На правах рукописи

Солдатова Екатерина Александровна

РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ И АЛГОРИТМОВ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ
2.3.1 – Системный анализ, управление и обработка информации

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ЧЕЛЯБИНСК – 2022

Работа выполнена в ФГАОУ ВО "Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)"

Научные руководители:

доктор физико-математических наук, доцент
Келлер Алевтина Викторовна
доктор физико-математических наук, профессор
Загребина Софья Александровна

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук
Чистяков Виктор Филимонович
ФГБУН "Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова" СО РАН, лаборатория дифференциальных уравнений и управляемых систем, главный научный сотрудник

кандидат физико-математических наук
Машков Евгений Юрьевич
ФГБОУ ВО "Юго-Западный государственный университет" кафедра высшей математики, доцент

Ведущая организация:

ФГАОУ ВО "Волгоградский государственный университет"

Защита состоится 30 мая 2022 года, в 15 ч. 00 мин., на заседании диссертационного совета 24.2.437.05 (Д 212.298.14), созданного на базе Южно-Уральского государственного университета, по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, ауд. 1007.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южно-Уральского государственного университета и на сайте:
https://www.susu.ru/ru/dissertation/24243705-d-21229814/soldatova-ekaterina-aleksandrovna

Автореферат разослан «____» __________ 2022 г.

Ученый секретарь диссертационного совета

доктор физ.-мат. наук, доцент Н.А. Манакова

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Актуальность исследования обусловлена наличием большого количества прикладных задач, для исследования которых используются математические модели, учитывающие случайное внешнее воздействие; необходимостью использования результатов современных математических методов для аналитического и численного исследований стохастических математических моделей; важностью алгоритмов обработки информации и системного анализа результатов, получаемых в ходе проведения комплекса вычислительных экспериментов.

В диссертационной работе исследуются три стохастические динамические математические модели.

Математическая модель Баренблатта – Желтова – Кочиной[1] описывает процессы, связанные с фильтрацией жидкости в трещиновато-пористых средах. В её основе лежит уравнение

$$Ld\zeta = M\zeta dt + NdW, \quad L = \lambda - \Delta, \;\; M = \alpha\Delta, \tag{1}$$

с начальным условием Коши

$$\zeta(x, 0) = \xi_0(x) \tag{2}$$

и условием Дирихле

$$\zeta(x, t) = 0, \;\; (x, t) \in \partial G \times [0, T]. \tag{3}$$

Здесь $G \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область, граница области ∂G класса C^∞. Параметры α, λ – вещественные, характеризуют среду, NdW описывает случайное внешнее воздействие, $\zeta = \zeta(x, t)$ – искомый случайный процесс, ξ_0 – заданная гауссова случайная величина.

Линейная математическая модель Осколкова[2] описывает динамику вязкоупругой несжимаемой жидкости, движущейся по трубопроводу, который моделируется геометрическим графом $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}; \mathfrak{E})$. В основе модели лежат уравнения

$$\lambda d\zeta_j - d\zeta_{jxx} = \alpha\zeta_{jxx}dt + NdW_j, \;\; j = \overline{1, m}, \tag{4}$$

с условием Шоуолтера – Сидорова

$$P(\zeta(0) - \xi_0) = 0, \tag{5}$$

с условиями непрерывности

$$\begin{gathered} \zeta_j(0, t) = \zeta_k(0, t) = \zeta_m(l_m, t) = \zeta_n(l_n, t), \\ E_j, E_k \in E^\gamma(V_i), E_m, E_n \in E^\omega(V_i), \end{gathered} \tag{6}$$

и условиями баланса потоков

$$\sum_{j: E_j \in E^\gamma(V_i)} d_j\zeta_{jx}(0, t) - \sum_{k: E_k \in E^\omega(V_i)} d_k\zeta_{kx}(l_k, t) = 0. \tag{7}$$

[1]Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещинноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, № 5. – С. 58–73.

[2]Oskolkov, A.P. Nonlocal problems for one class of nonlinear operator equations that arise in the theory of Sobolev type equations / A.P. Oskolkov // Journal of Soviet Mathematics. – 1993. – Vol. 64, issue 1. – P. 724–735.

Здесь $E^{\alpha}(V_i)$ $(E^{\omega}(V_i))$ – множество ребер с началом (концом) в вершинах V_i, $l_j \in \mathbb{R}_+$ – длина и $d_j \in \mathbb{R}_+$ – площадь поперечного сечения ребра E_j соответственно. Параметр $\alpha \in \mathbb{R}_+$ характеризует вязкость, $\lambda \in \mathbb{R}$ – упругость, оператор P – относительно спектральный проектор, NdW_j описывает случайное внешнее воздействие в j-й секции трубопровода, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n)$ – искомый случайный процесс, ξ_0 – заданная гауссова случайная величина.

Линейная математическая модель Хоффа[3] описывает отклонение от вертикали двутавровых балок в конструкции, которая моделируется геометрическим графом $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}; \mathfrak{E})$. В основе модели лежат уравнения

$$\lambda d\zeta_j + d\zeta_{jxx} = \alpha_j \zeta_j dt + NdW_j, \ \ j = \overline{1, m}, \tag{8}$$

с начально-конечным условием

$$P_0(\zeta(x, \tau_0) - \xi_0(x)) = P_1(\zeta(x, \tau_1) - \xi_1(x)) = 0, \tag{9}$$

с условиями (6) и (7). Параметр $\lambda \in \mathbb{R}_+$ описывает постоянную внешнюю нагрузку, $\alpha_j \in \mathbb{R}$ характеризуют свойства материала j-ой балки, операторы P_0 и P_1 – относительно спектральные проекторы, NdW_j описывает случайное внешнее воздействие на j-ой балке, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n)$ – искомый случайный процесс, ξ_i – независимые друг от друга гауссовы случайные величины, $i = 0, 1$.

