УДК 517.929

О СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОПЕРАТОРОВ ВНУТРЕННЕЙ СУПЕРПОЗИЦИИ

Л.А. Минаждинова

В теории уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа важную роль играет оператор внутренней суперпозиции, действующий в лебеговом пространстве суммируемых функций. В статье рассматривается сходимость последовательности таких операторов. Функции, на которых определены операторы внутренней суперпозиции, заданы на локально компактном пространстве с мерами, определяемыми самими операторами.

Будем обозначать через R – пространство действительных чисел, T – локально компактное пространство, счетное в бесконечности, λ – положительная мера на T. Через $L_p^{\lambda}(T)$, $p\in[1,\infty]$ обозначим банахово пространство суммируемых в степени p относительно меры λ функций $y:T\to R$ с нормой $\|y\|_{L_p^n(T,\lambda)}=(\int|y(t)|^p d\lambda(t))^{\frac{1}{p}}$.

Пусть $T_1\supseteq T$. Зададим отображение $\tau:T\to T_1$ и $q:T\to R$. Обозначим $E=\{t\in T:\tau(t)\in T\}$ и χ_E – характеристическая функция множества E.

Оператор внутренней суперпозиции S зададим равенством

$$(Sy)(t)=\begin{cases} q(t)y(\tau(t)), & \tau(t)\in T,\\ 0, & \tau(t)\notin T,\end{cases}\quad y:T\to R.$$

В дальнейшем оператор S нам будет удобнее записывать в виде

$$(Sy)(t)=\chi_E(t)q(t)y(\tau(t)).$$

Сужение функции /меры / f на множество A обозначим через f_A. Через $K(T)$ обозначено пространство функций $y:T\to R$ с компактным носителем.

Придерживаясь обозначений и терминологии Н. Бурбаки [3], пару (π,g) будем называть λ-приспособленной (здесь $\pi:T\to T_1$, $g:T\to R$, $g\ge 0$, λ – положительная мера на T), если функции π и g λ-измеримы и для любой функции $f\in K(T)$ отображение $t\to g(t)f(\pi(t))$ λ-интегрируемо. Всякая λ-приспособленная пара (π,g) определяет на T_1 меру μ, которая задается равенством

$$\int f(s)d\mu(s)=\int g(t)f(\pi(t))d\lambda(t),\quad f\in K(T_1).$$

Меру μ будем обозначать через $\pi(g\lambda)$.

Приведем теорему из [4], условия которой обеспечивают действие оператора внутренней суперпозиции.

Теорема 1. *Пусть $p\in[1,\infty]$, λ – положительная мера на T, пара $(\tau_E,|q_E|^p)$ λ_E-приспособлена и $|q_E|^p$ ограничена. Пусть далее существуют такие неотрицательные числа α, Δ, что для любого λ-измеримого множества $A\subset T$ множество $\tau^{-1}(A)\cap\{t\in E:|q(t)|>0\}$ λ-измеримо и*

$$\lambda(\tau^{-1}(A)\cap\{t\in E:|q(t)|>0\})\le\alpha\lambda(A)+\Delta.$$

Тогда 1) Существуют положительная мера ν на T и числа M такие, что пара $(\tau_E,|q_E|^p)$ ν_E-приспособлена и $\mu=\tau_E(|q_E|^p\nu_E)\le M\nu$; 2) для любой ν-интегрируемой функции y функция $|q_E(.)|^p\cdot|y(\tau_E(.))|$ ν_E-интегрируема.

Следствие. *В условиях теоремы 1 существует мера ν такая, что оператор внутренней суперпозиции S непрерывно отображает пространство $L_p^{\nu}(T)$ в себя.*

Рассмотрим вопрос о сходимости последовательности операторов внутренней суперпозиции.

