УДК 517.958 + 514.745 + 519.21

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ХОФФА В ПРОСТРАНСТВАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ, ЗАДАННЫХ НА ДВУМЕРНОЙ СФЕРЕ

Д.Е. Шафранов, А.В. Беляев

Приведены результаты применения, полученных ранее, теорем о разрешимости задачи Коши для абстрактных стохастических дифференциальных уравнений, с нестандартным пониманием дифференцирования, в виде уравнений соболевского типа с относительно ограниченными операторами в пространствах дифференцируемых «шумов». Это пространства дифференциальных форм, определенных на n-мерном гладком компактном ориентированном римановом многообразии без края, причем коэффициенты этих дифференциальных форм являются винеровскими стохастическими процессами. В силу недифференцируемости таких процессов, в обычном смысле, мы используем производную Нельсона–Гликлиха. Применение абстрактных теорем обоснованно в силу доказанных относительной ограниченности оператора для линейного уравнения Хоффа и возможности использования пространства дифференциальных форм, заданных на *двумерной* сфере.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, производная Нельсона–Гликлиха, дифференциальные формы, оператор Лапласа–Бельтрами, стохастические дифференциальные уравнения.

Введение

Пусть U и F это банаховы пространства. В работе [1] исследовались вопросы разрешимости абстрактных линейных уравнений соболевского типа, с необратимым оператором при производной, вида

$$L\dot{u} = Mu, \tag{1}$$

причем оператор $L \in \mathbf{L}(U;F)$ из пространства линейных и ограниченных операторов, а оператор $M \in Cl(U;F)$ из пространства замкнутых плотноопределенных (т. е. $\overline{\operatorname{dom} M} = U$) операторов в случае относительно ограниченного (по-другому (L,p)-ограниченного) оператора M. На основе этих исследований в [2] исследовано уравнение Хоффа (линейное при $\beta = 0$), описывающее изгиб двутавровой балки под нагрузкой

$$(\lambda - \Delta)\dot{u} = \alpha u + \beta u^3, \tag{2}$$

с $(L,0)$-ограниченным оператором $M = \alpha I$ (константа умножить на тождественный оператор) и в пространстве дифференциальных форм, определенных на n-мерном гладком компактном ориентированном римановом многообразии без края. Заметим, что оператор Лапласа в этих пространствах обобщается, с точностью до знака, оператором Лапласа–Бельтрами. Задача Коши

$$u(0) = u_0, \tag{3}$$

для уравнения (2) обладает фазовым пространством, содержащим траектории всех решений, для которых доказаны существование и единственность решения.

Позже с помощью производной Нельсона–Гликлиха [3] начались исследования для стохастического абстрактного линейного уравнения соболевского типа с (L, p)-ограниченным оператором M [4] в пространствах винеровских стохастических процессов

$$L\overset{o}{\eta} = M\eta. \tag{4}$$

Так как винеровские процессы непрерывны, но недифференцируемы в каждой точке в обычном понимании, то используем производную в смысле Нельсона–Гликлиха. Здесь мы исследуем разрешимость задачи Коши для стохастического варианта линейного уравнения Хоффа в пространстве дифференциальных форм, определенных на двумерной сфере. Мы действуем по аналогии с [5] но только для линейного уравнения Хоффа и взяв в качестве риманова многообразия без края стандартную двухмерную сферу.

Пространства дифференцируемых «шумов»

Введем в рассмотрение $\Omega = (\Omega, A, P)$ некоторое полное вероятностное пространство с вероятностной мерой P, ассоциированное с сигма-алгеброй A подмножеств этого пространства Ω. Через $\Re$ обозначим множество действительных чисел, наделенное сигма-алгеброй, и тогда отображение $\xi : A \to \Re$ назовем случайной величиной. Множество случайных величин ξ, математическое ожидание которых равняется нулю $M\xi = 0$, и, чья дисперсия конечна $D\xi < +\infty$, образуют гильбертово пространство $\mathbf{L}_2$ со скалярным произведением вида $(\xi_1, \xi_2) = M\xi_1\xi_2$ и с нормой обозначаемой $\|\xi\|_{\mathbf{L}_2}$. Если взять подалгебру A_0 сигма-алгебры A, то получим подпространство $\mathbf{L}_2^0 \subset \mathbf{L}_2$ случайных величин, которые измеримы относительно алгебры A_0.

