Математика

УДК 539.374:621.791.052 DOI: 10.14529/mmph200201

ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ГЕЛЬДЕРОВЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ НА ПРОСТОЙ ГЛАДКОЙ КРИВОЙ

В.Л. Дильман
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: dilmanvl@susu.ru

Рассматриваются линейные функциональные уравнения на простых гладких кривых с функцией сдвига, имеющей ненулевую производную, удовлетворяющую условию Гельдера, и неподвижные точки только на концах кривой. Цель статьи – найти условия существования и единственности решения таких уравнений в классах гельдеровских функций с коэффициентами и правыми частями, удовлетворяющими условиям Гельдера. Эти условия получены в зависимости от значений коэффициентов уравнений на концах кривой. Рассматриваются различные особенности решений на концах кривой. Установлены показатели Гельдера для решений. Показаны возможности применения линейных функциональных уравнений к исследованию и решению сингулярных интегральных уравнений с логарифмическими особенностями.

Ключевые слова: сингулярные интегральные уравнения со сдвигом; линейные функциональные уравнения от одной переменной; условия Гельдера.

Введение

Начиная с уравнения

$$\int_0^1 \ln|\tau - t|\varphi(\tau)\,d\tau = f(t),$$

решенного в 1922 г. в замкнутой форме Т. Карлеманом [1], интегральные уравнения первого рода с логарифмическими особенностями постоянно привлекали внимание исследователей теории краевых задач аналитических функций и сингулярных интегральных уравнений. Действительно, интеграл типа Коши, у которого один или оба предела интегрирования переменные, можно трактовать как обобщенное логарифмическое ядро, так как в случае постоянной плотности у интеграла типа Коши ядро является чисто логарифмическим. На этом пути были получены многочисленные результаты, относящиеся к исследованию и решению многих типов уравнений и конкретных уравнений, исследованию свойств интегральных операторов с логарифмическими особенностями в различных функциональных классах и пространствах. Чаще всего рассматривались гельдеровские классы или пространства H_μ, $\mu \in (0;1]$ и лебеговские пространства L_p, $p \in [1;\infty)$. К этой тематике тесно примыкает теория дробного дифференцирования и интегрирования [2]. В качестве весьма общего модельного интегрального уравнения первого рода с «подвижной» логарифмической особенностью в ядре было предложено [3] уравнение вида:

$$A(t)\int_t^{b(t)} \varphi(\tau)\,d\tau + B(t)\int_\Gamma \varphi(\tau)\,d\tau \int_{a(\tau)}^{\tau} \frac{C(\xi)}{\xi - t}\,d\xi = f(t). \qquad (1)$$

Здесь $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{n} \Gamma_j$, $\Gamma_j \cap \Gamma_k = \varnothing$, $j \neq k$, $\Gamma_j = [a_j b_j]$, $j = \overline{1,n}$; если $t \in \Gamma_j$, то $b(t), \tau, a(\tau) \in \Gamma_j$; $[a_i b_i]$, $i = \overline{1,n}$ – простая ориентированная кривая на комплексной плоскости с концами a_i и b_i (ориентация от a_i до b_i; возможно $a_i = b_i$), а функции a и b кусочно-постоянны, то есть постоянны на каждой дуге Γ_i, $i = \overline{1,n}$.

Уравнение (1) можно трактовать как обобщение уравнения

$$A(t)\int_a^t \varphi(\tau)d\tau + B(t)\int_a^b \ln\frac{|t-\tau|}{b-t}\varphi(\tau)d\tau = f(t),$$

исследованного многими авторами (см. ссылки в [3]).

В связи с теорией краевых задач и сингулярных интегральных уравнений со сдвигом [4–6] представляет интерес изучение интегральных уравнений с двумя логарифмическими особенностями в ядре, одна из которых получается из другой в результате сдвига. Как обобщение уравнения (1) на случай двух «подвижных» логарифмических особенностей, содержащихся в интегральном уравнении, в работе [7] было предложено в качестве модельного уравнение:

$$A_0(t)\int_t^{b(t)} \varphi(\tau)d\tau + A(t)\int_{\alpha_{-1}(t)}^{b(\alpha_{-1}(t))} \varphi(\tau)d\tau +$$

$$B(t)\int_\Gamma \varphi(\tau)d\tau\left(\int_{a(\tau)}^{\tau}\frac{C_0(\xi)}{\xi-t}d\xi + \int_{a(\alpha(\tau))}^{\alpha(\tau)}\frac{C(\xi)}{\xi-t}d\xi\right) = f(t). \qquad (2)$$

Здесь $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{n}\Gamma_j$, причем допускается пересечение простых кривых Γ_j в конечном числе точек; функция α определена на Γ, причем $\alpha_j = \alpha|_{\Gamma_j}$ – взаимно-однозначное непрерывное отображение дуги Γ_j на себя, не имеющее неподвижных точек, кроме концов дуги (более подробно свойства функции α будут изложены ниже).

