На правах рукописи

Назарова Елена Игоревна

Численное исследование математических моделей оптимального измерения

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Челябинск – 2012

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (НИУ).

Научный руководитель д-р физ.-мат. наук, доц. Келлер Алевтина Викторовна.

Официальные оппоненты:
Кадченко Сергей Иванович, д-р физ.-мат. наук, проф., ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный университет», зав. каф. прикладной математики и вычислительной техники;
Кризский Владимир Николаевич, д-р физ.-мат. наук, проф., Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, проректор по научной работе и инновационной деятельности.

Ведущая организация ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет».

Защита состоится 12 декабря 2012 года в 14.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.298.14 при ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (НИУ), по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, ауд. 1001.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВПО «Южно-Уральскоий государственный университет» (НИУ).

Автореферат разослан « 8 » ноября 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Келлер Алевтина Викторовна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Повышение требований, предъявляемых к качеству измерений в различных сферах практической и научной деятельности (метрологии[1], энергетике[2], геофизике[3] и др.), определяет необходимость развития математического аппарата для решения основных задач динамики при измерениях, не зависящих от физической природы измеряемых величин. Диссертационная работа посвящена разработке численного метода исследования *задачи оптимального измерения* с учетом инерционности измерительного устройства (ИУ), являющейся математической моделью задачи восстановления динамически искаженных сигналов; применению представленного метода и алгоритма к задаче оптимального измерения покупательского поведения.

В целом, в измерительных системах отсутствуют связи с выхода на вход, однако, удается создать структуры корректирующих устройств, в которых может быть реализовано модальное управление – управление, при котором достигается требуемый характер переходных процессов за счет обеспечения необходимого расположения корней характеристического полинома на комплексной плоскости. К такому виду относится измерительная система с модальным управлением динамическими характеристиками на основе модели датчика, предложенная профессором А. Л. Шестаковым[4]. Им и его учениками – М. Н. Бизяевым, Д. Ю. Иосифовым, Е. В. Солдаткиной и др. – разработаны методы решения задач динамических измерений, позволяющие восстанавливать входной сигнал датчика по его измеренному выходному сигналу. Эти методы основаны на изменении структуры модели датчика или рассмотрении различных режимов его работы, в т.ч. адаптация параметров измерительной системы, применение скользящего режима. При этом решается с математической точки зрения некорректная задача.

---

[1]Грановский, В. А. Динамические измерения: Основы метрологического обеспечения. – Л.: Энергоиздат. Ленингр. отделение, 1984. – 224 с.

[2]Ефимов, В. Г., Ложкова, Ю. Н., Митин, А. Г. Ультразвуковая система динамических измерений для исследования твердотопливных энергетических установок // Ползунов. вестн. – Барнаул, 2011. – № 3/1. – С. 184–188.

[3]Кризский, В. Н., Герасимов, И. А., Заваруева, М. Б. Математическое моделирование и оптимизация обратных задач определения геоэлектрических параметров кусочно-однородных сред // Математическое моделирование. – 2000. – Т. 12, № 3. – С. 32–33.

[4]Шестаков, А. Л. Динамическая точность измерительного преобразователя с корректирующим устройством в виде модели датчика // Метрология. – 1987. – № 2. – С. 26–34.

Методы теории динамических измерений нашли применение и в экономической кибернетике при построении динамических моделей экономических систем[5]. При этом ставится прямая задача, состоящая в определении выхода по известному входу системы при наличии обратных связей. Предлагаемая в диссертационной работе математическая модель задачи оценки покупательского и потребительского поведения решает ранее не рассматривавшуюся обратную задачу: по задаваемым плановым показателям необходимо оценить, какое количество покупателей различных сегментов требуется привлечь в экономическую систему.

В работах С. А. Аникина рассматриваются задачи идентификации входов динамических систем на основе методов регуляризации и оценивается погрешность применяемых методов. Однако, основополагающим является требование невырожденности матриц при производных, что существенно сужает круг рассматриваемых задач. Отличие представленной работы состоит в том, что разработанные методы решения могут быть применены также в случае вырожденности матрицы при производной.

