опыт покупателя (для фирмы - опыт предыдущих продаж) здесь может выступать как неявный показатель нерекламного влияния на потребительский спрос. Учитывая тот факт, что реакция на приобретенный товар проявляется не сразу и сохраняется некоторое время, можно сделать вывод, что эффект предыдущих продаж для фирмы так же как и эффект рекламы имеет распределенный во времени запаздывающий характер.

Часто фирмы для рекламирования своего товара привлекают несколько медиаканалов, т.к. использование однородной рекламы быстро становится неэффективным и приводит к неоправданным расходам. При этом влияние разных видов рекламы может быть по-разному распределено во времени, что также стоит учесть при разработке рекламной стратегии. В [19] рассмотрена модель для фирм-конкурентов, использующих несколько медиаканалов. При этом в ней не учитывается накопительный характер рекламных и нерекламных воздействий.

Цель настоящей работы – анализ математической модели оптимального распределения рекламного бюджета фирмы на планируемом периоде среди нескольких медиаканалов.

В рамках поставленной цели будет сформулирована задача оптимального управления рекламным бюджетом фирмы, доказаны теоремы существования решения задачи, найдены необходимые условия построения оптимальной рекламной программы.

Предложенная авторами настоящего исследования модель является обобщением динамической модели с одним медиаканалом [20] и может быть применена фирмами при организации сложных рекламных кампаний, когда продвижение продукта осуществляется с использованием нескольких видов рекламы.

1. Постановка задачи

Обозначим через $y(t)$ выручку фирмы в момент времени t, которая является денежным выражением величины спроса на рекламируемый товар и через $u(t)$ – величину рекламных затрат в момент времени t. Пусть задан период планирования $t \in [t_0; T]$. Не ограничивая общности, считаем, $t_0 = 0$.

В дальнейшем будем предполагать, что:

- объем спроса ограничен только возможностями фирмы,
- экономическая ситуация стабильна,
- воздействия конкурентов принципиально не меняются на временном промежутке планирования.

Предположим, что фирма может диверсифицировать рекламные расходы между r медиаканалами. Пусть $u_i(t)$ – величина рекламных затрат в i-й медиаканал, $i = 1, 2, ..., r$. Определение величин $u_1(t), u_2(t), ..., u_r(t)$ представляет собой управленческое решение фирмы. В этом случае $u(t)$ можно считать управляющей вектор функцией, $u(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., u_r(t))$, $u(t) \in \mathbb{R}^r_+$.

Обозначим через $v(t)$ функцию накопленного рекламного воздействия к моменту t, через $w(t)$ функцию накопленного воздействия предыдущих продаж к моменту t. Введем следующие соотношения для накопленных воздействий рекламы и предыдущих продаж:

$$v(t) = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{\tau_{11}}^{\tau_{12}} G_1(\tau) g_1\left(u_1(t-\tau), u_2(t-\tau), \ldots, u_r(t-\tau)\right) d\tau, \\ \displaystyle\int_{\tau_{21}}^{\tau_{22}} G_2(\tau) g_2\left(u_1(t-\tau), u_2(t-\tau), \ldots, u_r(t-\tau)\right) d\tau, \\ \ldots \\ \displaystyle\int_{\tau_{r1}}^{\tau_{r2}} G_r(\tau) g_r\left(u_1(t-\tau), u_2(t-\tau), \ldots, u_r(t-\tau)\right) d\tau. \end{pmatrix}; \tag{1}$$

$$w(t) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} G_y(\tau) y(t-\tau) d\tau. \tag{2}$$

Здесь $G_1(\tau)$, $G_2(\tau)$, $\ldots$, $G_r(\tau)$, $G_y(\tau)$ – функции, определяющие весовой характер воздействия предыдущих рекламных затрат и предыдущих продаж, соответственно, на текущий момент; $g_i\left(u_1(s), u_2(s), \ldots, u_r(s)\right)$ – функция, отображающая совокупный эффект на аудиторию $i-$го медиаканала от текущих вложений в рекламу, $i = 1, 2, \ldots, r$; τ – лаг запаздывания реакции потребителей на рекламные и нерекламные воздействия; $[\tau_{i1}; \tau_{i2}]$ – интервал лагов запаздывания, на протяжении которого накапливается рекламное воздействие от использования i-го медиаканала, $i = 1, 2, \ldots, r$; $[\tau_1; \tau_2]$ – интервал лагов запаздывания, на котором накапливается воздействие от предыдущих продаж.

В общем случае величины τ_{i1}, τ_{i2}, τ_1, τ_2 являются функциями времени t, при этом $\tau_{i1} < \tau_{i2}$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $\tau_1 < \tau_2$.

Если аудитория $i-$го медиаканала практически не получает воздействия от других медиаканалов, то функция $g_i\left(u_1(s), u_2(s), \ldots, u_r(s)\right) \equiv g_i\left(u_i(s)\right)$, а в простейшем случае можно полагать $g_i(u_1(s), u_2(s), \ldots, u_r(s)) \equiv u_i(s)$. Также будем предполагать, что известны фактические данные по рекламе $\tilde{u}(t) = (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \ldots, \tilde{u}_r(t))$ и выручке $\tilde{y}(t)$ до начала планируемого периода: $\tilde{u}_i(t)$ – кусочно непрерывная $i = 1, 2, \ldots, r$, $\tilde{y}(t)$ – непрерывная при $t < 0$, и $u_i(t) = \tilde{u}_i(t)$, $y(t) = \tilde{y}(t)$ при $t < 0$.