С помощью формулы перестановки порядка интегрирования уравнение (2) приводится к системе уравнений вида:

$$\begin{cases} A_0(t)\psi(t) + A(t)\psi(\alpha_{-1}(t)) + B(t)\int_\Gamma \frac{\theta(\xi)}{\xi-t}d\xi = f(t), \\ C_0(t)\psi(t) + C(t)\psi(\alpha_{-1}(t)) = \theta(t), \\ \psi(t) = \int_t^{b(t)} \varphi(\tau)d\tau. \end{cases} \qquad (3)$$

Рассмотрим два существенно различных случая [7].

Первый случай. Определитель системы (3):

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} A_0 & A \\ C_0 & C \end{vmatrix},$$

не является тождественным нулем. Тогда система (3) приводится к сингулярному интегральному уравнению со сдвигом относительно функции θ с последующим решением чисто функционального уравнения системы (3).

Второй случай. Пусть $\Delta(t) \equiv 0$ (случай вырождения). Рассмотрим два варианта. *Первый вариант*. Если $A \equiv C \equiv 0$, либо $A_0 \equiv C_0 \equiv 0$, уравнение (2) сводится к уравнению (1). Если указанные тождества не имеют места (*второй вариант*), система (3) сводится к системе из характеристического сингулярного интегрального уравнения и функционального уравнения:

$$\begin{cases} A(t)\nu(t) + B(t)\int_\Gamma \frac{C(\tau)\nu(\tau)}{\tau-t}d\tau = f(t), \\ \Phi_g(\psi)(t) \equiv \psi(\alpha_{-1}(t)) - g(t)\psi(t) = \nu(t). \end{cases} \qquad (4)$$

Здесь $\nu = \theta/C,\ g = -C_0/C$.

В любом случае следует исследовать и решать линейные функциональные уравнения из систем (3) и (4). Коэффициенты и правые части этих уравнений, в зависимости от условий исходных задач, принадлежат, как правило, гельдеровским классам (или пространствам) $H_\mu,\ \mu \in (0;1]$ и

лебеговским пространствам L_p, $p\in[1;\infty)$, а также классам первообразных от функций из этих пространств. В работе будет рассмотрено линейное функциональное уравнение

$$\psi(\alpha(t))-g(t)\psi(t)=h(t),\quad t\in\Gamma. \tag{5}$$

Имеется большое количество публикаций, связанных с уравнением (5) и его обобщениями (ссылки см. в [2, 8]). В работе [8] исследования проводились в классах непрерывных функций. В [2] даны достаточные условия существования единственного решения уравнения (5) в классе L_p, $p\in(1;\infty)$. В [9] найден критерий непрерывной обратимости оператора $\Phi_g(\psi)$ в классе непрерывных функций. В [10] найден при некоторых условиях критерий обратимости оператора $\Phi_g(\psi)$ в классе гельдеровских функций. Целью работы является исследование уравнения (5), когда $\Gamma=[ab]$ простая ориентированная кривая на комплексной плоскости, нахождения условий единственности решения этого уравнения и нахождение показателя Гельдера для решения (5) в зависимости от этих параметров функций g и h.

Обозначения, определения и вспомогательные утверждения

Рассмотрим линейное функциональное уравнение (5), где $\Gamma=[ab]$ – простая ориентированная кривая на комплексной плоскости с концами a и b (ориентация от a до b; возможно $a=b$).

Класс функций φ, удовлетворяющий условию Гельдера на Γ:

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|<K|t_1-t_2|^{\mu},\quad t_1,t_2\in\Gamma$$

обозначим $H_\mu^\Gamma(K)$, или сокращенно, $H_\mu(K)$ *или* H_μ. Будем писать $h\in H_\mu(a^*,\nu)$, если $h(t)(t-a)^\nu\in H_\mu$. Аналогично, $h\in C(a^*,\nu)$, если $h(t)(t-a)^\nu\in C$.