В работах А. В. Ильина, С. К. Коровина и В. В. Фомичева решаются вопросы робастного (помехоустойчивого) обращения динамических систем. Методы исследования связаны с приведением систем к специальным каноническим видам (с выделением нулевой динамики). При этом на начальных этапах решения определяются точки спектра матриц, что в общем случае является сложной математической задачей. В данной работе предлагается подход, основанный на применении методов теории оптимального управления системами леонтьевского типа, не требующих определения точек спектра, что повышает точность решения задач.

Системы леонтьевского типа являются частным, конечномерным случаем линейных неоднородных уравнений соболевского типа, исследованиями которых активно занимаются как в России, так и за рубежом. Так, уравнения неразрешенные относительно производных рассматривались в работах В. Н. Врагова, Г. В. Демиденко, А. И. Кожанова, М. О. Корпусова, С. Г. Крейна, И. В. Мельниковой, С. Г. Пяткова, А. Г. Свешникова, С. Л. Соболева, A. Favini, J. H. A. Lightbourne, A. Yagi, и др. Исследованиям начальных задач для дифференциальных уравнений посвящены ра-

[5]Царьков, В. А. Использование методов теории автоматического управления при построении и анализе динамических моделей экономики производства // Измерения. Контроль. Автоматизация. – 1984. – № 4. – С. 66–78.

боты Н. А. Сидорова, R. E. Showalter, начальных задач для вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений – Ю. Е. Бояринцева, В. Ф. Чистякова, М. В. Булатова. Задачи оптимального управления вырожденными системами рассматривают Г. А. Курина, А. А. Щеглова, P. C. Müller, L. Pandolfi, S. L. Campbell, W. J. Terrell. В основе методов и алгоритмов данного исследования лежит теория уравнений соболевского типа, разработанная Г. А. Свиридюком[6] и развитая в работах его учеников – С. В. Брычева, И. В. Бурлачко, А. А. Ефремова, А. А. Замышляевой, А. В. Келлер, Н. А. Манаковой, В. Е. Федорова, и др.

Предпосылкой для представленного исследования стала работа А. Л. Шестакова и Г. А. Свиридюка[7], в которой впервые была сформулирована задача определения входа динамических систем как задача оптимального управления системами леонтьевского типа. В основе численного метода исследования математической модели ИУ и решения задач оптимального измерения с учетом инерционности лежат алгоритмы численного решения систем леонтьевского типа и класса задач оптимального управления для систем леонтьевского типа с начальными условиями Шоуолтера–Сидорова, разработанные А. В. Келлер[8]. Отметим, что постановка задачи Шоуолтера–Сидорова является значимой, т.к. позволяет исследовать модели без дополнительных ограничений на начальные условия и размерность исходных данных.

Таким образом, актуальным является исследование и решение *задачи оптимального измерения* с учетом инерционности ИУ, представляющей собой математическую модель задачи восстановления динамически искаженных сигналов.

Пусть L, M и C – квадратные матрицы порядка n, причем, быть может, $\det L = 0$, матрица M – (L,p)-регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ – порядок полюса точки ∞ L-резольвенты матрицы M, $u : [0,\tau] \to \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{R}_+$. Рассмотрим *пространство состояний* $\chi = \{x \in L_2\left((0,\tau),\mathbb{R}^n\right) : \dot{x} \in L_2\left((0,\tau),\mathbb{R}^n\right)\}$, *пространство измерений* $\mathfrak{U} = \left\{u \in L_2\left((0,\tau),\mathbb{R}^n\right) : u^{(p+1)} \in L_2\left((0,\tau),\mathbb{R}^n\right)\right\}$ и

[6]Sviridyuk, G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. – Utrecht - Boston - Tokyo - Köln: VSP, 2003. – 216 pp.

[7]Шестаков, А. Л., Свиридюк, Г. А. Оптимальное измерение динамически искаженных сигналов // Вестн. ЮУрГУ. Сер. «Мат. моделирование и программирование». – 2011. – № 17(234), вып. 8. – С. 70–75.

[8]Келлер, А. В. Об алгоритме решения задач оптимального и жесткого управления // Программные продукты и системы. – Тверь, 2011. – № 3.– С. 170–174.