Значение выручки в момент времени t определяется соотношением:

$$y(t) = f(v(t), w(t)). \tag{3}$$

Анализ вида функций $G_i(\tau)$, $g_i(u_1, u_2, \ldots, u_r)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $G_y(\tau)$ – проблема эконометрического анализа, учитывающая общую ситуацию на рынке, вид производимой продукции или представляемых услуг фирмой, относительную ограниченность спроса, наличие конкуренции, взаимное воздействие медиаканалов и т. д.

Введем некоторые предположения относительно этих функций и выручки $f(v, w)$:

1) Пока рынок не насытился продукцией фирмы, и реклама позитивно воспринимается потребителем, функция выручки монотонно возрастает по v и w. Однако дополнительная отдача от рекламы убывает со временем, т.е. рост вложений в рекламу сопровождается замедлением роста функции $f(v, w)$, такое качество соответствует вогнутости $f(v, w)$ по v. Также вследствие перенасыщаемости рынка и (или) производственных ограничений убывает прирост выручки, что дает основание требовать вогнутость $f(v, w)$ по w.

2) В ретроспективе по мере увеличения лага запаздывания до определенного $\tau^*_{u_i}$ реклама медиаканала i вызывает увеличение спроса, после чего воздействие рекламы начинает ослабевать, пока вовсе не исчезнет. Такое предположение справедливо для всех медиаканалов $i = 1, 2, \ldots, r$. Тогда функции $G_i(\tau)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, неотрицательны, каждая из них имеет единственный локальный (он же глобальный) максимум, который в виде выручки определяет наибольшую отдачу от рекламных затрат на соответствующем медиаканале. Таким образом, при всех i, $i = 1, 2, \ldots, r$ выполняются условия:

$$G_i(\tau) \geq 0, \tau \in [0; +\infty); \lim_{\tau \to +\infty} G_i(\tau) = 0;$$

$$G_i'(\tau) \geq 0, \tau \in [0; \tau^*_{u_i}); \; G_i'(\tau) \leq 0, \tau \in (\tau^*_{u_i}; +\infty).$$

3) При положительном опыте пользования товара покупатели могут повторить покупки и посоветовать его другим потенциальным покупателям, в этом случае, предыдущие покупки стимулируют текущий спрос и функция возрастает. Однако совокупный потребительский опыт предыдущих покупок постепенно забывается, уступая место текущему впечатлению от товара. Поэтому функция $G_y(\tau)$ обладает свойствами, аналогичными свойствам $G_i(\tau)$:

$$G_y(\tau) \geq 0, \tau \in [0; +\infty); \lim_{\tau \to +\infty} G_y(\tau) = 0;$$

$$G_y'(\tau) \geq 0, \tau \in [0; \tau^*); \; G_y'(\tau) \leq 0, \tau \in (\tau^*; +\infty).$$

Здесь τ^* – точка максимальной отдачи от эффекта бренда.

4) Функции $g_i(u_1, u_2, \ldots, u_r)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, предполагаются непрерывными по всем аргументам, $g_i(u_1, u_2, \ldots, u_r) \geq 0$ для любых $u_1, u_2, \ldots, u_r$. В точке $u_1 = u_2 = \ldots = u_r = 0$ и некоторой окрестности нулевых рекламных затрат $O_{\varepsilon_1} = \{u \in$

$\mathbb{R}^r_+ : \|u\| < \varepsilon_1\}$ отдача от рекламы не дает эффекта, что дает основание сделать предположение: $g_i(u_1, u_2, \ldots, u_r) = 0$, $u \in O_{\varepsilon_1}$. Начиная с некоторого суммарного воздействия, аудитория начинает реагировать на рекламу позитивно при соответствующих рекламных затратах, что можно выразить в следующем виде: существует $O_{\varepsilon_2} = \{u \in \mathbb{R}^r_+ : \|u\| < \varepsilon_2\}$, для любых $u^1, u^2 \in O_{\varepsilon_2}$, $u^1 < u^2$, $g_i(u^1) \leq g_i(u^2)$. При дальнейшем увеличении рекламы может произойти негативное влияние: увеличение воздействия рекламы будет приводить к уменьшению отдачи. Вопрос эконометрической оценки функций $g_i(u_1, u_2, \ldots, u_r)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, является отдельной сложной практической задачей.

При планировании рекламных инвестиций всегда выделяется фиксированный бюджет. Фирмы по-разному подходят к определению рекламного бюджета. Пусть поток рекламного бюджета, выделяемого на использование r медиканалов, ограничен некоторой суммой B, введем множество U_B, ограничивающее поток инвестиций в рекламу, и множество рекламных программ U :

$$U_B = \left\{ u \in \mathbb{R}^r : \sum_{i=1}^{r} u_i \leq B,\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, \ldots, u_r \geq 0 \right\},$$

$$U = \{u(\cdot) : u(t) \in U_B,\ t \in [0;T]\}. \quad (4)$$

Предположим, что совокупные издержки компании состоят из рекламных затрат и затрат c, связанных с производимым благом. В этом случае, текущую прибыль $\pi(t)$ в момент времени t можно определить соотношением:

$$\pi(y(t), t) = y(t) - c(y(t), t) - \sum_{i=1}^{r} u_i(t).$$

Здесь $c(y(t), t) = c_1(y(t)) + c_2(t)$ – совокупные издержки за исключением рекламных затрат, $c_1(y)$ – переменные издержки, связанные с выпуском продукции (оказанием услуг), c_2 – постоянные издержки, в общем случае определяемые временным трендом.