Пусть $\alpha=\alpha(t)$, $t\in\Gamma$ – отображение кривой Γ на себя со свойствами:

1. α – взаимно однозначное непрерывное отображение кривой Γ на себя с сохранением принятой на Γ ориентации.
2. На Γ не существует других неподвижных точек (н.т.), кроме a и b.
3. Для всех $t\in\Gamma$ существует $\alpha'(t)\neq 0$, причем $\alpha'\in H_\theta$ на Γ, $\theta\in(0;1]$.
4. $|\alpha'(a)|\neq 1$, $|\alpha'(b)|\neq 1$.

Будем применять обозначения: $\alpha_0(t)\equiv t$, $\alpha_1(t)\equiv\alpha(t)$, $\alpha_n(t)\equiv\alpha(\alpha_{n-1}(t))$, $\alpha_{-1}(t)$ –обратное к α отображение, $\alpha_{-n}(t)\equiv\alpha_{-1}(\alpha_{-n+1}(t))$, $n=\overline{1,\infty}$. Очевидно, $\alpha_n(\alpha_{-n}(t))\equiv\alpha_{-n}(\alpha_n(t))\equiv t$.

Если для всех $t\in(ab)$ $\alpha(t)\in(at)$, то точку a будем называть *притягивающей неподвижной точкой* (п. н. т.). $\alpha_n(\alpha_{-n}(t))\equiv\alpha_{-n}(\alpha_n(t))\equiv t$. Если для всех $t\in(ab)$ $\alpha(t)\in(bt)$, то точку b будем называть *отталкивающей неподвижной точкой* (о.н.т.). Очевидно, что всегда либо точка a – п. н. т., а точка b – о. н. т., либо наоборот, a – о. н. т., а точка b – п. н. т.

Всюду в работе полагаем, что a – п. н. т., а точка b – о. н. т. В этом случае условие 4 можно заменить на условие:

4*. $|\alpha'(a)|<1$, $|\alpha'(b)|>1$.

Заметим, что все утверждения, относящиеся к о. н. т., следуют из соответствующих утверждения для п. н. т. Поэтому все утверждения будут сформулированы для точки a.

Пусть $c\in(ab)$. Введем обозначение: $I_n(c)=[\alpha_n(c)\ \alpha_{n-1}(c)]$.

Лемма 1. Пусть $\Gamma=[ab]$ – гладкая в некоторой окрестности точки a кривая, r и r^* – действительные числа, такие что

$$|\alpha'(a)|<r<1,\ |\alpha'(a)|^{-1}<r^*.$$

Тогда существуют такая окрестность $V(a)$ точки a на кривой Γ и такое натуральное число $N\left(N^*\right)$, зависящее только от $r\left(r^*\right)$, что для любых точек $t_1, t_2 \in V(a)$ и любых целых $m,n \geq N\ \left(m,n \geq N^*\right)$

$$\left|\alpha_n(t_1)-\alpha_m(t_2)\right| < r\left|\alpha_{n-1}(t_1)-\alpha_{m-1}(t_2)\right|,$$
$$\left|\alpha_{n-1}(t_1)-\alpha_{m-1}(t_2)\right| < r^*\left|\alpha_n(t_1)-\alpha_m(t_2)\right|;$$

существуют числа K, K_1 такие, что для любых точек $t \in V(a)$

$$K\left(r^*\right)^{-n} < \left|\alpha_n(t)-a\right| < K_1 r^n.$$

Пусть $t \in I_n(c)$, $n=\overline{0,\infty}$. Тогда для некоторых постоянных $K_2>0$, $K_3>0$, не зависящих от n,

$$\log_{r^*}\frac{K_2}{|t-a|} < n < \log_{r^{-1}}\frac{K_3}{|t-a|}.$$

Введем обозначение:

$$G_n(t)=\prod_{j=0}^{n-1}\frac{g\left(\alpha_j(t)\right)}{g(a)},\ G_0(t)\equiv 1,\quad G_{-n}(t)=\prod_{j=1}^{n}\frac{g(b)}{g\left(\alpha_{-j}(t)\right)},\quad n=\overline{1,\infty}. \tag{6}$$

Лемма 2. Пусть $\Gamma=[ab]$ – гладкая в некоторой окрестности $[ac]$ точки a кривая, функция $g(t)\neq 0,\ g(t)\in H_\mu,\ t\in[ac]$. Тогда последовательность $\left\{G_n(t),\ n=\overline{1,\infty}\right\}$ равномерно сходится на $[ac]$,

$$\lim_{n\to\infty} G_n(t)=G_a(t)\neq 0,\infty. \tag{7}$$

В частности, если функция g непрерывна на $[ab)$, то и $G_a(t)$ непрерывна на $[ab)$; $G_a(a)=1$.