пространство наблюдений $\mathfrak{Y} = C[\chi]$. Выделим в $\mathfrak{U}$ компактное выпуклое подмножество $\mathfrak{U}_\partial$ – *множество допустимых измерений*. В качестве допустимых измерений рассматриваются такие, что

$$\sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \left\| u^{(q)}(t) \right\|^2 dt \leq d,$$

где $d = const$ – предельно допустимое значение вектор-функции измерений. Требуется найти вектор-функцию $v \in \mathfrak{U}_\partial$, минимизирующую значение функционала

$$J(u) = \sum_{q=0}^{1} \int_0^\tau \left\| Cx^{(q)}(u,t) - y_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt, \tag{1}$$

т.е.

$$J(v) = \min_{u \in \mathfrak{U}_\partial} J(u), \tag{2}$$

причем $x(v) \in \chi$ почти всюду на $(0, \tau)$ удовлетворяет системе леонтьевского типа

$$L\dot{x} = Mx + Bu \tag{3}$$

и при некоторых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \rho^L(M)$ – условию Шоуолтера–Сидорова

$$\left[(\alpha L - M)^{-1} L \right]^{p+1} (x(0) - x_0) = 0. \tag{4}$$

Здесь $x = col\,(x_1, \ldots, x_n)$ и $\dot{x} = col\,(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ – вектор-функции состояния и скорости изменения состояния ИУ соответственно; $y_0(t) = col\,(y_{01}(t), \ldots, y_{0n}(t))$ – наблюдение в моменты времени t, полученное в ходе натурного эксперимента; $u = col\,(u_1, \ldots, u_n)$ – вектор-функция измерений; $y = col\,(y_1, \ldots, y_n)$ – вектор-функция наблюдений; n – число параметров состояний системы; B – квадратная матрица порядка n, характеризующая взаимовлияние параметров измерения; матрицы M и L характеризуют взаимовлияние состояния и скоростей состояния ИУ соответственно; матрица C характеризует связь между состоянием системы и наблюдением; $\| \cdot \|$ – евклидова норма пространства $\mathbb{R}^n$.

Цель и задачи работы. Цель – разработка численного метода и алгоритма программы для решения задач оптимального измерения с учетом инерционности на основе математических моделей динамических систем.

Для достижения данной цели поставлены следующие задачи:

1. Численное исследование математической модели ИУ с учетом его инерционности как модели леонтьевского типа.

2. Разработка численного метода решения задачи оптимального измерения с учетом инерционности ИУ, доказательство сходимости приближенных решений к точному.

3. Программная реализация предложенного алгоритма решения задачи оптимального измерения с учетом инерционности ИУ, проведение вычислительного эксперимента.

4. Построение математической модели задачи изучения покупательского поведения на основе задачи оптимального измерения, адаптация численного алгоритма к решению задачи оптимального измерения покупательского поведения.

Методы исследования. В работе используются методы математического моделирования, теории динамических измерений, теории вырожденных (полу)групп и оптимального управления для уравнений соболевского типа, численный метод решения задачи жесткого управления для систем леонтьевского типа.

Научная новизна диссертации заключается в разработке численного метода исследования математических моделей оптимального измерения с учетом инерционности при решении задач:

– восстановления динамически искаженных сигналов;

– определения влияния рассматриваемого ИУ на сигнал (степени его сглаживания и величины запаздывания).

Доказана сходимость по норме приближенных решений к точному. Алгоритм численного решения реализован в виде программы, написанной на языке программирования высокого уровня. Впервые разработана модель оптимального измерения потребительского поведения, для исследования которой применим предложенный в диссертации численный метод. Представленные методы исследования не накладывают ограничений на начальные данные и размерность исходных матриц.

Теоретическая значимость работы заключается в решении актуальных задач измерений с применением современного математического аппарата. Полученные результаты развивают теории динамических измерений и балансовых моделей, расширяют применимость численных методов решения задач оптимального управления и создают основу для дальнейшего развития моделирования в технике и экономике.

Практическая значимость заключается в применении результатов исследования к решению проблем восстановления и изучения динамически искаженных сигналов. Представленные вычислительные эксперименты показывают адекватность проведенного математического моделирования и эффективность выбранного численного метода решения задач оптимального измерения с учетом инерционности, что создает основу для дальнейшего развития численных исследований моделей динамических систем. Реализация алгоритма в виде программы, написанной на языке программирования C++, позволяет в дальнейшем провести распараллеливание процессов для увеличения скорости вычислений.