Накопленную прибыль Π за планируемый период $[0;T]$ можно определить:

$$\Pi(T) = \int_0^T \pi(y(s), s) ds. \quad (5)$$

Отметим, что функция $c(y, t)$ может оцениваться как эконометрически, так и на основе некоторых предположений. В частности, переменные издержки можно рассматривать в прямой зависимости от выпуска (при этом если исходить из условия равновесия на рынке, то переменные издержки находятся в прямой зависимости и от продаж) с постоянным коэффициентом μ, где μ – норма издержек на единицу выпуска: $c(y) = \mu y$.

В этом случае текущая прибыль в момент времени t определяется:

$$\pi(y(t), t) = (1 - \mu) y(t) - c_2(t) - \sum_{i=1}^{r} u_i(t).$$

Совокупная прибыль в момент времени t определяется:

$$\Pi(t) = \int_0^t \left((1 - \mu) f(v(s), w(s)) - \sum_{i=1}^{r} u_i(s) \right) ds.$$

Задача максимизация совокупной прибыли (5) эквивалентна

$$\Pi(T) \to \max\,. \tag{6}$$

Таким образом, задача оптимального управления рекламными расходами для случая фиксированного момента начала их воздействия задается системой (1) – (4), (6).

Преобразуем соотношения (1), (2). Введем кусочно-непрерывные функции $\bar{G}_i(\tau)$, $\phi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $\bar{G}_y(\tau)$, $\phi_y(t)$:

$$\bar{G}_i(\tau) = \begin{cases} G_i(\tau), & \tau_{i1} \le \tau \le \tau_{i2}, \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases}$$

$$\phi_i(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{t-\tau_{i2}}^{t-\tau_{i1}} G_i(t-s) g_i(\tilde{u}(s)) ds, & 0 \le t < \tau_{i1}, \\ \displaystyle\int_{t-\tau_{i2}}^{0} G_i(t-s) g_i(\tilde{u}(s)) ds, & \tau_{i1} \le t < \tau_{i2}, \\ 0, & t \ge \tau_{i2}; \end{cases}$$

$$\bar{G}_y(\tau) = \begin{cases} G_y(\tau), & \tau_1 \le \tau \le \tau_2, \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases}$$

$$\phi_y(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} G_y(t-s) \tilde{y}(s) ds, & 0 \le t < \tau_1, \\ \displaystyle\int_{t-\tau_2}^{0} G_y(t-s) \tilde{y}(s) ds, & \tau_1 \le t < \tau_2, \\ 0, & t \ge \tau_2. \end{cases}$$

Тогда накопленные воздействия рекламных затрат (1) и предыдущих продаж (2) можно представить:

$$v(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) + \displaystyle\int_0^t \bar{G}_1(t-s) g_1(u(s)) ds \\ \phi_2(t) + \displaystyle\int_0^t \bar{G}_2(t-s) g_2(u(s)) ds \\ \ldots \\ \phi_r(t) + \displaystyle\int_0^t \bar{G}_r(t-s) g_r(u(s)) ds \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$w(t) = \phi_y(t) + \int_0^t \bar{G}_y(t-s) f(v(s), w(s)) ds. \tag{8}$$

Таким образом, задача оптимального распределения рекламных расходов представляет из себя систему условий (3), (4), (6) – (8), одно из которых – интегральное уравнение Вольтерра (8).

2. Существование решения

Рассмотрим вопрос о существовании решения задачи (3), (4), (6) – (8).

Пусть функции рекламных затрат $u_i(t)$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ – кусочно-непрерывны справа на интервале $[0; T]$; функции $G_i(\tau) \in C([\tau_{i1}; \tau_{i2}])$, $g_i(u) \in C(U)$, $i = 1, 2, \dots, r$, $G_y(\tau) \in C([\tau_1; \tau_2])$. Если $G_i(\tau)$ непрерывна, то $\bar{G}_i(\tau)$ кусочно-непрерывна, и в этом случае $v_i(t)$ непрерывна на отрезке $[0; T]$. Принимая во внимание (4) можно утверждать, что существуют числа $B_i : B_i = \max\limits_{u \in U} g_i(u)$. Тогда, существует $\tilde{B}$:

$$0 \le \phi_i(t) + \int_0^t \bar{G}_i(t-s) g_i(u(s))ds \le \max_{0 \le t \le T} \left(\phi_i(t) + \int_0^t \bar{G}_i(t-s) B_i ds \right) = \tilde{B}_i,\ i = 1, 2, \dots, r.$$

Таким образом, для любой рекламной программы, удовлетворяющей условию (4), выполняется $0 \le v_i(t) \le \tilde{B}_i$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Теорема 1. *Пусть функция $G_y(\tau) \in C([\tau_1; \tau_2])$, функция $f(v, w)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной w для всех w. Тогда для любой кусочно-непрерывной вектор-функции $u(\cdot) \in U$, существует непрерывная единственная на этом отрезке функция $w(t)$, удовлетворяющая (8).*

Доказательство. Так как функция $f(v, w)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной w, то существует константа L, что выполняется неравенство $|f(v, w_1) - f(v, w_2)| \le L|w_1 - w_2|$, $\forall w_1, w_2$.