Рассмотрим однородное уравнение

$$\psi(\alpha(t))-g(t)\psi(t)=0,\quad t\in\Gamma. \tag{8}$$

Лемма 3. Пусть ψ – непрерывное решение уравнения (8) на $[ab)$. Тогда

1) равносильны утверждения:

а) существует ψ такое, что $\psi(a)\neq 0$,

б) для каждого $[ab)$ $t\in[ab)$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} g^n(a)G_n(t)\neq 0,\infty$.

Если существует ψ такое, что $\psi(a)\neq 0$, то все не равные тождественно нулю решения обладают этим свойством;

2) равносильны утверждения:

а) существует не равное тождественно нулю ψ такое, что $\psi(a)=0$,

б) существует множество $[ab)\ V\subseteq[ab)$ с непустой внутренностью такое, что $\lim\limits_{n\to\infty} g^n(a)G_n(t)=0$ для $t\in V$, причем сходимость этого предела на V равномерная;

3) равносильны утверждения:

а) уравнение (8) не имеет решений, кроме тождественного нуля,

б) не выполняются условия 1 б и 2 б.

Следующая теорема дает классификацию уравнений вида (8) с точки зрения количества непрерывных на (ab) решений в терминах значений функции g в неподвижных точках.

Теорема 1. Пусть $\Gamma=[ab]$ – гладкая в некоторой окрестности точки a кривая, $g\in H$ на $[ab)$ $[ab)$, $g(a)\neq 0$. Тогда:

1. Условие 1 а леммы 3 равносильно условию $g(a)=1$. Если $g(a)=1$, то все тождественно не равные нулю решения ψ уравнения (8) не равны нулю в некоторой окрестности точки a; если $g(t)\neq 0$ на $[ab)$, то и $\psi\neq 0$ на $[ab)$.

2. Условие 2 а леммы 3 равносильно условию $|g(a)|<1$.

3. Условие 3 а леммы 3 равносильно условию $|g(a)|\geq 1,\ g(a)\neq 1$.

Доказательство. Из (7) индукцией по n получается:

$$\psi(\alpha_n(t))=g^n(a)G_n(t)\psi(t),\ \ t\in[ab).$$

1. При условии 1 а леммы 3 из (7) следует: $g(a)=1$. Обратно, пусть $g(a)=1$. Тогда функция

$$\psi(t)=\frac{1}{G_a(t)}=\frac{1}{\prod\limits_{n=0}^{\infty}g(\alpha_n(t))},\tag{9}$$

по лемме 2, определена, непрерывна и не равна нулю в некоторой окрестности точки a (если $g(t)\neq 0$ на $[ab)$, то эта функция $\psi(t)\neq 0$ на $[ab)$). Подстановкой проверяется, что она удовлетворяет уравнению (8). По лемме 3, пункт 1), все не равные тождественно нулю решения (8) удовлетворяют условию $\psi(a)\neq 0$. Из (9) следует, что

$$\psi(t)=\frac{\psi(\alpha_n(t))}{G_n(t)},\ \ n=1,2,...$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$ получим

$$\psi(t)=\frac{\psi(a)}{G_a(t)},$$

а из леммы 2 следует, что $\psi(t)\neq 0$ в некоторой окрестности точки a; если $g(t)\neq 0$ на $[ab)$, то и $\psi\neq 0$ на $[ab)$.