Измеримое отображение $\eta : J \times A \to \Re$, где за $J = (a,b) \subset \Re$ будем обозначать некоторый интервал, называется стохастическим процессом, случайная величина $\eta = \eta(\cdot, \omega)$ называется сечением стохастического процесса, а функция вида $\eta(t, \cdot)$, $t \in J$ – траекторией стохастического процесса. Стохастический процесс $\eta = \eta(t, \omega)$ назовем непрерывным, если п.н. (почти наверно, т.е. при п.в. (почти всех) $\omega_0 \in A$ траектории $\eta = \eta(t, \omega_0)$ являются непрерывными функциями. Множество $\eta = \eta(t, \omega)$ непрерывных стохастических процессов образует банахово пространство обозначаемое CL_2 с соответствующей нормой $\|\eta\|_{L_2} = \sup\limits_{t\in J}\left(D\eta(t,\omega)\right)^{1/2}$.

Для стохастического процесса $\eta \in CL_2$ определим производную Нельсона–Гликлиха в точке $t \in J$ называется следущая случайная величина $\overset{o}{\eta}(t,\omega) = \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{\Delta t\to 0+} M_t^{\eta}\left(\frac{\eta(t+\Delta t,\cdot)-\eta(t,\cdot)}{\Delta t}\right) + \lim\limits_{\Delta t\to 0+} M_t^{\eta}\left(\frac{\eta(t-\Delta t,\cdot)-\eta(t,\cdot)}{\Delta t}\right)\right)$, если предел существует в смысле равномерной метрики на $t \in J$. Здесь $M_t^{\eta} = M(\cdot|N_t^{\eta})$, математическое ожидание на $N_t^{\eta} \subset A$ сигма-алгебре, порожденной некоторой случайной величиной $\eta = \eta(t,\omega)$. Если производная $\overset{o}{\eta}(\cdot,\omega)$ Нельсона–Гликлиха стохастического процесса η существует почти для всех точек интервала J, то мы говорим о существовании производной Нельсона–Гликлиха $\overset{o}{\eta}(\cdot,\omega)$ почти наверное на J. Множество непрерывных стохастических процессов, имеющих непрерывную производную Нельсона–Гликлиха $\overset{o}{\eta} \in CL_2$ образуют банахово C^1L_2 пространство с нормой $\|\eta\|_{C^1L_2} = \sup\limits_{t\in J}\left(D\eta(t,\omega) + D\overset{o}{\eta}(t,\omega)\right)^{1/2}$. Далее по индукции имеем банаховы пространства $C^lL_2, l \in N$ стохастических процессов, обладающих на интервале J непрерывными производными Нельсона–Гликлиха до порядка $l \in N$ включительно. Нормы в них задаются следующим образом $\|\eta\|_{C^lL_2} = \sup\limits_{t\in J}\left(\sum_{k=0}^{l} D\overset{o}{\eta}^{(k)}(t,\omega)\right)^{1/2}$, причем $\overset{o}{\eta}^{0}(t,\omega) = \eta(t,\omega)$.

Относительно ограниченные операторы и разрешающие группы

Пусть имеются вещественные сепарабельные гильбертовы пространства U и F, обозначим $\mathbf{L}(U;F)$ пространство линейных ограниченных операторов, а через $Cl(U;F)$ пространство линейных замкнутых и плотно определенных операторов. Рассмотрим гильбертовы пространства $U_K L_2$ и $F_K L_2$, где $K = \{\lambda_k\} \subset \Re$ обозначение монотонной последовательности такой, что сходится ряд $\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^2 < +\infty$. Стохастическое уравнение соболевского типа

$$L\overset{o}{\eta} = M\eta. \tag{5}$$

можно редуцировать к двум уравнениям вида $A\overset{\circ}{v} = Bv$ на на $H_K L_2$ (которое соответствует $U_K L_2$ или $F_K L_2$).

Справедливы:

Утверждение 1. Оператор $A \in \mathbf{L}(U;F)$ точно тогда, когда $A \in \mathbf{L}(U_K L_2; F_K L_2)$.

Утверждение 2. Оператор $B \in Cl(U;F)$ точно тогда, когда $B \in Cl(\boldsymbol{U}_K \boldsymbol{L}_2; \boldsymbol{F}_K \boldsymbol{L}_2)$.