Введем оператор A :

$$Aw(t) = \phi_y(t) + \int_0^t \bar{G}_y(t-s) f(v(s), w(s))ds.$$

Очевидно, существует конечное число $M = \max\limits_{\tau_1 \le \tau \le \tau_2} G_y(\tau)$. В силу построения $\bar{G}_y(\tau)$, $\bar{G}_y(\tau) \le M$, $\forall \tau \ge 0$.

С учетом введенных предположений для любых непрерывных функций $w_1(t)$, $w_2(t)$ верно следующее неравенство:

$$\begin{array}{c} |Aw_1(t) - Aw_2(t)| = \left| \int_0^t \bar{G}_y(t-s)(f(v(s), w_1(s)) - f(v(s), w_2(s)))ds \right| \le \\ \le MLt \max\limits_{0 \le s \le T} |w_1(s) - w_2(s)|. \end{array}.$$

Обозначим через A^k k-кратное последовательное применение оператора А, т.е. $A^2 w = A(Aw)$, $A^k w = A(A^{k-1} w)$. В этом случае:

$$|A^2 w_1(t) - A^2 w_2(t)| = \left| \int_0^t \bar{G}_y(t-s)(f(v(s), Aw_1(s)) - f(v(s), Aw_2(s)))ds \right| \le$$
$$\le ML \int_0^t |Aw_1(s) - Aw_2(s)|ds \le \frac{(MLt)^2}{2} \max_{0 \le s \le T} |w_1(s) - w_2(s)|.$$

Аналогично можно показать:

$$\left| A^k w_1(t) - A^k w_2(t) \right| \le \frac{(MLt)^k}{k!} \max_{0 \le s \le T} |w_1(s) - w_2(s)|.$$

Используя метрику в пространстве непрерывных функций $\rho(w_1, w_2) = \max\limits_{0\leq s\leq T} |w_1(s) - w_2(s)|$, получаем соотношение:

$$\rho\left(A^k w_1, A^k w_2\right) = \frac{(MLt)^k}{k!}\rho(w_1, w_2).$$

Существует $k : \dfrac{(MLt)^k}{k!}$. Это означает, что оператор A^k является сжимающим, следовательно, решение $w(t)$ существует и единственно на отрезке $[0; T]$. При этом $w(t)$ непрерывна на этом отрезке [21]. □

Теорема 1 дает условия существования глобального решения уравнения (8).

Замечание 1. Если функция $f(v, w)$ неотрицательна, вогнута и монотонно не убывает по переменной w, существует конечная частная производная $f'_w(v, 0)$, тогда функция $f(v, w)$ удовлетворяет условию Липшица по w для любого w. В этом случае существует неотрицательное решение уравнения (8) на отрезке $[0; T]$.

Перейдем к вопросу существования решения оптимизационной задачи (3), (4), (6) – (8). Введем функционал $J(u(\cdot)) \equiv \Pi(T)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения теоремы 1, функция $f(v, w)$, $v \equiv (v_1, v_2, ..., v_r)$, монотонно не убывает по всем v_i, $i = 1, 2, \ldots, r$. Тогда имеет место одна из следующих альтернатив:*

1. Существует допустимая управляющая вектор-функция $u^*(\cdot) \in U$, соответствующие данному управлению функции $v(t)$, $w(t)$: (7), (8) и значение функционала $J(u^*(\cdot)) : J(u^*(\cdot)) \geq J(u(\cdot))$ для любой $u(\cdot) \in U$.

2. Существует последовательность допустимых управляющих вектор-функций $u^s(\cdot) \in U$ и такое число $\bar{J} : J(u^s(\cdot)) \to \bar{J}$ при $s \to \infty$, что $J(u(\cdot)) \leq \bar{J}$ для любого $u(\cdot) \in U$.

Доказательство. Проведем оценку решения уравнения (8).

$$w(t) = \phi_y(t) + \int_0^t \bar{G}_y(t-s) f(v(s), w(s)) ds \leq$$
$$\leq \phi_y(t) + \int_0^t \bar{G}_y(t-s) f(\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \ldots, \tilde{B}_r, w(s)) ds = w_B(t).$$

Здесь $w_B(t)$ – решение уравнения (8) при рекламной программе $u(t) \equiv (B_1, B_2, \ldots, B_r)$.

Следовательно, для любой рекламной программы (4) функция накопленного воздействия предыдущих продаж $w(t)$ ограничена некоторым значением $K : w(t) \leq K = \max\limits_{0\leq t\leq T} w_B(t)$.

Покажем ограниченность функционала $\Pi(T)$ в задаче (3), (4), (6) – (8).

$$\Pi(T) = \int_0^T \left((1-\mu) f(v(t), w(t)) - \sum_{i=1}^{r} u_i(t) \right) dt \leq$$
$$\leq \int_0^T f(v(t), w(t)) dt \leq T \max_{(v,w)\in D} f(v, w),$$

где $D = \{(v, w) : 0 \le v_i \le \tilde{B}_i, 1 \le i \le r, 0 \le w \le K\}$. Таким образом множество значений функционала в задаче (3), (4), (6) – (8) ограничено, обозначим это множество как L.

Пусть $\bar{J} = \sup L$. Очевидно, что $\bar{J}$ существует и конечно. Если $\bar{J} \in L$, то выполняется первая альтернатива теоремы, в противном случае – вторая альтернатива. □

Замечание 2. Если выполняется вторая альтернатива теоремы 2, то существует допустимая рекламная программа, сколь угодно близкая, относительно значения целевого функционала, к возможной максимальной прибыли в задаче (3), (4), (6) – (8). Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует управляющая функция $u_\varepsilon(\cdot)$, удовлетворяющая (4) и соответствующие данному управлению решения (7), (8): $\bar{J} - J(u_\varepsilon(\cdot)) < \varepsilon$.