2. Пусть ψ – решение (8), $\psi(a)=0, \psi(t_0)\neq 0$ для некоторого $t\in(ab)$. Переходя к пределу в (9) при $n\to\infty, t=t_0$, получим: $\lim\limits_{n\to\infty}g^n(a)=0$, откуда $|g(a)|<1$. Обратно, пусть $|g(a)|<1$. Зафиксируем произвольную точку $c\in(ab)$ и непрерывную на $I_0(c)=[c\ \alpha_{-1}(c)]$ функцию ψ_0 с условием:

$$\psi_0(\alpha(c))=g(c)\psi_0(c).\tag{10}$$

Тогда функция

$$\psi(t)=\begin{cases}0,\ t=a,\\ \prod\limits_{k=0}^{n-1}g(\alpha_{k-n}(t))\psi_0(\alpha_{-n}(t))=g^n(a)G_n(\alpha_{-n}(t))\psi_0(\alpha_{-n}(t)),\ t\in I_{-n}(c),\ n=1,2,...\\ \psi_0(t),\ t\in I_0(c),\\ \prod\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{g(\alpha_{k-n}(t))}\psi_0(\alpha_n(t)),\ t\in I_{-n}(c),\ n=1,2,...\end{cases}$$

удовлетворяет уравнению (8), непрерывна на $[ab)$ (так как $|g(a)|<1$ и выполняется (10)) и не обращается в ноль в некоторой проколотой окрестности точки a (если $g(t)\neq 0$ на $[ab)$, то и $\psi\neq 0$ на $[ab)$).

3. Следует из пунктов 1) и 2).

Заметим, что в случае интервала действительной оси утверждения: из $g(a)=1$ следует 1а) леммы 3; из $|g(a)|<1$ следует 2 а) леммы 3, – для интервала действительной оси известны [11, с. 51].

Основные результаты

Рассмотрим условия единственности решения уравнения (5).

Теорема 2. Пусть $\Gamma=[ab]$ – гладкая кривая, $g,h\in H_\mu$ на $[ab)$, $g(t)\neq 0$, $|g(a)|>1$. Тогда уравнение (5) имеет единственное в классе $C^{[ab)}$ решение:

$$\psi(t)=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h(\alpha_k(t))}{\prod\limits_{j=0}^{k}g(\alpha_j(t))}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h(\alpha_k(t))}{g^{k+1}(a)G_{k+1}(t)}, \tag{11}$$

причем $\psi\in H_\mu^{[ab)}$.

Доказательство. Из уравнения (5) индукцией по n получается:

$$\psi(\alpha_n(t))=G_n(t)g^n(a)\psi(t)+\sum_{k=0}^{n-1}g^{n-1-k}(a)\frac{h(\alpha_k(t))}{G_{k+1}(t)},\ n=2,3,...$$

Поделив это равенство на $g^n(a)$ и перейдя к пределу при $n\to\infty$, получим как следствие (5) равенство (11). Поэтому решение уравнения (5) при данных условиях единственно в классе $C^{[ab)}$, и $\psi(t)$ (11) – решение (5). Из леммы 2 следует, что функция $\left|h(\alpha_k(t))/G_{k+1}(t)\right|$ равномерно ограничена относительно $t\in[ac]$ и k натурального. Поэтому ряд (11) имеет числовую сходящуюся мажоранту. Следовательно, $\psi(t)$ (11) определена и непрерывна на $[ab)$. Покажем: $\psi\in H_\mu$. Так как $|g(t)|^{-1}<1$ для t, близких к a, то $\prod\limits_{j=0}^{k}\frac{h(\alpha_k(t))}{g(\alpha_j(t))}\in H_\mu(M^k)$ для некоторого $M\in(0;1)$. Тогда $\psi\in H_\mu\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}M^k\right)$.

Теорема 3. Пусть $\Gamma=[ab]$ – гладкая кривая, $g\in H_\mu$, $h\in H_\mu(a^*,\nu)$, $g(t)\neq 0$ на $[ab)$, $|g(a)||\alpha'(a)|^\nu>1$. Тогда уравнение (5) имеет единственное решение в классе $C(a^*,\nu)$. Это решение ψ имеет вид (11), и $\psi\in H_{\mu1}(a^*,\nu)$, где $\mu_1-\min\{\mu;|\nu|\theta\}$, где $\alpha'\in H_\theta$.