Пусть $\tau_k : T \to T_1$, $q_k : T \to R$, $E_k = \{t \in T : \tau_k(t) \in T\}$, $k = 0, 1, \ldots$ Зададим операторы внутренней суперпозиции:

$$(S_k y)(t) = \chi_{E_k}(t) q_k(t) y(\tau_k(t)).$$

Здесь будем предполагать, что для числа $p \in [1, \infty]$ и положительной меры λ пары $(\tau_{k E_k}, |q_{k E_k}|^p)$ λ_{E_k}-приспособлены и $|q_{k E_k}|^p$ ограничены. Далее, существуют такие числа α_k и Δ_k, что для любого λ-измеримого множества $A \subset T$ множество $\tau_k^{-1}(A) \cap \{t \in E_k : |q_k(t)| > 0\}$ λ-измеримо и

$$\lambda(\tau_k^{-1}(A) \cap \{t \in E_k : |q_{k E_k}(t)| > 0\}) \le \alpha_k \lambda(A) + \Delta_k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Как следует из теоремы 1 для каждого $k = 0, 1, \ldots$, существует мера ν_k такая, что оператор $S_k : L_p^{\nu_k}(T) \to L_p^{\nu_k}(T)$ непрерывен и существуют ограниченный в существенном относительно ν_k производные $\dfrac{d\mu_k}{d\nu_k}$, где $\mu_k = \tau_{E_k}(|q_{k E_k}|^p \nu_k)$.

Лемма 1. *Пусть T – локально компактное пространство, $f : T \to R$ – непрерывная функция с компактным носителем K_f. Тогда f равномерно непрерывна на T.*

Доказательство. На T существует компактификация Александрова [1]. Обозначим ее T'. Тогда $T' = T \cup \{\infty\}$ и T' – компактное пространство. Топология T' такова, что открытыми окрестностями точек из $T \subset T'$ являются те же открытые окрестности точек локально компактного пространства T, а открытыми окрестностями точки ∞ являются все дополнения $T' \setminus F$, где F – замкнутые множества из T. На компактном пространстве T' существует единственная равномерная структура U, согласующаяся с топологией в T' [1].

Функцию $f : T \to R$ продолжим на T'. $\bar{f} : T' \to R$ и $\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in T, \\ 0, & x = \infty. \end{cases}$

Покажем, что $\bar{f}$ непрерывна. Непрерывность ее в любой точке $x \in T$ следует из непрерывности f. Покажем, что $\bar{f}$ непрерывна в точке ∞. Базу окрестностей точки $0 \in R$ задают множества $V_0^{\varepsilon} = \{y \in R, |y| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Найдем прообраз $\bar{f}^{-1}(V_0^{\varepsilon}) = \{x \in T', |\bar{f}(x)| < \varepsilon\}$. Открытая окрестность точки ∞ $T' \setminus K_f$ содержится в $\bar{f}^{-1}(V_0^{\varepsilon})$ для любого $\varepsilon > 0$. Значит, $\bar{f}$ непрерывна в точке ∞, а, следовательно, и во всем пространстве T'. Тогда, функция $\bar{f} : T' \to R$, заданная на компактном пространстве T' равномерно непрерывна. Ее сужение на множество T будет также равномерно непрерывно на индуцированном равномерном пространстве T.

Лемма доказана.

Через $\tilde{\tau}_{k E_0}$ обозначим произвольное ν_0-измеримое продолжение на множество E_0.

Лемма 2. *Пусть T – локально компактное пространство, $S_k : L_p^{\nu_л}(T) \to L_p^{\nu_л}(T)$, $k = 0, 1, \ldots$ Пусть последовательность $\{\chi_{E_k} q_k\}$ сходится по мере ν_0 к $\chi_{E_0} q_0$, последовательность $\{\tau_k\}$ сходится по мере ν_0 к τ_0 и для любого компактного множества $K \subset T$ $\lim\limits_{k \to \infty} \nu_0(K \cap (E_k \Delta E_0)) = 0$. Тогда последовательность $\{S_k y\}$ сходится по мере ν_0 к $S_0 y$ для любой функции $y \in K(T)$.*

Доказательство. Пусть K – компактное множество из T, $y \in K(T)$. Обозначим $M = \max_{t \in K} |y(t)|$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Справедливо равенство

$$\nu_0(K \cap \{t \in T : |(S_k y)(t) - (S_0 y)(t)| \geq \varepsilon\}) = \ldots$$

$$= \nu_0(K \cap \{t \in E_0 \Delta E_k : |(S_k y)(t) - (S_0 y)(t)| \geq \varepsilon\}) + + \nu_0(K \cap \{t \in E_0 \cap E_k : |(S_k y)(t) - (S_0 y)(t)| \geq \varepsilon\}).$$

Имеем $\lim_{k \to \infty} \nu_0(K \cap \{t \in E_0 \Delta E_k : |(S_k y)(t) - (S_0 y)(t)| \geq \varepsilon\}) \leq \lim_{k \to \infty} (K \cap (E_0 \Delta E_k)) = 0$.