Определение 1. Оператор $M \in \boldsymbol{Cl}(U;F)$ называется p-ограниченным относительно оператора $L \in \boldsymbol{L}(U;F)$ (короче (L,p)-ограниченным), $p \in \{0\} \cup N$, если:

i) L-спектр оператора M $\sigma^L(M) = \{\mu \in C : (\mu L - MI)^{-1} \notin \boldsymbol{L}(U,F)\}$ ограничен гладким контуром γ;

ii) при разложение в ряд Лорана оператор-функции резольвенты $(\mu L - MI)^{-1}$, ∞ является устранимой особой точкой ($p = 0$) или полюсом порядка $p \in N$.

Пусть $\mu \in \rho^L(M) = C \backslash \sigma^L(M)$ из резольвентного множества. Оператор-функции $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1} L$ и $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ называются соответственно правой и левой L-резольвентами оператора M .

Теорема 1 [1]. *Пусть оператор* M (L,p)*-ограниченый, тогда существуют* $U^t = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma R^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu$, $F^t = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma L^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu$ *голоморфные и равномерно ограниченные группы разрешающих операторов, где контур* Γ *ограничивает* L*-спектр,* $t \geq 0$.

Множество $\mathrm{k}erV^\bullet = \{v \in \boldsymbol{H}_K \boldsymbol{L}_2 : V^t v = 0\}$ называется ядром, а множество $\mathrm{im}V^\bullet = \{v \in \boldsymbol{H}_K \boldsymbol{L}_2 : \lim_{t \to 0+} V^t v = v_0\}$ – образом аналитической группы $\{V^t : t \geq 0\}$. Обозначим $\boldsymbol{U}^1 = \boldsymbol{U}^1_K \boldsymbol{L}_2$ $(\boldsymbol{F}^1 = \boldsymbol{F}^1_K \boldsymbol{L}_2)$, которые представляют из себя замыкание $\mathrm{im}R^L(M)$ $(\mathrm{im}L^L(M))$ в норме пространства $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_K \boldsymbol{L}_2$ $(\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_K \boldsymbol{L}_2)$.

Теорема 2 [4]. *Пусть оператор* M (L,p)*-ограниченный, тогда*
$\mathrm{im}U^\bullet = \boldsymbol{U}^1_K \boldsymbol{L}_2$ *и* $\mathrm{im}F^\bullet = \boldsymbol{F}^1_K \boldsymbol{L}_2$.

Ранее исследовалась и задача Коши [4]

$$\eta(t) = \eta_0. \tag{6}$$

В пространствах дифференциальных «шумов» $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_K \boldsymbol{L}_2, \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_K \boldsymbol{L}_2$, где имеет место представление элементов в виде ряда

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k \xi_k(t) \varphi_k . \tag{7}$$

Теорема 3. [4] *Пусть оператор* M (L,p)*-ограниченый, тогда для* $\forall \eta_0 \in \boldsymbol{U}^1 \subset \boldsymbol{U}$ *существует единственное решение задачи (5), (6).*

Задача Коши для стохастического уравнения Хоффа в пространствах дифференциальных форм, заданных на двумерной сфере

Пусть Ω_n n-мерное гладкое компактное ориентированное риманово многообразие без края.

Замечание 1. Частным случаем таких многообразий является двухмерная сфера.

На многообразии заданы дифференциальные q-формы с коэффициентами являющимися случайными величинами

$$\chi(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i1+i2+\ldots+in=q}\chi_{i1,i2,\ldots,iq}(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1^{i1}\wedge dx_2^{i2}\wedge\ldots\wedge dx_n^{in}\,. \quad (8)$$

Здесь $i_1,i_2,\ldots,i_n$ равны 0 или 1 в зависимости от присутствия в слагаемом соответстствующего дифференциала переменной. В этих пространствах задано скалярное произведение

$$(\chi_1,\chi_2)_0=\int_{\Omega_n}\chi_1\wedge *\chi_2\,, \quad (9)$$

где χ_1,χ_2 две q-формы. Пополняя пространство q-форм по соответствующей скалярному произведению норме получим пространство $\boldsymbol{H}_q^0$ непрерывных q-форм. По аналогии можно получить простанство один и дважды дифференцируемых q-форм, причем они непрерывно и плотно вложены друг в друга $\boldsymbol{H}_q^2\subset\boldsymbol{H}_q^1\subset\boldsymbol{H}_q^0$. В силу теории Ходжа–Кодаиры существует расщепление пространств в прямую сумму потенциальных, соленоидальных и гармонических q-форм

$$\boldsymbol{H}_q^j=\boldsymbol{H}_{qd}^j\oplus\boldsymbol{H}_{q\delta}^j\oplus\boldsymbol{H}_{q\Delta}^j,\quad \boldsymbol{j}=0,1,2.$$