Апробация работы. Результаты, изложенные в диссертации, были представлены на X Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Сочи, 2009); Воронежской зимней математической школе С.Г. Крейна (Воронеж, 2010); XI Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Красноярск, 2010); Всероссийском научном семинаре «Неклассические уравнения математической физики», посвященном 65-летию со дня рождения профессора В.Н. Врагова (Якутск, 2010); Всероссийском научном семинаре «Неклассические уравнения математической физики» (Новосибирск, 2010); Международной конференциии «Алгоритмический анализ неустойчивых задач», посвященной памяти В. К. Иванова (Екатеринбург, 2011), Всероссийской конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» (Самара, 2011), Международной научно-практической конференции «Измерения: состояние, перспективы развития» (Челябинск, 2012).

Результаты докладывались на семинарах «Уравнения соболевского типа» профессора Г. А. Свиридюка в ЮУрГУ (г. Челябинск), на семинаре МаГУ под руководством профессора С. И. Кадченко (г. Магнитогорск) и семинаре кафедры математического моделирования факультета математики и естественных наук СГПА им. Зайнаб Биишевой (г. Стерлитамак).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 12 научных работах, в их числе 3 статьи в ведущих российских рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК, и свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ. Список работ приводится в конце автореферата. В совместных с научным руководителем работах научному руководителю принадлежит постановка задачи, в диссертацию вошли только результаты, полученные ее автором.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения. Объем диссертации составляет 118 страниц. Список литературы содержит 125 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во введении представлена постановка задачи, определяются цель и задачи работы, описаны методы исследования, обосновываются актуальность, теоретическая и практическая значимость исследования.

Первая глава состоит из пяти параграфов и содержит формулировки теорем и определения, которые используются при получении основных результатов диссертации. В п. 1.1 приведены определения и теоремы об относительно p-ограниченных операторах, теорема о существовании единственного решения уравнения соболевского типа с условием Шоуолтера–Сидорова. В п. 1.2. представлены определения и теоремы об относительно p-радиальных операторах, теорема о существовании единственного сильного решения задачи Шоуолтера–Сидорова для уравнения соболевского типа. В п. 1.3 содержатся сведения об относительно p-регулярных матрицах[9]. Пусть L и M – квадратные матрицы порядка n. Матрица M называется (L,p)-*регулярной*, если $\exists\alpha \in \mathbb{C}$ такое, что $\det(\alpha L - M) \neq 0$, при этом $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ – порядок полюса в точке ∞ L–резольвенты $(\mu L - M)^{-1}$ матрицы M. В п. 1.4 рассматривается задача Шоуолтера–Сидорова

$$\left[(\alpha L - M)^{-1} L\right]^{p+1} (x(0) - x_0) = 0 \tag{5}$$

для системы леонтьевского типа

$$L\dot{x} = Mx + f, \tag{6}$$

где $\det L = 0$, $\alpha \in \rho^L(M)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, вектор-функция $f : [0,\tau] \to \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{R}_+$. В конечномерном случае (L,p)-ограниченный оператор представляет собой (L,p)-регулярную матрицу. В свою очередь, случай (L,p)-радиальности оператора является более общим, по сравнению с (L,p)-ограниченностью оператора M, поэтому справедлива теорема

[9] Свиридюк, Г. А., Брычев, С. В. Численное решение систем уравнений леонтьевского типа // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 8. – С. 46–52.

Теорема 1 (1.4.4)[10]**.** *Пусть матрица M (L,p)-регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, вектор-функция $f : [0,\tau] \to \mathbb{R}^n$. Тогда для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существует единственное решение задачи (5), (6), имеющее вид*

$$x(t) = \lim_{k\to\infty} x_k(f,t) = \lim_{k\to\infty} \left[-\sum_{q=0}^{p} \left(M^{-1}(\mathbb{I}-Q_k)L\right)^q M^{-1}(\mathbb{I}-Q_k) f^{(q)}(t) + \right.$$

$$\left. + X_k^t x_0 + \int_0^t R_k^{t-s} Q_k f(s) ds \right], \tag{7}$$

где

$$X_k^t = \left[\left(L - \frac{t}{k(p+1)} M \right)^{-1} L \right]^{k(p+1)}, \qquad Q_k = \left[k L_k^L(M) \right]^{p+1},$$

$$R_k^t = \left[\left(L - \frac{t}{k(p+1)} M \right)^{-1} L \right]^{k(p+1)-1} \left(L - \frac{t}{k(p+1)} M \right)^{-1}. \tag{8}$$