В диссертационной работе представленные математические модели со случайным внешним воздействием, характеризующимся винеровским K-процессом [6], редуцируются к абстрактному стохастическому уравнению соболевского типа

$$Ld\zeta = M\zeta dt + NdW, \quad \ker L \neq \{0\}, \tag{10}$$

с различными ненулевыми начальными (2) или (5), либо начально-конечным (9) условиями. Здесь $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{F}$ – гильбертовы пространства, $L, M, N \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}; \mathfrak{F})$; $\zeta = \zeta(t)$ – искомый случайный процесс, а $W = W(t)$ – заданный стохастический K-процесс.

Несмотря на то, что описанные модели относятся к различным предметным областям, они характеризуются одним типом уравнений. В работе все три модели объедены термином "неклассические стохастические линейные динамические модели", тем самым отмечена вырожденность уравнений и неклассические начальные условия.

Аналитические и численные исследования указанных неклассических стохастических моделей развиваются по двум направлениям. В одном из них используется понятие "белого шума", как производной Нельсона – Гликлиха винеровского K-процесса. Этот подход в последние годы получил широкое распространение для стохастических уравнений соболевского типа в работах Г.А. Свиридюка, А. Фавини, А.А. Замышляевой, С.А. Загребиной, Н.А. Манаковой, Т.Г. Сукачевой, и для стохастических систем леонтьевского типа в работах Ю.Е. Гликлиха, Е.Ю. Машкова, Г.А. Свиридюка, А.Л. Шестакова, А.А. Замышляевой, А.В. Келлер, Н.А. Манаковой.

[3]Hoff, N.J. The Analysis of Structures / N.J. Hoff. – N.-Y.: John Wiley; London : Chapman and Hall, 1956. – 493 pp.

В рамках другого направления развивается подход Ито – Стратоновича – Скорохода. Он является одним из самых первых направлений исследования невырожденных стохастических уравнений в конечномерном случае и считается в настоящее время классическим. В исследованиях G. Da Prato, J. Zabczyk подход Ито – Стратоновича – Скорохода применен в бесконечномерном случае. В работах И.В. Мельниковой стохастические уравнения исследуются в пространствах Шварца, при этом используется традиционный подход к понятию белого шума, как обобщенной производной винеровского процесса. M. Kovacs и S. Larsson, используя подход Ито – Стратоновича – Скорохода, исследовали невырожденные модели математической физики. В последнее десятилетие в работах Г.А. Свиридюка, А.А Замышляевой, С.А. Загребиной в рамках этого подхода исследуются неклассические стохастические модели, в диссертационной работе эти методы развиваются для исследования указанных математических моделей.

Подчеркнем, что при исследовании неклассических стохастических моделей общим для обоих направлений является развитие методов теории вырожденных аналитических разрешающих групп операторов для детерминированных уравнений соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f, \ \ker L \neq \{0\}, \tag{11}$$

которые используются для описания и моделирования большого числа физических, технических, экономических, биологических процессов с конца XIX века.

Отличием данного исследования от всех предыдущих является разработка алгоритмов и программного обеспечения, позволяющего проводить обработку информации и системный анализ результатов, получаемых в ходе проведения комплекса вычислительных экспериментов при исследовании стохастических математических моделей. Результатом применения методов системного анализа стало выделение двух групп вычислительных экспериментов при моделировании внешнего воздействия. В первой группе экспериментов в комплексе программ используется процедура генерации нормально распределенных случайных величин с последующей обработкой результатов серии вычислительных экспериментов. Во второй группе моделируется внешнее воздействие, относящееся к редким событиям. Представленные численные алгоритмы могут быть использованы для исследования математических моделей, параметры которых могут приводить как к вырожденному, так и невырожденному случаю.

Подчеркнем, что большое количество приложений и развитие технологий требует проведения междисциплинарных исследований сложных систем с использованием метода математического моделирования. Для эффективного взаимодействия специалистов различных областей знаний при реализации таких исследовательских проектов полезными являются методы структурного системного анализа. В диссертационной работе реализован метод информационно-логического моделирования, который позволил определить методологию диссертационного исследования на основе построенных структурных связей между различными прикладными задачами, видами математических моделей, методами их аналитического и численного исследований.

Целью работы является разработка аналитических и численных методов исследования неклассических стохастических линейных динамических моделей с реализацией алгоритмов анализа и обработки информации и комплексов программ.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Осуществить структурный системный анализ предметной области с применением метода информационно-логического моделирования для проектирования исследования.

2. Провести аналитическое исследование стохастических моделей Баренблатта – Желтова – Кочиной с условием Коши, Осколкова с условием Шоуолтера – Сидорова, Хоффа с начально-конечным условием.

3. Разработать численные методы и алгоритмы исследования линейных стохастических моделей Баренблатта – Желтова – Кочиной с условием Коши, Осколкова с условием Шоуолтера – Сидорова и Хоффа с начально-конечным условием.

4. Разработать алгоритмы и программное обеспечение для обработки информации, получаемой в результате вычислительных экспериментов, и анализа состояния систем при различных значениях их параметров.

5. Провести комплекс вычислительных экспериментов с обработкой информации на примере линейной стохастической модели Баренблатта – Желтова – Кочиной и линейной стохастической модели Хоффа на графе.

Научная новизна. *В области математического моделирования.* Проведено аналитическое исследование стохастических моделей Баренблатта – Желтова – Кочиной с условием Коши, Осколкова с условием Шоуолтера – Сидорова и Хоффа с начально-конечным условием. Найдены условия потраекторной однозначной разрешимости поставленных задач [4–6].

В области численных методов. Предложены алгоритмы численных методов, модифицирующих методы Галеркина, Рунге – Кутты – Фелберга, позволяющие для исследуемых стохастических неклассических линейных динамических моделей находить приближенные решения (потраекторно) [2, 3].