Далее,

$$\nu_0(K \cap \{t \in E_0 \cap E_k : |(S_k y)(t) - (S_0 y)(t)| \geq \varepsilon\}) =$$

$$= \nu_0(K \cap \{t \in E_0 \cap E_k : |q_{kE_0 \cap E_k}(t) y(\tau_{kE_0 \cap E_k}(t)) - q_{0E_0 \cap E_k}(t) y(\tau_{0E_0 \cap E_k}(t))| \geq \varepsilon\}) \leq$$

$$\leq \nu_0(K \cap \{t \in E_0 \cap E_k : |q_{kE_0 \cap E_k}(t) - q_{0E_0 \cap E_k}(t)| \cdot |y(\tau_{kE_0 \cap E_k}(t))| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}) +$$

$$+ \nu_0(K \cap \{t \in E_0 \cap E_k : |q_{kE_0 \cap E_k}(t)| \cdot |y(\tau_{kE_0 \cap E_k}(t)) - y(\tau_{0E_0 \cap E_k}(t))| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}).$$

По условию $\lim_{k \to \infty} \nu_0(K \cap \{t \in E_0 \cap E_k : |q_{kE_0 \cap E_k}(t) - q_{0E_0 \cap E_k}(t)| \cdot |y(\tau_{kE_0 \cap E_k}(t))| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}) \leq$

$$\leq \lim_{k \to \infty} \nu_0(K \cap \{t \in E_0 \cap E_k : |q_{kE_0 \cap E_k}(t) - q_{0E_0 \cap E_k}(t)| \geq \frac{\varepsilon}{2M}\}) = 0.$$

Так как q_{0E_0} ν_0-измерима, то для $K \subset T$ и любого $\delta > 0$ найдется такое компактное $K_1 \subset K$, что на K_1 q_{0E_0} непрерывна и $\sup_{t \in K} |q_{0E_0}| = Q < \infty$, $\nu_0(K - K_1) < \delta$. Тогда

$$\nu_0(K \cap \{t \in E_0 \cap E_k : |q_{kE_0 \cap E_k}(t)| \cdot |y(\tau_{kE_0 \cap E_k}(t)) - y(\tau_{0E_0 \cap E_k}(t))| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}) \leq$$

$$\leq \delta + \nu_0(K_1 \cap \{t \in E_0 : |y(\tilde{\tau}_{kE_0 \cap E_k}(t)) - y(\tau_{0E_0 \cap E_k}(t))| \geq \frac{\varepsilon}{2Q}\}).$$

Из леммы 1 следует, что функция y равномерно непрерывна на T. Значит для заданного $\varepsilon > 0$ найдется окрестность U равномерной структуры пространства T такая, что $|y(\tilde{\tau}_{kE_0 \cap E_k}(t)) - y(\tau_{0E_0 \cap E_k}(t))| < \frac{\varepsilon}{2Q}$, как только $(\tilde{\tau}_{kE_0}(t), \tau_{0E_0}(t)) \in U$.

Таким образом, учитывая сходимость $\tilde{\tau}_{kE_0}(t)$ к $\tau_{0E_0}(t)$ по мере ν_0, можно утверждать, что для заданных $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ существует номер N такой, что при $n > N$ имеют место неравенства

$$\nu_0(K \cap \{t \in E_0 \cap E_k : |q_{kE_0 \cap E_k}(t)| \cdot |y(\tau_{kE_0 \cap E_k}(t)) - y(\tau_{0E_0 \cap E_k}(t))| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}) \leq$$

$$\leq \delta + \nu_0(K_1 \cap \{t \in E_0 : (\tilde{\tau}_{kE_0}(t), \tau_{0E_0}(t)) \in U\}) < 2\delta.$$

Следовательно, $\lim_{k \to \infty} \nu_0(K \cap \{t \in E_0 \cap E_k : |(S_k y)(t) - (S_0 y)(t)| \geq \varepsilon\}) = 0$ и, значит, $\{S_k y\}$ сходится по мере ν_0 к $S_0 y$ для любой функции $y \in K(T)$.

Лемма доказана.