Вектор-функция $x_k(f,t)$ является *приближенным решением задачи* (5), (6) при $t \in [0,1]$, $k > K$, где $K = max\{k_1, k_2\}$:

$$k_1 > \frac{1}{|\alpha_{n-p}|} \sum_{i=0}^{n-p} |\alpha_i| + 1, \qquad k_2 > \frac{1}{|\alpha_{n-p}|\, p^p} \sum_{i=0}^{n-p} |\alpha_i| \, (p+1)^{n-i} + 1, \tag{9}$$

здесь $\alpha_i = (-1)^{n-i} \sum\limits_{r=1}^{C_n^{n-i}} \Delta_{n-i}^r$ – коэффициенты полинома $\det(\mu L - M)$ степени $(n-p)$, $i = \overline{0,n}$, Δ_{n-i}^r – определители, получаемые из определителя матрицы L путем замены $(n-i)$ столбцов соответствующими столбцами матрицы M, r – порядковый номер определителя, $(n-p) \leq \mathrm{rank} L$.

По виду функционала качества задача оптимального измерения относится к задачам жесткого управления, поэтому в п. 1.5 рассматривается задача жесткого управления для систем леонтьевского типа, сформулирована теорема о существовании единственного решения задачи и описана основа алгоритма нахождения приближенного ее решения.

[10]В скобках указана нумерация в диссертации

Вторая глава состоит из пяти параграфов и содержит результаты математического моделирования в задачах динамических измерений. *Динамическая модель* ИУ описывается системой

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \tilde{B}\hat{u}, \\ \hat{y} = \tilde{C}x, \end{cases} \tag{10}$$

где $x = col\,(x_1, \ldots, x_n)$ и $\dot{x} = col\,(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ – вектор-функции состояния и скорости изменения состояния ИУ соответственно, $x_0 = col(0, \ldots, 0)$; $\hat{u} = col\,(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_m)$ и $\hat{y} = col\,(\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_l)$ – функции входного (измеряемого) и выходного (наблюдаемого) сигналов соответственно; матрицы ИУ A, датчика $\tilde{B}$ и выхода $\tilde{C}$ размерности соответственно $[n \times n]$, $[n \times m]$ и $[l \times n]$. А. Л. Шестаковым и Г. А. Свиридюком[11] впервые было предложено применить теорию уравнений соболевского типа и вырожденных (полу)групп операторов для изучения данной модели. В п. 2.1 рассматривается *математическая модель* ИУ

$$L\dot{z} = Mz + Du, \tag{11}$$

$$\left[(\alpha L - M)^{-1} L\right]^{p+1} (z(0) - z_0) = 0, \tag{12}$$

где L, M, D – квадратные матрицы порядка $h = n + l$, строящиеся по матрицам A, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ следующим образом

$$L = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}_l \end{pmatrix}, \; M = \begin{pmatrix} A & \mathbb{O} \\ \tilde{C} & -\mathbb{I}_l \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} \tilde{B} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

$z = col\,(x_1, \ldots, x_n, \hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_l)$, $z_0 = col(0, \ldots, 0)$, $u = col\,(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_m, 0, \ldots, 0)$, $u : [0, \tau] \to \mathbb{R}^h$, $\alpha \in \rho^L(M)$, $t \in [0, \tau]$, $\tau \in \mathbb{R}_+$. Вид точного решения задачи (11), (12) определяется в соответствии с теоремой 1 (1.4.4). В п. 2.2 описан алгоритм численного решения задачи (11), (12). В данном случае задача численного исследования математической модели ИУ состоит в определении степени сглаживания пикообразного значения измеряемого сигнала датчика и величины его запаздывания. Так для динамической модели ИУ (10), заданной матрицами

$$A = \begin{pmatrix} -44 & 0 \\ -117 & -16 \end{pmatrix}, \; \tilde{B} = \begin{pmatrix} -0,594 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix},$$

[11]Шестаков, А. Л., Свиридюк, Г. А. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов // Вестн. ЮУрГУ. Сер. «Мат. моделирование и программирование». – 2010. – № 16(192). вып. 5. – С. 116–120.