Доказательство. Введем обозначения:

$$\varphi(t)=|t-a|^\nu\psi(t),\ g_a(t)=\left|\frac{\alpha(t)-a}{t-a}\right|^\nu g(t),\ h_a(t)=|\alpha(t)-a|^\nu h(t)$$

Тогда уравнение (5) можно записать в виде:

$$\varphi(\alpha(t))-g_a(t)\varphi(t)=h_a(t). \tag{12}$$

Пусть $h(t)=\frac{h_1(t)}{|t-a|^\nu}$, $h_1\in H_\mu^{[ab)}$. Так как $\alpha'\in H_\theta$, то $\frac{\alpha(t)-a}{t-a}\in H_\theta$. Поэтому $h_a(t)=\left|\frac{\alpha(t)-a}{t-a}\right|h_1(t)\in H_{\mu1}$. Аналогично $g_a(t)\in H_\mu$. Из условия $|g(a)||\alpha'(a)|^\nu>1$ и условия 4^* следует $|g_a(a)|>1$. Тогда, применяя теорему 2 к уравнению (12), получим $\psi\in H_{\mu1}(a^*,\nu)$.

Теорема 4. Пусть $\Gamma=[ab]$ – гладкая кривая, $g,h\in H_\mu$, $g(t)\neq 0$ на $[ab)$, $|g(a)|=1$, $g(a)\neq 1$. Тогда уравнение (5) имеет единственное в классе $C^{[ab)}$ решение:

$$\psi(t)=\frac{h(a)}{1-g(a)}-\frac{1}{1-g(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((1-g(a))h(\alpha_k(t))-h(a)(1-g(\alpha_k(t)))\right)}{g^{k+1}(a)G_{k+1}(t)}, \tag{13}$$

причем $\psi \in H_{\mu 1}^{[ab)}$, $\mu_1 = \dfrac{\mu\theta}{1+\theta}$.

Доказательство. Из теоремы 2, пункт 3, следует единственность. Докажем остальное. Предположим сначала, что $h(a)=0$. Пусть ν такое, что $-\mu<\nu<0$. Тогда $|g(a)||\alpha'(a)|^{\nu}<1$, $h \in H_{\mu-\nu}^{[ab)}$ и $h_a \in H_{\min\{\nu\theta,\mu-\nu\}}^{[ab)}$. Заметим, $\mu_1 = \dfrac{\mu\theta}{1+\theta} = \min\{\nu\theta, \mu-\nu\}$. Из теоремы 3 следует, что (5) имеет единственное решение $\psi \in C(a^*,\nu)$ на $[ab)$ вида (11), который совпадает с (13) при $h(a)=0$ причем . $\psi \in H_{\mu 1}^{[ab)}(a^*,\nu) \subseteq H_{\mu 1}^{[ab)}$, так как $\nu<0$. Пусть теперь $h(a)\neq 0$. Введем обозначения:

$$\chi(t) = \psi(t) - \frac{h(a)}{1-g(a)},\ h_1(t) = \frac{h(a)}{1-g(a)}\left(1-g(t)\right). \tag{14}$$

Сделаем замену переменных в уравнении (5) по формулам (14). Получим равносильное (5) уравнение:

$$\chi(\alpha(t)) - g(t)\chi(t) = h_1(t),$$

в котором $h_1(a)=0$. Обратная замена дает формулу (13).

Следствие. Пусть $g \in H$, $g \neq 0$, $h \in H^{[ab)}(a^*)$, и $|g(a)||\alpha'(a)| \geq 1$. Тогда уравнение (5) имеет единственное решение в классе $H^{[ab)}(a^*)$, которое записывается в виде (11). Если $h \in H^{[ab)}(a^*,\nu)$, то $\psi \in H^{[ab)}(a^*,\nu)$.

Замечание. Хотя среди решений уравнения (5) в классе $C^{(ab)}$ только одно при условии $|g(a)||\alpha'(a)| \geq 1$, принадлежит классу $H^{[ab)}(a^*)$, решений из класса $H^{(ab)}$ «много» – континуум линейно независимых.

Литература

1. Carleman T. Über die Abelsche Integralgleichung mit konstanten Integrationsgrenzen / T. Carleman // Mathematische Zeitschrift. – 1922. – Vol. 15. – P. 111–120.

2. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 687 с.

3. Чибрикова, Л.И. Об интегральных уравнениях с обобщенными логарифмическими и степенными ядрами / Л.И. Чибрикова, Н.Б. Плещинский // Изв. вузов. Математика. – 1976. – № 6. – С. 91–104.

4. Litvinchuk, G.S. Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift / G.S. Litvinchuk. – Springer Science +Business Media, 2012. – 378 p.

5. Kravchenko, V.G. Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift / V.G. Kravchenko, G.S. Litvinchuk. – Springer Science+Business Media, 2014. – 308 p.