В области комплексов программ. Разработан и зарегистрирован комплекс программ для нахождения приближенного решения стохастических неклассических линейных динамических моделей с начальными или начально-конечными условиями [7, 8]. Проведены вычислительные эксперименты для линейных стохастических моделей Баренблатта – Желтова – Кочиной в области, Осколкова и Хоффа на геометрическом графе.

В области системного анализа, управления и обработки информации. Разработан алгоритм и программное обеспечение обработки информации для линейных стохастических моделей Баренблатта – Желтова – Кочиной, Осколкова и Хоффа с применением методов информационно-логического моделирования [1, 2]. Представлены результаты обработки информации, полученной при проведении комплекса вычислительных экспериментов.

Методология и методы диссертационного исследования. В работе используются методы исследования: математическое моделирование, абстрактно-логический и эмпирический. Метод моделирования с использованием системного подхода позволил на основе анализа развития методов решения практических задач и методов теории уравнений соболевского типа определить объекты исследования – стохастические линейные модели Баренблатта – Желтова – Кочиной, Осколкова и Хоффа. Математический метод, как абстрактно-логический, заключается в использовании методов: 1) линейного функционального анализа – выбор функциональных пространств для решения исследуемых задач; 2) теории уравнений соболевского типа и теории вырожденных групп операторов; 3) численного решения дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Эмпирический метод используется в работе с информацией и ее обработкой.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая значимость работы заключается в обосновании аналитического метода исследования актуальных стохастических неклассических динамических моделей. Полученные результаты о разрешимости исследуемых задач развивают полугрупповой подход в теории вырожденных стохастических уравнений. Применение абстрактных результатов для исследования стохастических неклассических динамических моделей, активно используемых в прикладных исследованиях, развивают методы математического моделирования и системного анализа. Практическая значимость диссертационной работы заключается в применимости результатов исследования к проблемам гидродинамических исследований, моделирования течения жидкости по системе труб, изучения деформаций в конструкции из двутавровых балок. Это позволяет расширить применимость существующих методов оценки состояний сложных систем, их параметров в задачах гидродинамики, геологии при изучении фильтрации воды в почве, повышения эффективности добычи нефти. Комплексы программ реализованы с использованием разработанных алгоритмов численных методов. Интерфейс программы позволяет встраивать ее в вычислительные среды для решения прикладных задач. Реализованы статичная (графики и трехмерные диаграммы) и динамическая визуализации (трехмерная анимация), позволяющие проводить анализ состояний моделируемых систем.

Положения, выносимые на защиту:

– *в рамках развития качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей* получены результаты аналитического исследования математической модели Баренблатта – Желтова – Кочиной для задачи Коши со случайным внешним воздействием и однозначная разрешимость задачи Коши в модели динамики давления жидкости, фильтрующейся в трещиновато-пористой среде со случайным внешним воздействием; результаты аналитического исследования линеаризированной математической модели Осколкова с условием Шоуолтера – Сидорова со случайным внешним воздействием и однозначная разрешимость задачи Шоуолтера – Сидорова в модели динамики давления и скорости вязкоупругой несжимаемой жидкости, движущейся в j-ой секции трубопровода со случайным внешним воздействием; результаты аналитического исследования линейной математической модели Хоффа с начально-конечным условием со случайным внешним воздействием и однозначная разрешимость начально-конечной задачи в модели выпучивания двутавровых балок в конструкции, находящихся под постоянной нагрузкой со случайным внешним воздействием.

– *в рамках разработки, обоснования и тестирования эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий* получены модификация численного метода Рунге – Кутты – Фелберга седьмого порядка точности и разработка алгоритма нахождения приближенного решения начальной задачи для стохастической математической модели Баренблатта – Желтова – Кочиной; модификация численного метода Галеркина и разработка алгоритмов нахождения приближенных решений при исследовании стохастических модели Баренблатта – Желтова – Кочиной, линеаризированной модели Осколкова и линейной модели Хоффа с различными начальными или начально-конечными условиями;

– *в рамках реализации эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов* получены комплекс программ для ЭВМ, реализующих алгоритмы нахождения приближенного решения стохастических уравнений соболевского типа;

– *в рамках разработки специального математического и программного обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации* получены алгоритм и его программная реализация обработки информации комплекса вычислительных экспериментов (на основе метода логико-информационного моделирования) для движения жидкости, фильтрующейся в трещиновато-пористой среде со случайным внешним воздействием; алгоритм и его программная реализация обработки информации комплекса вычислительных экспериментов (на основе метода логико-информационного моделирования) для динамики выпучивания конструкции из двутавровых балок со случайным внешним воздействием.

Апробация результатов. Результаты, изложенные в диссертации, докладывались на Международных конференциях и симпозиумам "Измерения: состояние, перспективы развития" (Челябинск, 2012), "Дифференциальные уравнения и их приложения" (Белгород, 2013), "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений" (Новосибирск, 2013), "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна" (Воронеж, 2016), "Динамические системы, оптимальное управление и математическое моделирование" (Иркутск, 2019), "Новые тренды стохастического анализа" (Геленджик, 2021). Результаты диссертационного исследования были представлены и обсуждены на XVI Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике. Отдельные результаты, выносимые на защиту, представлялись на областных семинарах профессора Г.А. Свиридюка (ФГАОУ ВО "ЮУрГУ (НИУ)", г.Челябинск), профессора С.И. Кадченко (ФГБОУ ВО "МГТУ им. Г.И. Носова", г. Магнитогорск).