если известно, что

$$0,594u(t) = 15\sin^2(\pi t),$$

было найдено приближенное значение наблюдаемого сигнала (рис. 1).

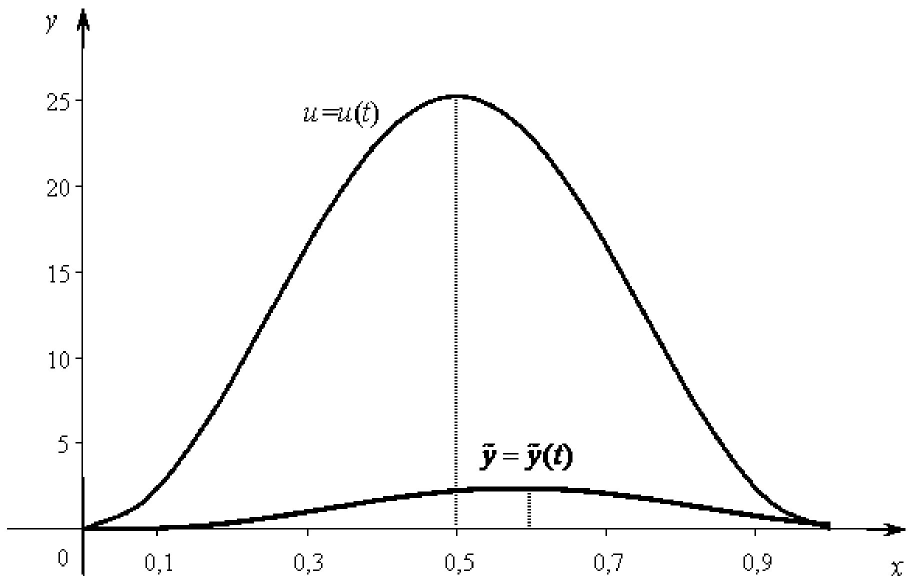

Рис.1 Измеряемый сигнал $u = u(t)$ и приближенное значение наблюдаемого сигнала $\tilde{y} = \tilde{y}(t)$.

В п. 2.1 найдено точное решение этой же задачи, абсолютная погрешность приближенных вычислений порядка не более 10^{-3}, относительная погрешность не превышает 1%. В п. 2.3 сформулирован, основанный на критерии Рауса–Гурвица[12], критерий устойчивости модели ИУ. Если измерительный канал обладает свойством устойчивости по отношению к помехам, а модель датчика близка по своим параметрам к датчику, то при близких значениях сигнала на входе от датчика и модели датчика значения на выходе также будут мало различаться.

В п. 2.4 рассматривается математическая модель задачи восстановления динамически искаженных сигналов – *задача оптимального измерения* с учетом инерционности ИУ (1)–(4). Основные результаты работы базируются на теореме о существовании единственного решения задачи оптимального измерения, являющейся адаптированным на конечномерный случай

[12] Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

вариантом теоремы о существовании единственного решения задачи жесткого управления для уравнений соболевского типа, доказанной в работах В. Е. Федорова и М. В. Плехановой[13].

Теорема 2 (2.4.1). *Пусть матрица M (L,p)-регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, $\det M \neq 0$. Тогда для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathfrak{Y}$ существует единственное решение $v \in \mathfrak{U}_\partial$ задачи (1)–(4), являющееся оптимальным измерением.*

В п. 2.5. приведена модель задачи оптимального измерения покупательского поведения. Исходя из экономического смысла слагаемых в (3), вводятся дополнительные условия в постановку задачи.

Третья глава состоит из четырех параграфов и посвящена численным исследованиям задачи оптимального измерения с учетом инерционности. В п. 3.1 описан алгоритм численного решения задачи оптимального измерения, в т.ч. и основные этапы оптимизации функционала качества и процедуры проверки введенного дополнительного условия. В п. 3.2 обосновываются непрерывность, ограниченность функционала качества задачи оптимального измерения и доказывается его сильная выпуклость на множестве допустимых измерений.