3. Необходимые условия оптимальности

Сформулируем необходимые условия для оптимальной рекламной программы в задаче (3), (4), (6) – (8).

Введем вектор-функцию $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_r(t), x_{r+1}(t), x_{r+2}(t))^T$:

$$x_i(t) = v_i(t) - \phi_i(t),\ i = 1, 2, \ldots, r,\ x_{r+1}(t) = w(t) - \phi_y(t),\ x_{r+2}(t) = \Pi(t).$$

А также вектор-функцию $F(t, s, x, u)$:

$$F(t, s, x, u) = \begin{pmatrix} \bar{G}_1(t-s)g_1(u) \\ \bar{G}_2(t-s)g_2(u) \\ \ldots \\ \bar{G}_r(t-s)g_r(u) \\ \bar{G}_y(t-s)f(\phi_1(s)+x_1, \ldots, \phi_r(s)+x_r, \phi_y(s)+x_{r+1}) \\ (1-\mu)f(\phi_1(s)+x_1, \ldots, \phi_r(s)+x_r, \phi_y(s)+x_{r+1}) - \sum\limits_{i=1}^{r} u_i \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Исходная задача (3), (4), (6) – (8) эквивалентна задаче:

$$x(t) = \int_0^t F(t, s, x(s), u(s))ds,\ x_{r+2}(T) \to \max_{u(\cdot)\in U}. \tag{10}$$

Теорема 3. *Пусть $\{u^*(t), v^*(t), w^*(t)\}$ - оптимальный процесс в задаче (3), (4), (6) – (8), тогда найдутся такие функции $h_i(s)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, $p_j(s)$ $(j = 1, 2, \ldots, r+1)$:*

$$h_i(s) = p_i(s)\bar{G}_i(0) + \int_s^T p_i(t)\frac{\partial \bar{G}_i(t-s)}{\partial t}dt, \tag{11}$$

$$\frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial f(v^*(s), w^*(s))}{\partial v_i}\left(p_{r+1}(s)\bar{G}_y(0) + 1 - \mu + \int_s^T p_{r+1}(t)\frac{\partial \bar{G}_y(t-s)}{\partial t}\right), \tag{12}$$

$$\frac{dp_{r+1}}{ds} = -\frac{\partial f(v^*(s), w^*(s))}{\partial w}\left(p_{r+1}(s)\bar{G}_y(0) + 1 - \mu + \int_s^T p_{r+1}(t)\frac{\partial \bar{G}_y(t-s)}{\partial t}\right) \tag{13}$$

с конечными условиями $p_i(T) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, r+1$, что оптимальное распределение рекламных расходов при всех $s \in [0; T]$ будет являться решением задачи:

$$u^*(s) = arg\max_{u\in U_B} \sum_{i=1}^{r} (g_i(u)h_i(s) - u_i)\,. \tag{14}$$

Доказательство. Введем модифицированную функцию Гамильтона – Понтрягина [22] для задачи с интегральными уравнениями (10):

$$H(s,x,u) = p(s)F(s,s,x,u) + \int_s^T p(t)\frac{\partial F(t,s,x,u)}{\partial t}dt, \tag{15}$$

где $p(s) = (p_1(s), p_2(s), \ldots, p_r(s), p_{r+1}(s), p_{r+2}(s))$ – вектор сопряженных переменных:

$$\frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial H(s,x,u)}{\partial x_i},\ 1 \le i \le r+2. \tag{16}$$

Введем терминальную функцию Лагранжа:

$$L(x(0), x(T)) = \sum_{k=1}^{r+2} \beta_k x_k(0) - \beta_{r+3} x_{r+2}(T),\ \beta_{r+3} \ge 0. \tag{17}$$

Краевые условия для сопряженных переменных определяются из соотношений:

$$p_i(0) = \frac{\partial L(x(0), x(T))}{\partial x_i(0)},\ p_i(T) = -\frac{\partial L(x(0), x(T))}{\partial x_i(T)},\ 1 \le i \le r+2.$$

Исходя из вида введенной функции (17), краевые условия принимают вид:

$$p_i(0) = \beta_i,\ 1 \le i \le r+2,\ p_i(T) = 0,\ 1 \le i \le r+1,\ p_{r+2}(T) = \beta_{r+3}.$$

Если $\beta_{r+3} = 0$, то решение однородной системы интегродифференциальных уравнений (16) в точке T равно тривиальному вектору, что влечет тривиальность решения системы (16), следовательно, тривиальность чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{r+3}$. Таким образом, β_{r+3} можно положить равным любому положительному числу. Положим $\beta_{r+3} = 1$.