Определение: Подмножество H из L_p^μ называется равностепенно μ-интегрируемым порядка p, если оно удовлетворяет условиям:

1) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого μ-интегрируемого множества A, $\mu(A) < \delta$ и любого $f \in H$ следует, что $\int |f|^p \chi_A d\mu \leq \varepsilon$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное множество $K \subset T$, что для любого $f \in H$ $\int |f|^p \chi_{T|K} d\mu \leq \varepsilon$.

Лемма 3. *Пусть T – локально компактное пространство, $S_k : L_p^{\nu_л}(T) \to L_p^{\nu_л}(T)$, $k = 0,1,...$ Пусть последовательность $\{\chi_{E_k} q_k\}$ равностепенно ν_0-интегрируема порядка p. Тогда для любой функции $y \in K(T)$ последовательность $\{S_k y\}$ равностепенно ν_0-интегрируема порядка p.*

Доказательство. Пусть $y \in K(T)$ и $\max\limits_{t \in T} |y(t)| = M$. Зададим $\varepsilon > 0$ и произвольное ν_0 интегрируемое множество $A \subset T$.

$$\int |S_k y|^p \chi_A d\nu_0 = \int |q_k(t)|^p \cdot |y(\tau_k(t))|^p \chi_{E_k \cap A} d\nu_0 \le M^p \int |q_k(t)|^p \chi_{E_k \cap A} d\nu_0 \le M^p \frac{\varepsilon}{M^p} = \varepsilon, \text{ при } \nu_0(A) < \delta,$$

так как последовательность $\{\chi_{E_k} q_k\}$ равностепенно ν_0-интегрируема порядка p.

Для любого компактного множества $K \subset T$ имеем

$$\int |S_k y|^p \chi_{T \setminus K} d\nu_0 = \int |q_k(t)|^p \cdot |y(\tau_k(t))|^p \chi_{E_k \cap (T \setminus K)} d\nu_0 \le M^p \int |q_k(t)|^p \chi_{E_k \cap (T \setminus K)} d\nu_0 .$$

Так как последовательность $\{\chi_{E_k} q_k\}$ равностепенно ν_0-интегрируема порядка p, то существует такое компактное множество $K_0 \subset T$, что для любого натурального числа k и заданного ε $\int |q_k(t)|^p \chi_{E_k \cap (T \setminus K)} d\nu_0 \le \frac{\varepsilon}{M^p}$ и тогда $\int |S_k y|^p \chi_{T \setminus K} d\nu_0 < \varepsilon$. И, значит, последовательность $\{S_k y\}$ равностепенно ν_0-интегрируема порядка p для любой функции $y \in K(T)$.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть T – локально компактное пространство, $S_k : L_p^{\nu_л}(T) \to L_p^{\nu_л}(T)$, $k = 0, 1, ...$ Пусть последовательность $\{\chi_{E_k} q_k\}$ сходится в пространстве $L_p^{\nu_0}(t)$ к $\chi_{E_0} q_0$, последовательность $\{\tau_k\}$ сходится по мере ν_0 к τ_0 и для любого компактного множества $K \subset T$ $\lim\limits_{k \leftarrow \infty} \nu_0(K \cap (E_k \Delta E_0)) = 0$. Тогда последовательность $\{S_k y\}$ сходится к $S_0 y$ в пространстве $L_p^{\nu_0}(T)$ для любой функции $y \in K(T)$.*

Доказательство. Так как $\{\chi_{E_k} q_k\}$ сходится в пространстве $L_p^{\nu_0}(t)$ к $\chi_{E_0} q_0$, то $\{\chi_{E_k} q_k\}$ сходится по мере ν_0 и равностепенно ν_0-интегрируема порядка p [2]. Согласно леммам 2 и 3 последовательность $\{S_k y\}$ сходится по мере ν_0 к $S_0 y$ и равностепенно ν_0-интегрируема порядка p. Тогда последовательность $\{S_k y\}$ сходится к $S_0 y$ в пространстве $L_p^{\nu_0}(T)$ для любой функции $y \in K(T)$.

Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть T – локально компактное пространство, $S_k : L_p^{\nu_л}(T) \to L_p^{\nu_л}(T)$, $k = 0, 1, ...$ Пусть существуют положительные числа g_{*k} $\overset{*}{g}_k$, g_*, g^* такие, что для мер ν_k, $k = 0, 1, ...$ выполнены неравенства*

$$g_* \nu_0 \le g_{*n} \nu_0 \le \nu_n \le \overset{*}{g}_n \nu_0 \le g^* \nu_0, \tag{1}$$

последовательность $vrai \sup\limits_{t \in T} \frac{d\mu_k}{d\nu_k}(t)$ ограничена числом K^* и $\lim\limits_{k \leftarrow \infty} \nu_0(K \cap (E_k \Delta E_0)) = 0$. Тогда, если последовательность $\{\chi_{E_k} q_k\}$ сходится в пространстве $L_p^{\nu_0}(T)$ к $\chi_{E_0} q_0$, а последовательность $\{\tau_k\}$ сходится по мере ν_0 к τ_0, то для любого $x \in L_p^{\nu_k}(T)$ $\lim\limits_{k \to \infty} \|S_k x - S_0 x\|_{\nu_0} = 0$.

Доказательство. Из условия (1) следует, что меры ν_k абсолютно непрерывны относительно ν_0 и классы эквивалентности в пространствах $L_p^{\nu_k}(T)$ совпадают для всех $k = 0, 1, \ldots$: *нормы в* $L_p^{\nu_k}(T)$ эквивалентны.

Пусть $x \in L_p^{\nu_k}(T)$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать непрерывную функцию $\tilde{x}$ с компактным носителем K такую, что

$$\|x-\tilde{x}\|_{\nu_0} = (\int_K |x(t)-\tilde{x}(t)|^p d\nu_0)^{\frac{1}{p}} \le (\int_K |x(t)-\tilde{x}(t)|^p \frac{1}{g_*} d\nu_k)^{\frac{1}{p}} \le \frac{1}{(g_*)^{\frac{1}{p}}} (\int_K |x(t)-\tilde{x}(t)|^p \frac{1}{g_*} d\nu_k)^{\frac{1}{p}} \le \frac{\varepsilon}{(g_*)^{\frac{1}{p}}}.$$

Справедливы оценки

$$\|S_k x - S_0 x\|_{\nu_0} \le \|S_k x - S_k \tilde{x}\|_{\nu_0} + \|S_0 x - S_0 \tilde{x}\|_{\nu_0} + \|S_k \tilde{x} - S_0 \tilde{x}\|_{\nu_0} \le$$

$$\le (\|S_k\|_{\nu_0 \to \nu_0} + \|S_0\|_{\nu_0 \to \nu_0}) \|x - \tilde{x}\|_{\nu_0} + \|S_k \tilde{x} - S_0 \tilde{x}\|_{\nu_0}.$$

$\|S_0\|_{\nu_0 \to \nu_0} \le (K^*)^{\frac{1}{p}}$, так как $\|S_0 x\|_{\nu_0} = (\int_T |(S_0 x)(t)|^p d\nu_0)^{\frac{1}{p}} = (\int_T |\chi_{E_0} q_0(t) x(\tau_0(t))|^p d\nu_0)^{\frac{1}{p}} =$

$$= (\int_T |x(s)|^p d\mu_0)^{\frac{1}{p}} = (\int_T |x(s)|^p \frac{d\mu_0}{d\nu_0} d\nu_0)^{\frac{1}{p}} \le (K^*)^{\frac{1}{p}} (\int_T |x(s)|^p d\nu_0)^{\frac{1}{p}} \le (K^*)^{\frac{1}{p}} \|x\|_{\nu_0}.$$

$\|S_k\|_{\nu_0 \to \nu_0} \le (K^* g^* g_*^{-1})^{\frac{1}{p}}$, $k = 0,1,\ldots$, так как

$$\|S_k x\|_{\nu_0} = (\int_T |(S_k x)(t)|^p d\nu_0)^{\frac{1}{p}} = (\int_T |\chi_{E_k} q_k(t) x(\tau_k(t))|^p d\nu_0)^{\frac{1}{p}} \le \le (\int_T |\chi_{E_k} q_k(t) x(\tau_k(t))|^p \frac{1}{g_*} d\nu_k)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \frac{1}{(g_*^{\frac{1}{p}})} (\int_T |x(s)|^p d\mu_k)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{(g_*^{\frac{1}{p}})} (\int_T |x(s)|^p \frac{d\mu_k}{d\nu_k} d\nu_k)^{\frac{1}{p}} \le (\frac{K^*}{g_*})^{\frac{1}{p}} (\int_T |x(s)|^p d\nu_k)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le (\frac{K^* g^*}{g_*})^{\frac{1}{p}} (\int_T |x(s)|^p d\nu_0)^{\frac{1}{p}} = (\frac{K^* g^*}{g_*})^{\frac{1}{p}} \|x\|_{\nu_0}.$$