Определение. Функция $J(\cdot)$ называется *сильно выпуклой* на выпуклом множестве $\mathfrak{U} \in \mathbb{R}^n$, если $\forall u \in \mathfrak{U}$, $\forall v \in \mathfrak{U}$, $\forall \alpha \in [0,1]$ и для некоторого числа $q > 0$ выполняется неравенство

$$J(\alpha u + (1-\alpha)w) \leq \alpha J(u) + (1-\alpha)J(w) - \alpha(1-\alpha)q\|u-w\|^2.$$

Доказывается теорема о сходимости по норме приближенных решений задачи оптимального измерения.

Теорема 3 (3.2.2). *Пусть матрица M (L,p)-регулярна, $p \in \{0\} \bigcup \mathbb{N}$, $\det M \neq 0$, функционал (1) является сильно выпуклой функцией на компактном и выпуклом множестве $\mathfrak{U}_\partial \subset \mathfrak{U}$. Тогда, $J_k(v_k^l) \to J(v)$, $v_k^l \to v$, причем выполняется неравенство*

$$q\|v_k^l - v\|^2 \leq J_k(v_k^l) - J(v),$$

при $k \geq K$, $l > p$.

В п. 3.3 приведено описание программы, реализующей алгоритм численного решения задачи оптимального измерения с учетом инерционности,

[13]Федоров, В. Е., Плеханова, М. В. Задача оптимального управления для одного класса вырожденных уравнений // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2004. –Т.9, № 2. – С. 92–102.

приведены и описаны основные блок-схемы алгоритма. В п. 3.4 приводятся результаты вычислительного эксперимента, где динамическая модель ИУ:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2\cdot 10^6 & -3,8\cdot 10^4 & -3,4\cdot 10^2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\cdot 10^6 \cdot \hat{u} \end{pmatrix}, \\ \hat{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x. \end{cases}$$

Реализовав четвертый шаг алгоритма при $l = 20$, получили $p = 0$, $k = 88796$ и, т.к. $\det M \neq 0$, делаем вывод, что все условия теоремы 2 (2.4.1) выполнены. Значит, существуют как точное решение v, так и последовательность приближенных решений v_k^l задачи (1)–(4) при $k > 88796$. Причем v_k^l минимизирует функционал J_k на некотором выпуклом компакте $\mathfrak{U}_\partial^l$, в качестве которого можно взять замкнутый шар в пространстве $\mathbb{R}^{l+1}$ радиуса 3 с центром в начале координат (учитывая, что значения измеряемого сигнала не превосходят 3). График функции восстановленного сигнала и значения выходного сигнала, полученного в результате натурного эксперимента, представлены на рис. 2.

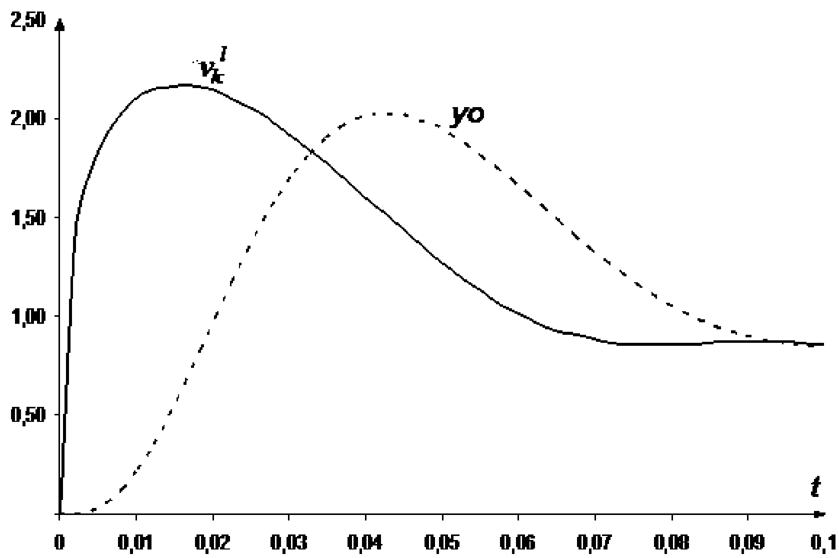

Рис. 2 Восстановленный сигнал v_k^l и значения наблюдения y_0

В заключении представлены выводы по результатам исследований и соответствие работы паспорту специальности 05.13.18.

В приложении представлено свидетельство о регистрации программы «Optimal measuring problem», реализующей алгоритм численного решения задачи оптимального измерения.