Степень достоверности результатов. Степень достоверности результатов диссертации подтверждается глубокой и всесторонней проработкой результатов, опубликованных в ведущих научных журналах. Научные положения, выводы и рекомендации, сформулированные в диссертации, апробированы на международных и всероссийских конференциях и семинарах. Результаты вычислительных экспериментов качественно согласуются с аналитическим результатами.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 14 научных работах, из них шесть статей [1–6] – в рецензируемых журналах из перечня ВАК, в том числе, три статьи [3–5] – в рецензируемом издании из наукометрических баз Scopus и Web of Science; одна зарегистрированная компьютерная программа [7] и один программный комплекс [8]. В совместных с научными руководителями работах научным руководителям принадлежит постановка задачи, на защиту выносятся только результаты, полученные ее автором и не затрагивают интересы соавторов.

Структура и объем работы. Диссертационная работа содержит введение, три главы, заключение, список литературы и два приложения. Объем диссертации составляет 148 страниц. Список литературы содержит 108 наименований.

Основное содержание работы

Введение к диссертации включает в себя актуальность избранной темы, постановку задачи, степень разработанности избранной темы, цели и задачи, научную новизну, теоретическую и практическую значимость работы, методологию и методы диссертационного исследования, положения, выносимые на защиту, степень достоверности и апробацию результатов.

Первая глава состоит из трех параграфов. *Первый параграф* содержит результаты структурного системного анализа предметной области с применением метода информационно–логического моделирования. В основу положена контекстная диаграмма процесса исследования математической модели. Затем, используя метод уровневой декомпозиции, строятся 8 диаграмм, позволяющие разработать методологию исследования неклассических стохастических математических моделей на основе теории относительно ограниченных операторов. *Второй параграф* посвящен разрешимости начальных и начально-конечной задач для линейных уравнений соболевского типа в детерминированном случае. Приводится условие расщепления относительного спектра оператора M

$$\begin{gathered}\sigma^L(M) = \sigma_0^L(M) \cup \sigma_1^L(M), \text{ причем } \sigma_1^L(M) \neq \emptyset, \\ \text{при этом существует замкнутый контур } \gamma_1 \subset \mathbb{C}, \text{ ограничивающий} \\ \text{область } D_1 \supset \sigma_1^L(M), \text{ такой, что } \overline{D_1} \cap \sigma_0^L(M) = \emptyset.\end{gathered} \tag{12}$$

В *третьем параграфе* обсуждаются прикладной характер и особенности исследуемых математических моделей в детерминированном случае, приводятся результаты, полученные ранее другими авторами.

Вторая глава содержит результаты аналитического и численного исследований математической модели Баренблатта – Желтова – Кочиной фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде со случайным внешним воздействием. В *первом параграфе* содержатся результаты аналитического исследования, доказывается теорема об однозначной разрешимости задачи Коши – Дирихле (2), (3) для стохастического уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной (1) потраекторно.

Теорема 1. (2.1.2.)[4] Пусть процесс W является $\mathfrak{F}^1$-значным K-винеровским, оператор $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1)$, $\xi_0 \in \mathbf{L_2}(\Omega, \mathfrak{Z}^1)$ и W – независимы при каждом фиксированном t. Тогда при любых $-\lambda \in \{\mu_k\}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\xi_0 \in \mathbf{L_2}(\Omega, \mathfrak{Z}^1)$ задача (1)–(3), имеет единственное решение $\zeta \in \mathbf{CL_2} = \{\eta(t, \cdot) \in \mathbf{L_2} : t \in I_a^b\}$ вида

$$\zeta(t) = Z^t \xi_0 + \int_0^t Z^{t-s} L_1^{-1} N W(s) ds, \ Z^t = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\mu L - M)^{-1} L e^{\mu t} d\mu. \tag{13}$$

Во *втором параграфе* описан метод Рунге – Кутты – Фелберга для численного исследования математической модели. *Третий параграф* представляет программу, реализующую численный метод Рунге – Кутты – Фелберга, приводятся результаты вычислительных экспериментов. В *четвертом параграфе* описан модифицированный проекционный метод Галеркина для численного исследования математической модели и поиска приближенного решение задачи (1)–(3) на примере неустановившейся фильтрации однородной жидкости в горизонтальном пласте, который вскрыт вертикальной скважиной малого радиуса. При рассмотрении стохастического случая считаем, что на жидкость начинают воздействовать случайная нагрузка, которая моделируется случайным процессом W и случайной величиной ξ_0. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^2$ представляет собой круг радиуса r_0 с центром на оси скважины. Давление жидкости в трещинах находится при решении следующей начально-краевой задачи

$$\begin{gathered} L d\zeta = M \zeta dt + N dW, \quad L = \lambda - \Delta_r, \ \ M = \alpha \Delta_r, \\ |\zeta(0,t)| < +\infty, \ \ \zeta(r_0, t) = 0, \ \ \zeta(r, 0) = \xi_0(r), t \in [0, T], \end{gathered} \tag{14}$$

где $\Delta_r = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}$, $\lambda = \dfrac{1}{\eta}$, η – специфическая характеристика трещиноватой породы, $\alpha = \dfrac{\nu}{\eta}$, ν – коэфффициент пьезопроводности трещиноватой породы.

Приближенное решение начально-краевой задачи (14) находится с помощью модифицированного проекционного метода Галеркина в виде

$$\tilde{\zeta}(r, t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t) X_k(r), \tag{15}$$

$X_k(r) = C_k J_0\Big(\dfrac{\upsilon_k}{r_0} r\Big)$; $C_k = \dfrac{\sqrt{2}}{r_0 J_1\Big(\dfrac{\upsilon_k}{r_0} r\Big)}$; $J_0(r)$, $J_1(r)$ – функции Бесселя нулевого и первого порядка соответственно; υ_k – положительные корни уравнения $J_0(r) = 0$. Внешняя нагрузка, которая моделируется случайным процессом, представлена в виде

$$N dW = \sum_{k=1}^{n} A \sin(wt) X_k(r). \tag{16}$$

В *пятом параграфе* описан алгоритм программы, осуществляющий поиск приближенного решения рассматриваемой задачи. Приведем этапы алгоритма для задачи, имеющей решение, т. е. после проверки выполнения условий Теоремы 1.

