УДК 621.311.1.003

ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ ГИЛЛЕМИНА И ЕЁ РАСШИРЕНИЕ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ АЛГОРИТМОВ ДИАГНОСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

***М.И. Грамм*, И.Е. Киесш**

Рассмотрен вариант диагностики электрических цепей на основе принципа наложения для мощностей, справедливого для спектральных составляющих цепи. Доля мощности каждой из собственных форм цепи в общей мощности может служить лейблом спектральной составляющей и ориентиром в конкретизации поиска неисправности при наступлении потери общей мощности. Рассмотренный путь предлагается как альтернатива традиционной диагностике на основе топологических диакоптик.

Ключевые слова: общая мощность, собственные формы спектральная диакоптика, неисправность, потеря мощности.

Задачи диагностики электрических цепей оцениваются как одни из самых алгоритмически сложных для решения. Во многом это объясняется сложившейся традицией поэлементной диакоптики цепи. В основе такой диагностики лежат топологические подходы и построение выходных оценок на основе анализа топологического происхождения токов и напряжений [1]. Связано это с использованием того иного варианта принципов линейности и наложения. Альтернативные этому ориентировки алгоритмов на расщепление мощности на составляющие с известным происхождением каждой считаются бесперспективными из-за несправедливости принципа наложения для мощностей. Действительно, случаи обсуждения мощностной диакоптики цепей, кроме приёмов в [2], неизвестны. Вместе с тем, ситуации возможности применения принципа наложения для мощностей в теории цепей известны и помимо разложения в ряды Фурье. Одним из таких случаев, считающихся весьма экзотическим, является так называемая ортогональность Гиллемина [3].

Суть наблюдения Гиллемина заключается в том, что он обнаружил, что общая мощность цепи является суммой мощностей вызываемых источниками токов и источниками напряжений. Однако для алгоритмов диагностики разбиение цепи всего лишь на две подцепи в соответствии с этим свойством даёт мало в отношении локализации неисправности.

В данной статье предлагается в некотором смысле расширение использования свойства ортогональности по Гиллемину разложением общей мощности цепи P_0 на n ортогональных спектральных составляющих матрицы $\mathbf{M}_0$ размером $n \times n$ описания цепи в однородном базисе. Общая мощность цепи является суммой из n мощностей спектральных составляющих.

Это позволяет существенно повысить точность локализации опознанием локализации неисправности по доле потерянной мощности при инциденте. Логика спектрального разложения общей мощности берёт своё начало со статьи [4], вызвавшей и последующие публикации в этом направлении.

Отметим, что ныне возможность введения спектрального подхода в инженерную практику связана и с совершенствованием современного математического обеспечения ПК вплоть до доступности инженеру программной реализации мощных методов линейной алгебры, сложившихся после 1950-х годов. В качестве иллюстрации этому в конце данной статьи рассмотрен пример реализации идеи на основе средств пакета MathCAD.

Поясним общую идею диагностики на основе принципа наложения для мощностей. Пусть цепь описывается в однородном базисе переменных **I** (например, в методе контурных токов) уравнением:

$$\mathbf{Rk}\cdot\mathbf{Ik}=\mathbf{Ek}, \qquad (1)$$

где для конкретности обсуждения принято, что **Rk** – матрица контурных токов, **Ik** и **Ek** – соответственно токи контуров и источники в контурах.

Для (1) существенным свойством будем считать её симметрию (то есть, например, все источники приводятся к одному виду). В таком случае матрица **Rk** имеет конкретный спектр собственных чисел, список которых представим в виде вектора:

$$\mathbf{L} = [\lambda_1\ \lambda_2 \ldots \lambda_n]. \qquad (2)$$

Для каждого из собственных чисел матрица **Rk** имеет собственный вектор $\mathbf{V}_i$ (i = 1,2,…, n) со свойством по определению $\mathbf{Rk}\cdot\ \mathbf{V}_i = \lambda_i\cdot\mathbf{Rk}$. Каждый из взаимно ортогональных векторов набора может образовывать проекторы $\mathbf{P}_i = \mathbf{V}_i\cdot\mathbf{V}_i^{\mathrm{T}}$ матрицы **Rk**, создающие возможность находить составляющие векторов **Ik** и **Ek** как их проекции на собственные векторы, [5]:

$$\mathbf{Ek} = \mathbf{V}_1\cdot\mathbf{V}_1^{\mathrm{T}}\cdot\ \mathbf{Ek}+\ \mathbf{V}_2\cdot\mathbf{V}_2^{\mathrm{T}}\cdot\ \mathbf{Ek}+\ldots+\ \mathbf{V}_n\cdot\mathbf{V}_n^{\mathrm{T}}\cdot\ \mathbf{Ek} = \mathbf{Ek}_1+\ \mathbf{Ek}_2+\ldots+\ \mathbf{Ek}_n, \qquad (3)$$

$$\mathbf{Ik} = \mathbf{V}_1\cdot\mathbf{V}_1^{\mathrm{T}}\cdot\ \mathbf{Ik}+\ \mathbf{V}_2\cdot\mathbf{V}_2^{\mathrm{T}}\cdot\ \mathbf{Ik}+\ldots+\ \mathbf{V}_n\cdot\mathbf{V}_n^{\mathrm{T}}\cdot\ \mathbf{Ik} = \mathbf{Ik}_1+\ \mathbf{Ik}_2+\ldots+\ \mathbf{Ik}_n. \qquad (4)$$

Пара собственных векторов $\mathbf{Ek}_i$ и $\mathbf{Ik}_i$ своим скалярным произведением даёт величину мощности $P^{(i\,)}= \mathbf{Ek}_i^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{Ik}_i$ соответствующей спектральной составляющей. В силу взаимной ортогональности всех векторов спектра матрицы **Rk** для них справедлив принцип наложения и общая мощность цепи равна сумме мощностей спектральных составляющих (см. пример далее):

$$P = \mathbf{Ek}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{Ik} = \mathbf{Ek}_1^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{Ik}_1+\ \mathbf{Ek}_2^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{Ik}_2+\ldots+\ \mathbf{Ek}_n^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{Ik}_n = P_1+\ P_2+\ldots+\ P_n. \qquad (5)$$

В произвольной электрической цепи вероятность близости по величине долей $\delta_i = P_{\mathrm{i}}/\ P$ мощностей спектральных составляющих P_{i} в общей мощности P цепи невелика и конкретная величина этой доли является как-бы лейблом этой спектральной составляющей, позволяющим по величине потерянной при инциденте доли общей мощности построить гипотезу о неисправности той или иной части цепи – локализовать неисправность с высокой вероятностью. Локализации неисправности вполне способно помочь спектральное разложение матрицы **Rk** на составляющие при каждом собственном числе λ_I:

$$\mathbf{Rk}=\mathbf{V}_1\cdot\lambda_1\cdot\mathbf{V}_1^{\mathrm{T}}+\mathbf{V}_2\cdot\lambda_2\cdot\mathbf{V}_2^{\mathrm{T}}+\ldots+\mathbf{V}_n\cdot\lambda_n\cdot\mathbf{V}_n^{\mathrm{T}}. \qquad (6)$$

Каждому слагаемому в спектральном разложении (6) соответствует матрица $\mathbf{Rk}_i=\mathbf{V}_i\cdot\lambda_i\cdot\mathbf{V}_i^{\mathrm{T}}$ некоторой подсхемы, конкретные элементы которой представлены в $\mathbf{Rk}_i$ достаточно конкретно и могут давать соображения по технической локализации неисправности. В заключение отметим, что все приведённые выше рассуждения могут быть справедливыми и при комплексных элементах матриц и векторов при соответствующей математической корректировке выкладок.

Выводы. Показана теоретическая возможность формирования алгоритмов диагностики электрических цепей на основе спектрального разложения общей мощности цепи с ориентировкой алгоритма на потерю той или иной доли общей мощности. Локализация технической причины потери мощности осуществима на основе спектрального разложения матрицы всей цепи.

Пример ниже имеет целью показать реализуемость в средствами математического пакета MathCAD описанной выше спектральной диагностики, следующей из весьма сложных методов линейной алгебры.

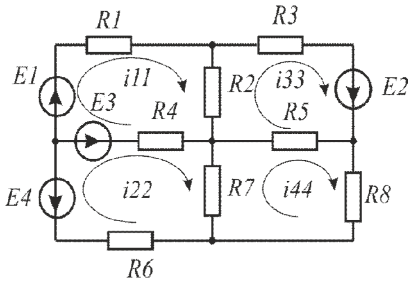
Пример. Программа в пакете MathCAD.