Результаты, выносимые на защиту.

1. Разработан численный метод решения задач оптимального измерения с учетом инерционности.

2. Доказана сходимость по норме получаемых приближенных решений задачи оптимального измерения к точному.

3. Реализован эффективный численный метод и алгоритм в виде программы, написанной на языке программирования C++.

4. Построена математическая модель задачи оптимального измерения покупательского поведения и адаптирован алгоритм численного решения задачи.

5. Проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие эффективность предложенных алгоритмов, методов и подходов.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в ведущих российских рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК:

1. *Назарова, Е. И.* Свойство регуляризуемости и численное решение задачи динамического измерения / А. В. Келлер, Е. И. Назарова // Вестн. Юж-Урал. гос. ун-та. Сер. «Мат. моделирование и программирование». – 2010. – № 16(192), вып. 5. – С. 32–38.

2. *Назарова, Е. И.* Задача оптимального измерения: численное решение, алгоритм программы / А. В. Келлер, Е. И. Назарова // Изв. Иркут гос. ун-та. Сер. Математика. – 2011. – Т. 4, № 3. – С. 74–82.

3. *Назарова, Е. И.* Численное решение задачи оптимального измерения / А. Л. Шестаков, А. В. Келлер, Е. И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 107–115.

Другие научные публикации:

4. *Назарова, Е. И.* Optimal measuring problem (optimeas problem): свидетельство 2010617899 / Келлер А. В., Назарова Е. И. (RU); правообладатель ГОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет». – 210615082; заявл. 16.08.2010; зарегистр. 01.12.2010, Реестр программ для ЭВМ.

5. *Назарова, Е. И.* Исследование устойчивости решений в моделях леонтьевского типа / А. В. Келлер, Е. И. Назарова // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. работ / под ред. А. И. Кожанова. – Новосибирск, 2010. – С. 129-135.

6. *Назарова, Е. И.* Численное решение задачи жесткого стартового управления для системы уравнений леонтьевского типа / А. В. Келлер, Е. И. Назарова // Обозрение приклад. и пром. математики. – М., 2009. – Т. 16, вып. 6. – С. 1099–1100.

7. *Назарова, Е. И.* О численном решении задачи динамического измерения как задачи жесткого оптимального управления / А. В. Келлер, Е. И. Назарова // Всероссийский научный семинар «Неклассические уравнения математической физики», посвященный 65-летию со дня рождения профессора В.Н. Врагова. (10–13 ноября 2010 г.): тез. докл. – Якутск, 2010. – Ч. 1 – С. 67–70.

8. *Назарова, Е. И.* Об устойчивости решений систем леонтьевского типа / А. В. Келлер, Е. И. Назарова // Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна–2010: тез. докл. – Воронеж, 2010. – С. 78–79.

9. *Назарова, Е. И.* Об алгоритме решения задачи оптимального измерения / Е. И. Назарова // XI Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям: тез. докл. – Красноярск, 2010. – С. 33–34.

10. *Назарова, Е. И.* Об устойчивости решения задачи динамических измерений / Е. И. Назарова // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: тез. докл. Междунар. конф., посвящ. памяти В. К. Иванова, Екатеринбург, 31 окт.–5 нояб. 2011 г. – Екатеринбург, 2011. – С. 255–256.

11. *Назарова, Е. И.* Численное решение одной задачи оптимальных измерений / Е. И. Назарова // СамДиф-2011: конф. «Дифференциальные уравнения и их приложения», Самара, 26-30 июня 2011 г.: тез. докл. – Самара, 2011. – С. 79–80.

12. *Назарова, Е. И.* Модель оптимального измерения покупательского поведения с учетом инерционности экономической системы / Е. И. Назарова // Измерения: состояние, перспективы развития: тез.докл. междунар. науч.-практ. конф., г. Челябинск, 25-27 сент. 2012 г. В 2 т. – Челябинск, 2012. – Т. 1. – С. 179–181.

Типография «Два комсомольца»

Подписано в печать 06.11.12. Формат 60 × 84 1/16.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 1,87. Уч.-изд. л. 2.
Тираж 100 экз. Заказ 142/456

Отпечатано в типографии «Два комсомольца».
454008, г. Челябинск, Комсосольский пр., 2