[4]В скобках указана нумерация в диссертации.

Шаг 1. Ввод параметров модели α, λ, ω, параметра численного решения n, параметра области r_0 и временного интервала T.

Шаг 2. Ввод параметров случайных величин, генерация случайных величин начального значения $\xi_0(r)$ и случайного параметра A внешнего воздействия (16).

Шаг 3. Поиск собственных значений μ_k и собственных функций $X_k(r)$ оператора $-\Delta_r$ с условием Дирихле.

Шаг 4. Представление приближенного решения в виде (15) и его подстановка в уравнение (14). Умножение полученного уравнения и начальной функции на собственные функции скалярно.

Шаг 5. Сравнение полученных собственных значений μ_k оператора $-\Delta_r$ и параметра λ.

Шаг 5.1. Если $\mu_k = -\lambda$, то включение уравнения в систему алгебраических уравнений. Получение тривиального решения.

Шаг 5.2. Если $\mu_k \neq -\lambda$, то включение уравнения в систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Шаг 6. Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Шаг 7. Получение приближенного решения $\tilde{\zeta}(r,t)$.

С использованием программной реализации данного алгоритма были приведены вычислительные эксперименты. В качестве примера приведем один из них.

Пример 1. Найти приближенное решение задачи (1)–(3) для модели Баренблатта – Желтова – Кочиной модифицированным проекционным методом Галеркина. Заданы следующие коэффициенты для начально-краевой задачи (14): $\alpha = 0,5$, параметр области $r_0 = 7$, $\lambda = -\left(\frac{\mu_2}{7}\right)^2$, количество галеркинских приближений $n = 10$, параметр $T = 60$ временного интервала $[0, T]$, параметры случайного воздействия: математическое ожидание $\boldsymbol{M}(0,t) = 0$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(0,t) = 2$, частота $\omega = 0,5$.

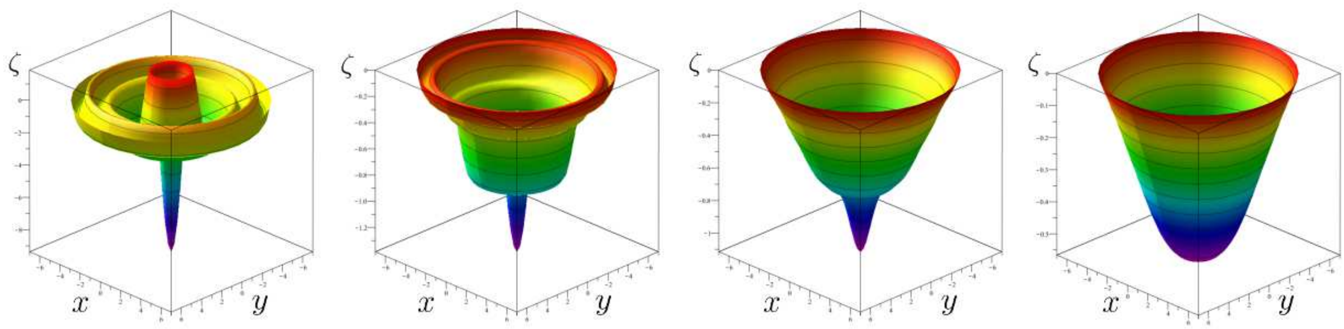
Генерировались случайные величины, входящих в состав разложения для начальной функции ξ_0. Генерация случайного внешнего воздействия проводилась как

$$NdW = A\sin(wt)X_1(r) + \sum_{k=3}^{10} A\sin(wt)X_k(r)$$

при случайном значении $A = 0,1109310767$.

В результате, в соответствии с Шагом 5 алгоритма численного исследования, получена система алгебро-дифференциальных уравнений, содержащая 9 дифференциальных уравнений и одно алгебраическое уравнение, с начальными условиями $a_1(0) = -1,689598304$, $a_2(0) = 0$, $a_3(0) = 0,9830205086$, $a_4(0) = -0,9230094335$, $a_5(0) = -3,528396981$, $a_6(0) = -2,501917785$, $a_7(0) = -1,980152584$, $a_8(0) = 0,2082854429$, $a_9(0) = -2,341814556$, $a_{10}(0) = 2,410637304$.

Приближенное решение начально-краевой задачи может быть представлено в табличном и графическом виде. На рисунке 1 приведем несколько из трехмерных графиков в различные моменты времени t^*.



(a) t^*=0 с (b) t^*=5 с (c) t^*=10 с (d) t^*=15 с

Рис. 1. Результаты вычислительного эксперимента

В *шестом параграфе* представлен алгоритм обработки информации результатов вычислительных экспериментов.

Этап 1. Ввод числа экспериментов первой группы m_1, ввод параметров нормально распределенной случайной величины, генерация случайных величин A_i и ξ_{0i_j}, где $i = \overline{1, m_1}$, $j = \overline{1, n}$.

Этап 2. Выполнение цикла по i Шагов 1–7 алгоритма нахождения приближенного решения; получение результатов для m_1 экспериментов.

Этап 3. Поиск математического ожидания, как неслучайной функции $\boldsymbol{M}(\tilde{\zeta}(r^*, t))$, $r^* \in [0, r_0]$, которая при любом значении t равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайного процесса.

Этап 4. Поиск дисперсии и среднего квадратического отклонения, как неслучайных функций $\boldsymbol{D}(\tilde{\zeta}(r^*, t))$ и $\sigma_\zeta(r^*, t)$, которые при любом значении t равны дисперсии и среднему квадратическому отклонению соответствующего сечения случайного процесса.