Принимая во внимание вид $F(t,s,x,u)$ (9), рассмотрим функцию Гамильтона – Понтрягина (15):

$$\begin{gathered}
H(s,x,u) = \sum_{i=1}^{r} p_i(s)\bar{G}_i(0)g_i(u) + p_{r+1}(s)\bar{G}_y(0)f(\phi_1(s)+x_1, ..., \phi_r(s)+x_r, \phi_y(s)+x_{r+1}) + \\
+ p_{r+2}(s)\left((1-\mu)f(\phi_1(s)+x_1, \ldots, \phi_r(s)+x_r, \phi_y(s)+x_{r+1}) - \sum_{i=1}^{r} u_i\right) + \\
+ \int_s^T \left(\sum_{i=1}^{r} p_i(t)\frac{\partial \bar{G}_i(t-s)}{\partial t} g_i(u) + \right. \\
\left. + p_{r+1}(t)\frac{\partial \bar{G}_y(t-s)}{\partial t} f(\phi_1(s)+x_1, \ldots, \phi_r(s)+x_r, \phi_y(s)+x_{r+1})\right) dt.
\end{gathered} \tag{18}$$

Так как, $\dfrac{dp_{r+2}}{ds} = 0$, $p_{r+2}(T) = 1$, то $p_{r+2}(s) \equiv 1$ при $s \in [0;T]$.

Обозначим через $h(s,x,u)$ слагаемые функции (18), зависящие от управления u:

$$h(s,x,u) = \sum_{i=1}^{r} p_i(s)\bar{G}_i(0)g_i(u) - p_{r+2}(s)\sum_{i=1}^{r} u_i + \int_s^T \left(\sum_{i=1}^{r} p_i(t)\frac{\partial \bar{G}_i(t-s)}{\partial t} g_i(u)\right) dt.$$

Максимизация функции (18) эквивалентана максимизации функции $h(s, x, u)$. Очевидно, что

$$h(s, x, u) = \sum_{i=1}^{r} \left(g_i(u) \left(p_i(s)\bar{G}_i(0) + \int_s^T p_i(t) \frac{\partial \bar{G}_i(t-s)}{\partial t} dt \right) - u_i \right).$$

Так как $h_i(s) = p_i(s)\bar{G}_i(0) + \int_s^T p_i(t) \frac{\partial \bar{G}_i(t-s)}{\partial t} dt$, то оптимальное управление в задаче (3), (4), (6) – (8) удовлетворяет при любом s решению задачи нелинейного программирования:

$$h(s, x, u) = \sum_{i=1}^{r} (g_i(u)h_i(s) - u_i) \to \max_{u \in U_B}.$$

Последнее означает выполнение условия (14). При этом сопряженные переменные $p_i(s)$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ удовлетворяют задаче Коши (12), (13).

□

Замечание 3. Если фирма проводит рекламную политику достаточно долгое время, то реакция потребителей имеет устойчивый характер, который выражается в эффекте убывающей дополнительной отдачи. При моделировании данного свойства можно потребовать вогнутость и монотонное возрастание функций $g_i(u)$, $i = 1, 2, \dots, r$. В этом случае задача (14) становится задачей выпуклого программирования, для которой условие седловой точки является необходимым и достаточным условием:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{r} u_i - B \right) y = 0, \ y \geq 0, \ \sum_{i=1}^{r} u_i \leq B, \\ u_j \left(y + 1 - \sum_{i=1}^{r} h_i(s) \frac{\partial g_i(u)}{\partial u_j} \right) = 0, \ u_j \geq 0, \\ y + 1 - \sum_{i=1}^{r} h_i(s) \frac{\partial g_i(u)}{\partial u_j} \geq 0, \ j = 1, 2, \dots, r. \end{cases}$$

Замечание 4. Если функция выручки $f(v, w)$ является линейной по всем своим переменным v и w, то система сопряженных переменных (12), (13) не зависит от фазовых переменных v, w и управления u, следовательно, решение $p^*(s)$ задачи Коши (12), (13) будет соответствовать оптимальному процессу $\{u^*(t), v^*(t), w^*(t)\}$. В этом случае оптимальное управление может быть найдено непосредственно из последовательного решения задачи (14), после подставления $p^*(s)$.

Отметим, что при нахождении оптимального решения поставленной задачи требуется решать краевую задачу в интегро-дифференциальных уравнениях, задачу Коши в интегро-дифференциальных уравнениях, задачу нелинейного программирования, это вызывает необходимость применения численных методов решения. В работе [23] применен модифицированный метод локальных вариаций для линейной модели рекламных расходов с одним медиаканалом. В [20] дана практическая реализация модели для нелинейного случая рекламных расходов с одним медиаканалом. Верификация данных моделей на реальных статистических данных показала эффективность предлагаемого подхода моделирования и возможность применения для построения оптимальных рекламных программ.

Заключение

Оптимальное управление рекламными расходами фирмы, которые при этом могут быть направлены на использование различных медиаканалов, предполагает при разработке стратегии учет множества влияющих на потребительский спрос факторов. При этом, эффект от воздействия рекламы и нерекламных факторов имеет запаздывающий и распределенный во времени характер. В статье была предложена модель рекламных расходов, где в качестве воздействия нерекламных факторов на спрос выступает накопленный фирмой опыт продаж, денежным выражением которых является выручка. В рамках разработанной модели сформулирована задача оптимального управления рекламным бюджетом фирмы. Доказаны теоремы существования решения задачи. Найдены необходимые условия построения оптимальной рекламной программы. Отметим, что ранее авторами также были проведены численные эксперименты для частного случая с одним медиаканалом при линейной и нелинейной зависимостях спроса от накопленных воздействий рекламных и нерекламных факторов, в работах [20, 23] предложены численные методы решения подобных задач оптимального управления.

Работа проводилась при финансовой поддержке государственного задания Министерства образования и науки РФ №2.1816.2017/4.6.