По лемме 4 $\lim_{k\to\infty} \|S_k \tilde{x} - S_0 \tilde{x}\|_{\nu_0} = 0$, то есть, начиная с некоторого номера n, $\|S_k \tilde{x} - S_0 \tilde{x}\|_{\nu_0} < \varepsilon$. Значит $\lim_{k\to\infty} \|S_k x - S_0 x\|_{\nu_0} = 0$.

Теорема доказана.

ПРИМЕР

Определим операторы S_0 и S_k, $к = 0, 1, \ldots$. Положим $T = [0, 1]$ и $q_k(t) = 1$, $k = 0, 1, \ldots$

Зададим $\tau_0(t) = \begin{cases} t, t \in \left[0; \frac{1}{3}\right], \\ \frac{1}{3}, t \in \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right), \\ t - \frac{1}{3}, t \in \left[\frac{2}{3}; 1\right] \end{cases}$ и $\tau_k(t) = \begin{cases} \frac{k+1}{k} t - \frac{1}{3k}, t \in \left[0; \frac{1}{3}\right], \\ \frac{1}{3}, t \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \\ \frac{k+1}{k} t - \frac{k+2}{3k}, t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]. \end{cases}$ $k = 0, 1, \ldots,$

$E_0 = [0;1]$, $E_k = [\frac{1}{3k+3}; 1]$, $E_0 \Delta E_k = [0; \frac{1}{3k+3}]$; $\lim_{k\to\infty} \nu_0(E_0 \Delta E_k) = 0$.

$$\nu_0 = \frac{\beta}{\beta-1}m + \frac{1}{3}\varepsilon(\frac{1}{3})\frac{\beta}{(\beta-1)^2} \text{ и } \nu_k = \frac{\frac{k+1}{k}\beta}{\frac{k+1}{k}\beta-1}m + \frac{1}{3}\varepsilon(\frac{1}{3})\frac{\frac{k+1}{k}\beta}{(\beta-1)(\frac{\beta(k+1)}{k}-1)}.$$

Здесь $\varepsilon(t)$ – единичная атомическая мера, сосредоточенная в точке t и $\beta > 1$.

$$\frac{1}{2}k \le \frac{k}{k+1}\nu_0 \le \nu_k \le \frac{k+1}{k}\nu_0 \le 2\nu_0, \quad k = 0, 1, \ldots$$

$$\frac{d\mu_k}{d\nu_k}(t) = \begin{cases} \dfrac{2\beta}{\frac{k+1}{k}\beta+1}, & t \ne \frac{1}{3}, \\ \beta, & t = \frac{1}{3}. \end{cases} \qquad vrai\sup_{t\in T}\frac{d\mu_k}{d\nu_k}(t) = \frac{2\beta}{\beta+1}.$$

Последовательность $\{\tau_k\}$ сходится к τ_0 в каждой точке $t \in [0;1]$, значит, последовательность $\{\tau_k\}$ сходится по мере ν_0 к τ_0.

Таким образом, условия теоремы 2 выполнены и, следовательно, последовательность операторов $S_k : L_p^{\nu_k}(E) \to L_p^{\nu_k}(T)$, заданных равенством $(S_k x) = x(\tau_k(t))$, $t \in [0,1]$ сходится по норме к оператору $(S_0 x) = x(\tau_0(t))$.

Литература

1. Бурбаки, Н. Общая топология. Основные структуры / Н. Бурбаки. - М: Наука, 1968. - 272 С.
2. Бурбаки, Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах / Н. Бурбаки. - М.: Наука, 1977.-600 с.
3. Бурбаки, Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер / Н. Бурбаки. - М.: Наука, 1967. -396 С.
4. Плышевская, Т.К. О разрешимости функционально-дифференциальных уравнений в лебеговых пространствах / Т.К. Плышевская. - Магнитогорск: Магнитогорский горно-металлургический институт, 1988. - Деп. в ВИНИТИ 22.02.89. - № 1186. - В 89.

Поступила в редакцию 20 июня 2007г.