Этап 5. Ввод числа экспериментов второй группы m_2, для них моделируется внешнее воздействие при значении случайной величины, вероятность которого крайне мала; ввод величин A_i, на основании физических свойств случайного воздействия, как редкого события; генерация случайной величины ξ_{0i_j}; графическое отображение результатов обработки. Здесь $i = \overline{m_1 + 1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $m_1 + m_2 = m$.

Этап 6. Использование оценки

$$\|\zeta(r, t) - M(\tilde{\zeta}(r, t))\| < 3\sigma_\zeta(t), \tag{17}$$

имеющей место с вероятностью 0,997, для построения графиков.

На рисунке 2 приведены результаты обработки первой группы экспериментов при различных фиксированных значениях r: $r^* = 0$, $r^* = \frac{r_0}{3}$ и $r^* = \frac{2r_0}{3}$.

Третья глава состоит из пяти параграфов и содержит результаты аналитического и численного исследований стохастических линейных математических моделей на геометрических графах. В *первом параграфе* содержатся результаты аналитического исследования модели Осколкова, описывающей динамику скорости и давления несжимаемой вязкоупругой жидкости, движущейся по трубопроводу, со случайным внешним воздействием, доказывается теорема об однозначной разрешимости задачи (4)–(7) потраекторно.

Теорема 2. (3.1.2.) Пусть α, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, W – $\mathfrak{F}^1$-значный K-винеровский процесс, оператор $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1)$. Тогда для любой $\mathfrak{Z}$-значной случайной величины

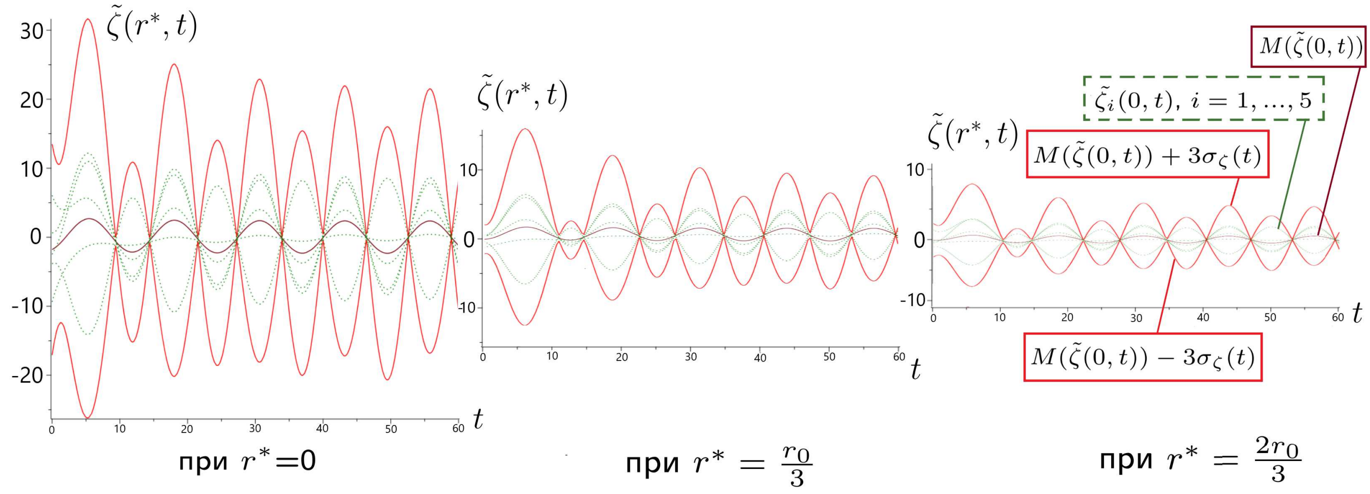


Рис. 2. Результаты обработки первой группы экспериментов

$\xi_0 \in \mathbf{L_2}(\Omega, \mathfrak{Z}^1)$ (независимой от K-винеровского процесса $W(t) \equiv W(t, \omega)$) существует единственное решение задачи (4)–(7).

Во *втором параграфе* содержатся результаты аналитического исследования модели Хоффа, описывающей деформацию в конструкции из двутавровых балок со случайным внешним воздействием, доказывается теорема об однозначной разрешимости задачи (6)–(9) потраекторно.

Теорема 3. (3.2.2.) Пусть $\alpha,\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, W – $\mathfrak{F}^1$-значный K-винеровский процесс, оператор $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1)$. Тогда для любых $\mathfrak{Z}$-значных гауссовых случайных величин $\xi_0, \xi_1 \in \mathbf{L_2}(\Omega, \mathfrak{Z}^1)$, при фиксированном t (независимых друг от друга и от винеровского K-процесса W), существует единственное решение задачи (6)–(9).

В *третьем параграфе* дано описание алгоритма модифицированного проекционного метода Галеркина для численного исследования математических моделей на геометрическом графе. Обсуждаются общие аспекты для обеих моделей и особенности численного алгоритма для каждой из них. В *четвертом параграфе* дано описание программной реализации алгоритма. Приводятся графические отображения результатов вычислительных экспериментов на разных графах с различными начальными условиями.

С использованием программной реализации данного алгоритма были проведены вычислительные эксперименты. В качестве примера приведем один из них.