Литература

1. Granger, C.W.J. Investigating Causal Relations by Econometric Model and Cross-Spectral Methods / C.W.J. Granger // Econometrica. – 1969. – V. 37, № 3. – P. 424–438.
2. Bensoussan, A. A Generalization of the Nerlove-Arrow Optimality Condition / A. Bensoussan, A. Bultez, P. Naert. – Brussels, European Institute for Advanced Studies in Management, 1973.
3. Pauwels, W. Optimal Dynamic Advertising Policies in the Presence Of Continuously Distributed Time Lags / W. Pauwels // Journal of Optimization Theory and Applications. – 1977. – V. 22, № 1. – P. 79–89.
4. Лутошкин, И.В. Сравнение продаж продукции различных видов в зависимости от рекламных воздействий / И.В. Лутошкин, Е.В. Мартыненко // Известия высших учебных заведений. Серия: Экономика, финансы и управление производством. – 2015. – Т. 3, № 25. – С. 113–121.
5. Nerlove, M. Optimal Advertising Policy Under Dynamic / M. Nerlove, K.J. Arrow // Economica. – 1962. – V. 29, № 114. – P. 129–142.
6. Erickson, G.M. A Differential Game Model of the Marketing-Operations Interface / G.M. Erickson // European Journal of Operational Research. – 2011. – V. 211, № 2. – P. 394–402.
7. Fruchter, G.E. Signaling Quality: Dynamic Price-Advertising Model / G.E. Fruchter // Journal of Optimization Theory and Applications – 2009. – V. 143, № 3. – P. 479–496.
8. Lambertini, L. Advertising in a Dynamic Spatial Monopoly / L. Lambertini // European Journal of Operational Research. – 2005. – V. 166, № 2. – P. 547–556.
9. Giovanni, P.D. Quality Improvement vs. Advertising Support: Which Strategy Works Better for a Manufacturer? / P.D. Giovanni // European Journal of Operational Research. – 2011. – V. 208, № 2. – P. 119–130.

10. Buratto, A. Coordination of Advertising Strategies in a Fashion Licensing Contract / A. Buratto, G. Zaccour // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2009. – V. 142, № 1. – P. 31–53.

11. Vidale, M.L. An Operations-Research Study of Sales Response to Advertising / M.L. Vidale, H.B. Wolfe // Operations Research. – 1957. – V. 5, № 3. – P. 370–381.

12. Deal, K.R. Optimizing Advertising Expenditures in a Dynamic Duopoly / K.R. Deal // Operations Research. – 1979. – V. 27, № 4. – P. 682–692.

13. Mukundan, R. Linear Feedback Strategies in Non-Zero-Sum Differential / R. Mukundan, W.B. Elsner // International Journal of System Science. – 1975. – V. 6, № 6. – P. 513–532.

14. Wang, Q. A Duopolistic Model of Dynamic Competitive Advertising / Q. Wang, A. Wu // European Journal of Operational Research. – 2001. – V. 128, № 1. – P. 213–226.

15. Fershtman, C. Goodwill and Market Shares in Oligopoly / C. Fershtman // Economica. – 1984. – V. 51, № 203. – P. 271–281.

16. He, X.L. Retail Competition and Cooperative Advertising / X.L. He, A. Krishnamoorthy, A. Prasad, S.P. Sethi // Operations Research Letters. – 2011. – V. 39, № 1. – P. 11–16.

17. Fershtman, C. Market Share Pioneering Advantage: a Theoretical Approach / C. Fershtman, M. Vijay, M. Eitan // Management Science. – 1990. – V. 36, № 8. – P. 900–918.

18. Kimball, G.E. Some Industrial Applications of Military Operations Research Methods / G.E. Kimball // Operations Research. – 1957. – V. 5, № 2. – P. 201–204.

19. Buratto, A. Advertising Channel Selection in a Segmented Market / A. Buratto, L. Grosset, B. Viscolani // Automatica. – 2006. – V. 42, № 8. – P. 1343–1347.

20. Lutoshkin, I.V. The Dynamic Model of Advertising Costs with Continuously Distributed Lags / I.V. Lutoshkin, N.R. Yamaltdinova // CEUR Workshop Proceedings. – V. 2018. – P. 103–112.

21. Краснов, М.Л. Интегральные уравнения / М.Л. Краснов. – М.: Наука, 1975.

22. Дмитрук, А.В. Необходимые условия слабого минимума в задачах с интегральными уравнениями / А.В. Дмитрук, Н.П. Осмоловский // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления. – 2014. – С. 709–713.

23. Lutoshkin, I.V. The Dynamic Model of Advertising Costs / I.V. Lutoshkin, N.R. Yamaltdinova // ECECSR Journal. – 2018. – V. 52, № 1. – P. 201–214.

Игорь Викторович Лутошкин, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой, кафедра «Цифровая экономика», Ульяновский государственный университет (г. Ульяновск, Российская Федерация), lutoshkiniv@ulsu.ru.

Наиля Ринатовна Ямалтдинова, ассистент, кафедра «Цифровая экономика», Ульяновский государственный университет (г. Ульяновск, Российская Федерация), ynr92@yandex.ru.

Поступила в редакцию 1 февраля 2019 г.