6. Карлович, Ю.И. Теория Нётера сингулярных интегральных операторов со сдвигом / Ю. И. Карлович, В. Г. Кравченко, Г. С. Литвинчук // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 4. – С. 3–27.

7. Дильман, В.Л. О решениях интегрального уравнения с обобщенным логарифмическим ядром в L_p, $p > 1$ / В. Л. Дильман, Л. И. Чибрикова // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 4. – С. 26–36.

8. Kuczma, M. An introduction to the theory of functional equations and inequalities / M. Kuczma. – Warszawa–Krakow–Katowice: Panstwowe Wydawnictwo Naukowe (Polish Scientific Publishers) and Uniwersytet Slaski, 1985.

9. Кравченко, В.Г. Об одном функциональном уравнении со сдвигом в пространстве непрерывных функций / В.Г. Кравченко // Мат. заметки. – 1977. – Т. 22, № 2. – С. 303–311.

10. Карлович, Ю.И. О сингулярных интегральных операторах со сдвигом в пространствеах Гельдера / Ю.И. Карлович, Б. Турсункулов // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 3. – С. 71–74.

11. Kuczma, M. Functional equations in a single variable / M. Kuczma. – Warszawa: PWN – Polish Scientific Publishers, 1968. – 383 p.

Поступила в редакцию 28 апреля 2020 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2020, vol. 12, no. 2, pp. 5–12

DOI: 10.14529/mmph200201

LINEAR FUNCTIONAL EQUATIONS IN THE HÖLDER CLASS FUNCTIONS ON A SIMPLE SMOOTH CURVE

V.L. Dilman
Ural South State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: dilmanvl@susu.ru

The article describes linear functional equations on simple smooth curves with a shift function having a non-zero derivative satisfying the Hölder condition, and fixed points only at the ends of the curve. The objective of the article is to find the conditions of the existence and uniqueness of the solution of such equations in the Hölder class functions with the coefficient and the right-hand side satisfying the Hölder conditions. These conditions are obtained depending on the values of the equation coefficient at the ends of the curve. Various specifics at the ends of the curve are considered. The indicators of the Hölder solutions are determined. The possibilities of applying linear functional equations to the study and solution of singular integral equations with logarithmic singularities are shown.

Keywords: singular integral equations with a shift; linear functional equations with a single variable; Hölder conditions.

References

1. Carleman T. Über die Abelsche Integralgleichung mit konstanten Integrationsgrenzen. *Mathematische Zeitschrift*, 1922, Vol. 15, pp. 111–120. DOI: 10.1007/bf01494386

2. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* (Fractional integrals and derivatives and some of their applications). Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1987, 687 p. (in Russ.).

3. Chibrikova L.I., Pleshchinskiĭ N.B. *Integral equations with generalized logarithmic and power kernels*. Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), 1976, Vol. 20, no. 6, pp. 80–92.

4. Litvinchuk G.S. *Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift*. Springer Science +Business Media, 2012, 378 p.

5. Kravchenko V.G., Litvinchuk G.S. *Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift*. Springer Science+Business Media, 2014, 308 p.

6. Karlovich Yu.I., Kravchenko V.G., Litvinchuk G.S. Noether's theory of singular integral operators with shift. *Soviet Mathematics* (Izvestiya VUZ. Matematika), 1983, Vol. 27, no. 4, pp. 1–34.

7. Dil'man V. L., Chibrikova L.I. Solutions of an integral equation with generalized logarithmic kernel in L_p, $p > 1$. *Soviet Mathematics* (Izvestiya VUZ. Matematika), 1986, Vol. 30, no. 4, pp. 33–46.

8. Kuczma M. An Introduction to the *Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality*. Warszawa-Krakow-Katowice: Panstwowe Wydawnictwo Naukowe (Polish Scientific Publishers) and Uniwersytet Slaski, 1985.

9. Kravchenko V.G. One functional equation with displacement in the space of continuous functions. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1977, Vol. 22, no. 8, pp. 660–665. DOI: 10.1007/bf01780978

10. Karlovich Yu.I., Tursunkulov B. Singular integral operators with shift in a generalized Hölder space. *Soviet Mathematics* (Izvestiya VUZ. Matematika), 1984, Vol. 28, no. 3, pp. 97–101.

11. Kuczma M. *Functional equations in a single variable*. Warszawa, PWN – Polish Scientific Publishers, 1968, 383 p.

Received April 28, 2020