Пример 2. Найти приближенное решение задачи (6)–(9) для модели Хоффа модифицированным проекционным методом Галеркина. Рассмотрен последовательный пятиреберный геометрический граф с шестью вершинами, длины всех ребер различны: $l_1 = \pi$, $l_2 = 2\pi$, $l_3 = 3\pi$, $l_4 = 4\pi$, $l_5 = 5\pi$, а диаметр сечений выбран один для всех ребер $d_j = 1$, $j = \overline{1,5}$. Для такого графа условия (6) имеют вид: $\zeta_1(l_1) - \zeta_2(0) = 0$, $\zeta_2(l_2) - \zeta_3(0) = 0$, $\zeta_2(l_3) - \zeta_3(0) = 0$, $\zeta_4(l_4) - \zeta_5(0) = 0$ и условия (9) имеют вид: $\zeta_{1x}(0) = 0$, $\zeta_{1x}(l_1) - \zeta_{2x}(0) = 0$, $\zeta_{2x}(l_2) - \zeta_{3x}(0) = 0$, $\zeta_{3x}(l_3) - \zeta_{4x}(0) = 0$, $\zeta_{4x}(l_4) - \zeta_{5x}(0) = 0$, $\zeta_{5x}(l_5) = 0$.

Задав коэффициентах $\alpha = 0,15$, $\lambda = 1,44$, получаем уравнения Хоффа на ребрах графа

$$1,44 d\zeta_j + d\zeta_{jxx} = 0,15\zeta_j dt + N dW_j, \quad j = \overline{1,5}. \tag{18}$$

Решения $\zeta_j(t,x)$, $j=\overline{1,5}$, данной задачи, находятся в виде галеркинских приближений
$$\tilde{\zeta}_j(t,x)=\sum_{k=1}^{7}a_k(t)\varphi_{j,k}(x),\quad j=\overline{1,5}. \tag{19}$$
Здесь $\varphi_k=(\varphi_{1,k},\varphi_{2,k},\varphi_{3,k},\varphi_{4,k},\varphi_{5,k})$.

Пусть выполняется условие (12) расщепления относительного спектра оператора M. Таким образом λ_1, λ_2, $\lambda_3\in\sigma^L_{10}(M)$ и λ_4, λ_5, $\lambda_7\in\sigma^L_{11}(M)$. Отметим, что $\lambda=\lambda_6$, $\lambda_6\in\sigma^L_0(M)$.

В рамках исследования модели будем полагать, что система подвергается такому воздействию, при котором все случайные величины являются здесь нормально распределенными гауссовыми величинами $\sim N(0;0,6)$. Используя начально-конечные условия, получим представление для начальных значений рассматривается следующим образом
$$P_0(\zeta(0)-\xi_0)=\sum_{k:\lambda_k\in\sigma^L_{10}(M)}\langle\zeta(0,x)-\xi_0(x),\varphi_k\rangle\varphi_k=0,$$
$$P_1(\zeta(0)-\xi_1)=\sum_{k:\lambda_k\in\sigma^L_{11}(M)}\langle\zeta(\tau,x)-\xi_1(x),\varphi_k\rangle\varphi_k=0,$$
причем $\xi_0=(\xi_{1,0},\xi_{2,0},\xi_{3,0},\xi_{4,0},\xi_{5,0})$ и $\xi_1=(\xi_{1,1},\xi_{2,1},\xi_{3,1},\xi_{4,1},\xi_{5,1})$ в соответствии с количеством ребер $j=\overline{1,5}$.

Внешнее воздействие на каждом ребре представимо разложением
$$NdW_j=\sum_{k=1}^{5}A\sin(wt)\phi_{j_k}\varphi_k(x)+A\sin(wt)\phi_{j_7}\varphi_7(x)$$
при $A=0,765405620436$, $w=\frac{1}{6}$. Генерировались случайные величины, входящие в состав разложения для случайного внешнего воздействия в соответствии с количеством ребер $j=\overline{1,5}$. Генерировались случайные величины, входящих в состав разложения для функций начального условия, конечного условия. В результате получили в соответствии с шагом 5 алгоритма численного исследования были получены две системы алгебро-дифференциальных уравнений с соответствующими начально-конечными условиями:
1) первая система дифференциальных уравнений с начальными условиями $\tau=0$: $a_1(0)=-0,37641056168,\quad a_2(0)=0,016411436175,\quad a_3(0)=0,086205048568.$
2) вторая система дифференциальных уравнений с конечными условиями $\tau=10$: $a_4(10)=-0,74869454124,\quad a_5(10)=0,26369746669,\quad a_7(10)=-0,06913216419.$
Алгебраическое уравнение получено одно – шестое $a_6(t)=0$ (так как шестое собственное значение равно λ), начальные условия при этом $a_6(0)=0$.

Объединяем две системы, после чего находится приближенное решение начально-конечной задачи на рассматриваемом графе. Программа позволяет получить решение в табличном и графическом виде. На рисунке 3 показано в каком виде представляется решение в работе – двумерные графики в различные моменты времени t^*. Ось абсцисс отражает значения переменной x и длины ребер графа. Ось ординат отражает значения функции $\tilde{\zeta}_j(x,t^*)$ – динамику выпучивания двутавровых балок в конструкции, находящихся под постоянной нагрузкой со случайным внешним воздействием.

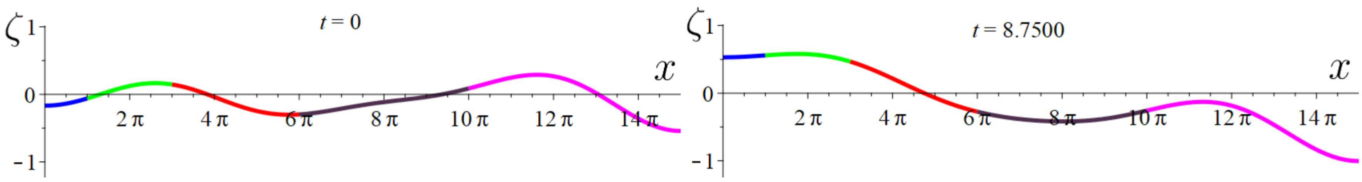


Рис. 3. Результаты вычислительного эксперимента

В *пятом параграфе* представлен алгоритм программы, позволяющей провести обработку информации, полученной в результате серии вычислительных экспериментов при моделировании которых используются уравнение Осколкова и Хоффа на графе. Приводятся результаты серии двух групп вычислительных экспериментов и графическое отображение результатов их обработки. Используется оценка (17), имеющая место с вероятностью 0,997, для построения графиков. Для модели Хоффа на рисунке 4 приводятся результаты обработки первой группы экспериментов при различных фиксированных значениях t^*, для этого были взяты три значения $t^* = 0$, $t^* = 2$, $t^* = 4$.