$ORIGIN:=1$ $E1:=30$ $E2:=71$ $E3:=90$ $E4:=60$

$R1:=4.2$ $R2:=1.5$ $R3:=5.7$ $R4:=2.7$ $R5:=3.9$ $R6:=4$ $R7:=1.5$ $R8:=5$

$i:=1..4$ $j:=1..4$

Элементы матрицы контурных сопротивлений:



$$Rk_{1,1}:=R1+R2+R4 \qquad Rk_{2,2}:=R4+R6+R7$$
$$Rk_{3,3}:=R2+R3+R5 \qquad Rk_{4,4}:=R5+R7+R8$$
$$Rk_{1,2}:=-R4 \quad Rk_{1,3}:=-R2 \quad Rk_{1,4}:=0$$
$$Rk_{2,3}:=0 \quad Rk_{2,4}:=-R7 \quad Rk_{3,4}:=-R5$$
$$Rk_{2,1}:=Rk_{1,2} \quad Rk_{3,1}:=Rk_{1,3} \quad Rk_{3,2}:=Rk_{2,3}$$
$$Rk_{4,1}:=Rk_{1,4} \quad Rk_{4,2}:=Rk_{2,4} \quad Rk_{4,3}:=Rk_{3,4}$$

Источники: $Ek:=(E1-E3 \quad E3-E4 \quad E2 \quad 0)$.

Токи: $Ik:=Rk^{-1}Ek^{T}$.

Собственные числа Rk: $L:=eigenvals\ (Rk)$.

Собственные векторы матрицы Rk: $W:=eigenvecs(Rk)$

$$V1_i:=W_{i.1} \quad V2_i:=W_{i.2} \quad V3_i:=W_{i.3} \quad V4_i:=W_{i.4}.$$

Проекторы Rk :

$$P1:=V1\cdot V1^{T}\ ; \quad P2:=V2\cdot V2^{T};$$
$$P3:=V3\cdot V3^{T}\ ; \quad P4:=V4\cdot V4^{T}.$$

Общая мощность цепи: $P0:=(Rk^{-1}\cdot Ek)^{T}\cdot Ek$

$$P0=859.892$$

Токи и напряжения спектральных составляющих:

$$Ik1:=P1\cdot Ek\cdot(L_1)^{-1} \qquad Ik2:=P2\cdot Ek\cdot(L_2)^{-1}$$

$$Ik3 := P3 \cdot Ek \cdot (L_3)^{-1} \qquad Ik4 := P4 \cdot Ek \cdot (L_4)^{-1}$$

$$U1 := P1 \cdot Ek \qquad U2 := P2 \cdot Ek \qquad U3 := P3 \cdot Ek \qquad U4 := P4 \cdot Ek$$

Мощности:

$$Ps1 := UI^T \cdot Ik1 \qquad Ps2 := UI^T \cdot Ik2 \qquad Ps3 := UI^T \cdot Ik3 \qquad Ps4 := UI^T \cdot Ik4$$

Проверка: $Ps1 + Ps2 + Ps3 + Ps4$=859.892

Доли мощностей разных спектральных составляющих в общей мощности:

$$\delta 1 := \frac{Ps1}{P0} = 0.385 \qquad \delta 2 := \frac{Ps2}{P0} = 0.027$$

$$\delta 3 := \frac{Ps3}{P0} = 0.195 \qquad \delta 4 := \frac{Ps4}{P0} = 0.393$$

Спектральное разложение исходной матрицы на спектральные подцепи как основа для диагностики причин изменения мощности в результате инцидента:

$$Rk1 := V1 \cdot L_1 \cdot V1^T + V2 \cdot L_2 \cdot V2^T + V3 \cdot L_3 \cdot V3^T + V4 \cdot L_4 \cdot V4^T.$$

Библиографический список

1. Бутырин, П.А. Диагностика электрических цепей по частям / П.А. Бутырин, Т.А. Васьковская. – М.: Изд-во МЭИ, 2003. – 112 с.

2. Грамм, М.И. Матрично-спектральные методы расчётов в электротехнике / М.И. Грамм, Ф.Н. Шакирзянов, Ю.Н. Немов. – М.: Издательский дом МЭИ, 2006. – 204 с.

3. Пенфилд, П. Энергетическая теория электрических цепей / П. Пенфилд, Р. Спенс, С. Дюинкер. – М.: Энергия, 1974. – 152 с.

4. Грамм, М.И. Вариант дедуктивной организации курса теоретической электротехники // Электричество. – 1996. – № 10. – С. 62–69.

5. Воеводин, В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

К содержанию