MSC 91B55, 49K21, 49J21 **DOI: 10.14529/mmp190404**

MATHEMATICAL MODEL OF MULTICHANNEL ADVERTISING MANAGEMENT WITH CONTINUOUSLY DISTRIBUTED LAGS

I.V. Lutoshkin[1], ***N.R. Yamaltdinova***[1]
[1]Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russian Federation
E-mails: lutoshkiniv@ulsu.ru, ynr92@yandex.ru

The dynamic model of optimal distribution of advertising costs on the planning period is analyzed. It is assumed that companies can use several media channels of different quality and influence on demand. We consider the delayed reaction of consumers to advertising and non-advertising factors. Unlike such classical dynamic optimization models as Nerlove-Arrow model, Vidal-Wolf model and their extensions, the proposed model takes into account accumulated effects of advertising of several media channels and previous sales. In the framework of the proposed model, we consider the problem of optimal control of advertising costs with a nonlinear Volterra integral equation, which is generated by the natural constraints. The theorem on existence of solution to this equation is proved. Also, we formulate the theorem on existence of solution to the total profit maximization problem for the planning period under restriction. The maximum principle is applied to the problem and the necessary conditions for constructing an optimal strategy are found.

Keywords: mathematical model; advertising strategy; Volterra equation; optimal control; maximum principle; existence of solution.

References

1. Granger C.W.J. Investigating Causal Relations by Econometric Model and Cross-Spectral Methods. *Econometrica*, 1969, vol. 37, no. 3, pp. 424–438.
2. Bensoussan A., Bultezn A., Naert P. *A Generalization of the Nerlove-Arrow Optimality Condition*. Brussels, European Institute for Advanced Studies in Management, 1973.
3. Pauwels W. Optimal Dynamic Advertising Policies in the Presence Of Continuously Distributed Time Lags. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1977, vol. 22, no. 1, pp. 79–89.
4. Lutoshkin I.V., Martynenko E.V. Comparison of Sales of Products of Different Types Depending on Advertising Influences [Sravnenie prodazh produkcii razlichnyh vidov v zavisimosti ot reklamnyh vozdeystviy]. *News Of Higher Educational Institutions. A Series: Economy, Finance And Production Management*, 2015, vol. 3, no. 25, pp. 113–121. (in Russian)
5. Nerlove M.K., Arrow J. Optimal Advertising Policy Under Dynamic. *Economica*, 1962, vol. 29, no. 114, pp. 129–142.
6. Erickson G.M. A Differential Game Model of the Marketing-Operations Interface. *European Journal of Operational Research*, 2011, vol. 211, no. 2, pp. 394–402.
7. Fruchter G.E. Signaling Quality: Dynamic Price-Advertising Model. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2009, vol. 143, no. 3, pp. 479–496.
8. Lambertini L. Advertising in a Dynamic Spatial Monopoly. *European Journal of Operational Research*, 2005, vol. 166, no. 2, pp. 547–556.
9. Giovanni P.D. Quality Improvement vs. Advertising Support: Which Strategy Works Better for a Manufacturer? *European Journal of Operational Research*, 2011, vol. 208, no. 2, pp. 119–130.

10. Buratto A., Zaccour G. Coordination of Advertising Strategies in a Fashion Licensing Contract. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2009, vol. 142, no. 1, pp. 31–53.
11. Vidale M.L., Wolfe H.B. An Operations-Research Study of Sales Response to Advertising. *Operations Research*, 1957, vol. 5, no. 3, pp. 370–381.
12. Deal K.R. Optimizing Advertising Expenditures in a Dynamic Duopoly. Operations Research, 1979, vol. 27, no. 4, pp. 682–692.
13. Mukundan R.W., Elsner B. Linear Feedback Strategies in Non-Zero-Sum Differential International. J*ournal of System Science*, 1975, vol. 6, no. 6, pp. 513–532.
14. Wang Q., Wu A. A Duopolistic Model of Dynamic Competitive Advertising. *European Journal of Operational Research*, 2001, vol. 128, no. 1, pp. 213–226.
15. Fershtman C. Goodwill and Market Shares in Oligopoly. *Economica*, 1984, vol. 51, no. 203, pp. 271–281.
16. He X.L., Krishnamoorthy A., Prasad A., Sethi S.P. Retail Competition and Cooperative Advertising. *Operations Research Letters*, 2011, vol. 39, no. 1, pp. 11–16.
17. Fershtman C., Vijay M., Eitan M. Market Share Pioneering Advantage: A Theoretical Approach. *Management Science*, 1990, vol. 36, no. 8, pp. 900–918.
18. Kimball G.E. Some Industrial Applications of Military Operations Research Methods. *Operations Research*, 1957, vol. 5, no. 2, pp. 201–204.
19. Buratto A., Grosset L., Viscolani B. Advertising Channel Selection in a Segmented Market. *Automatica*, 2006, vol. 42, no. 8, pp. 1343–1347.
20. Lutoshkin I.V., Yamaltdinova N.R. The Dynamic Model of Advertising Costs with Continuously Distributed Lags. *CEUR Workshop Proceedings*, vol. 2018, pp. 103–112.
21. Krasnov M.L. *Integral Equation* [Integral'nye uravneniya]. Moscow, Nauka, 1975. (in Russian)
22. Dmitruk A.V., Osmolovskiy N.P. *Neobhodimye usloviya slabogo minimuma v zadachah s integral'nymi uravneniyami* [The Necessary Conditions for a Weak Minimum in Problems with Integral Equation]. Proceedings of the XII Russian Meeting on Management Problems, 2014, pp. 709–713. (in Russian)
23. Lutoshkin I.V., Yamaltdinova N.R. The Dynamic Model of Advertising Costs. *ECECSR Journal*, 2018, vol. 52, no. 1, pp. 201–214.

Received February 1, 2019