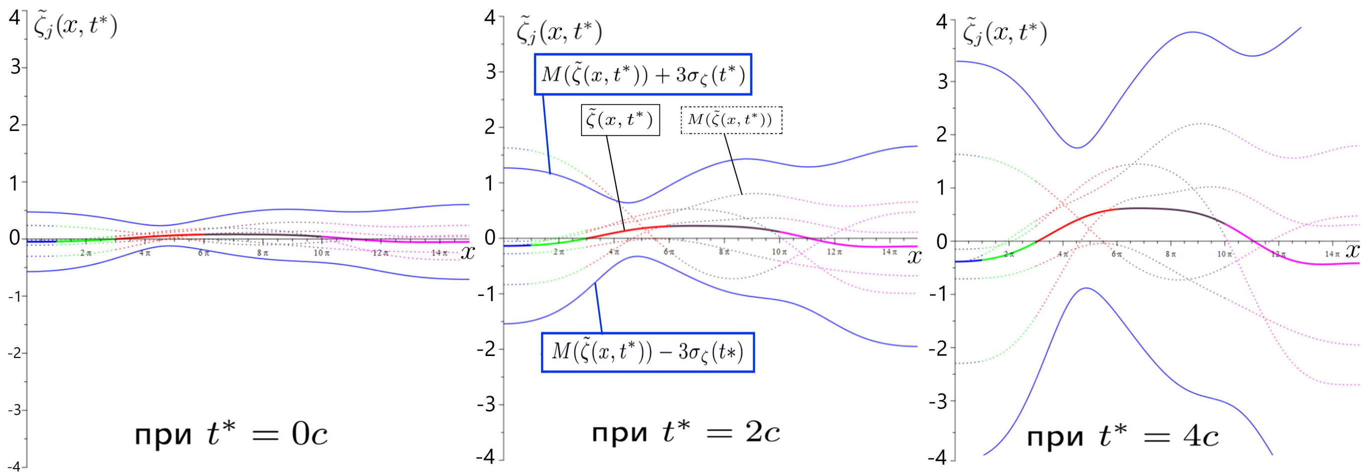


Рис. 4. Результаты обработки первой группы экспериментов

Заключение

В диссертационной работе выполнены все задачи, таким образом, цель достигнута: разработаны аналитические и численные методы исследования неклассических стохастических линейных динамических моделей с реализацией алгоритмов анализа и обработки информации и комплексов программ. Полученные результаты позволяют рекомендовать использовать их в исследованиях неклассических стохастических моделей и обработке информации, получаемой при этом. К перспективам дальнейшей разработки тематики отнесем исследования неклассических стохастических эволюционных моделей, аналитические исследования стохастических уравнений соболевского типа с относительно p—радиальным оператором с последующей разработкой численных методов и алгоритмов, обработки информации.

Основные публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в ведущих российских рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК при Министерстве науки и высшего образования РФ, и в рецензируемых научных журналах и изданиях, индексируемых Scopus, Web of Science, RSCI

1. Soldatova, E.A. Information–logical modelling in studies of non-classical linear models of mathematical physics / **E.A. Soldatova**, A.V. Keller, S.A. Zagrebina // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2021. – Vol. 8, № 3. – P. 14–31. (ВАК)

2. Солдатова, Е.А. Алгоритмы и обработка информации в численном исследовании стохастической модели Баренблатта – Желтова – Кочиной / **Е.А. Солдатова**, А.В. Келлер // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия Математика. Механика. Физика. – 2021. – Т. 13, № 4. – С. 29–36. (ВАК, RSCI)

3. Soldatova, E.A. Numerical Research of the Barenblatt – Zheltov – Kochina Stochastic Model / S.I. Kadchenko, **E.A. Soldatova**, S.A. Zagrebina // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. – 2016. – Vol. 9, № 2. – P. 117–123. (ВАК, Scopus, WoS)

4. Soldatova, E.A. The Stochastic Linear Oskolkov Model of the Oil Transportation by the Pipeline / S.A. Zagrebina, **E.A. Soldatova**, G.A. Sviridyuk // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2015. – Vol. 113. – P. 317–325. (Scopus, WoS)

5. Солдатова, Е.А. Начально-конечная задача для линейной стохастической модели Хоффа / Е.А. Солдатова // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 2. – С. 124–128. (ВАК, Scopus, WoS)

6. Солдатова, Е.А. Линейные уравнения соболевского типа с относительно p-ограниченными операторами и аддитивным белым шумом / **Е.А. Солдатова**, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2013. – Т. 6, № 1. – С. 20–34. (ВАК, RSCI)

Свидетельства о регистрации программы:

7. Численное исследование движения жидкости, фильтрующейся в трещиновато-пористой среде со случайным внешним воздействием: Свидетельство № 2015612400 / **Солдатова Е.А.**, Загребина С.А. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 2014660025; заявл. 07.10.2014; зарегистр. 18.02.2015, реестр программ для ЭВМ.

8. Программный комплекс решения стохастических уравнений соболевского типа: Свидетельство № 2016614622 /**Солдатова Е.А.**, Кадченко С.И., Загребина С.А. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 2016611855; заявл. 09.03.2016; зарегистр. 27.04.2016, реестр программ для ЭВМ.

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 21.03.2022. Формат 60×84 1/16. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 0,93. Тираж 120 экз. Заказ 54/100.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.

454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.