Рассмотрим линейное стохастическое уравнение Хоффа

$$(\lambda+\Delta)\overset{o}{\eta}=\alpha\eta \quad (10)$$

и задачу Коши

$$\eta(t)=\eta_0\,. \quad (11)$$

Операторы определим как $L=(\lambda+\Delta),\quad M=(\alpha I)$, где Δ – оператор Лапласа–Бельтрами, обобщающий стандартный Лапласиан с точностью до знака [2], а I – тождественный оператор.

Пространство $U=(\boldsymbol{H}_{q\Delta}^2)^\perp$ прямая сумма пространств ортогональных гармоническим дважды дифференцируемых q-форм, определенных на двумерной сфере, чьи коэффициенты из $\boldsymbol{L}_2$ и раскладываются в ряд вида (7) аналогично $F=(\boldsymbol{H}_{k\Delta}^0)^\perp$ это прямая сумма ноль раз дифференцируемых (непрерывных) q-форм, пополненных по соответствующим нормам. На двумерной сфере $\{v_l\}=\{l\cdot(l+1)\}$ последовательность собственных чисел оператора Лапласа–Бельтрами с учетом кратности, а $\{\varphi_l\}$ последовательность собственных функций соответствующих этим числам. Если на сфере использовать сферические координаты следующего вида $x=\sin\Theta\cos\Psi;y=\sin\Theta\sin\Psi;z=\cos\Theta;$ то собственные функции раскладываются в ряд Фурье $\varphi_l(\Theta,\Psi)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}Y_l^k(\Theta)e^{ik\psi}$, где функции $Y_l^k(\Theta)$ решение уравнения

$$\frac{1}{\sin\Theta}\frac{d}{d\Theta}\left\{\sin\Theta\frac{dY_l^k}{d\Theta}\right\}-\frac{k^2}{\sin\Theta}Y_l^k=-Y_l^k.$$

Оно представимо через полиномы Лежандра от косинусов Θ в виде

$$Y_l^k(\Theta)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\cdot\frac{(l-|k|)!}{(l+|k|)!}}(\cos\Theta).$$

Из теоремы 2 и общей теории [1] следует, что для стохастического уравнения

$$L\overset{o}{\eta}=M\eta \tag{12}$$

фазовое пространство, т. е. те начальные условия задачи Коши (11), для которых существует единственное решение уравнения Хоффа (12), имеет вид

$$\boldsymbol{U^1}=\boldsymbol{U},\quad \lambda\neq\nu_l;\quad \boldsymbol{U^1}=\sum_{l\neq l_0}\exp\left(\frac{\alpha}{\lambda-\nu_l}t\right)(\eta_0,\varphi_l)\varphi_l,\quad \lambda=\nu_{l_0}. \tag{13}$$

Из теоремы 3 и содержимого этого параграфа сразу следует:

Теорема 4. *При любых $\alpha,\lambda\in\Re\backslash\{0\}$ и любом $\eta_0\in\boldsymbol{U^1}$ существует единственное решение $\eta=\eta(t)$ задачи (11), (12) на двумерной сфере.*

Заключение

Тем самым исследована морфология фазового пространства, для линейного стохастического уравнения Хоффа в пространстве дифференциальных форм, заданных на двумерной сфере.

Библиографический список

1. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи матем. наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47–74.

2. Шафранов, Д.Е. Уравнение Хоффа как модель упругой оболочки / Д.Е. Шафранов, А.И. Шведчикова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – Т. 18(277), вып. 12. – С. 77–81.

3. Gliklikh, Yu.E. Stochastic delay equations and inclusions with mean derivatives on Riemannian manifolds / Yu.E. Gliklikh, S.E.A. Mohammed // Global and Stochastic Analysis. – 2014. – Vol. 1. – P. 49–56.

4. Свиридюк, Г.А.. Динамические модели соболевского типа с условием Шоуолтера – Сидорова и аддитивными «шумами» / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Т. 7, вып. 1. – С. 90–103.

5. Китаева, О.Г. Экспоненциальные дихотомии в модели Баренблатта–Желтова–Кочиной в пространствах дифференциальных форм с «шумами» /