УДК 519.863

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ N-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСВЯЗНОЙ ЦЕПИ

Р.Э. Шангин

Вводится класс n-последовательносвязных цепей. Рассматриваются области применения n-последовательносвязных цепей, в частности задачи оптимального размещения в дискретных постановках и задачи выбора оптимального поведения в системах, описываемых управляемыми марковскими процессами. Приводятся основные характеристики n-последовательносвязной цепи, такие как число ребер, размер максимальной клики, хроматическое и цикломатическое число и др. Исследуются свойства n-последовательносвязных цепей. Определяются отношения класса n-последовательносвязных цепей к классам совершенных, триангулированных, полных и расщепляемых графов.

Ключевые слова: триангулированный граф, хордальный граф, дерево клик, задача Вебера, n-последовательносвязная цепь.

Введение

Пусть $G = (J, E)$ – неориентированный граф с множеством вершин J и множеством ребер E. Пусть $N(j)$ – множество вершин графа $G = (J, E)$, смежных с вершиной j. Пусть $\varphi(G)$ – плотность графа G. Далее будем предполагать, что на множестве вершин J введена нумерация и каждая вершина отождествлена с присвоенным ей номером.

Определение 1. *Связный граф $G = (J, E)$ называется n-последовательносвязной цепью (n-sequentially connected chain), если на множестве его вершин можно задать такую нумерацию, что для любой вершины графа G с номером j, имеет место включение*

$$N(j) \subseteq \{(j-n), ..., (j-1), (j+1), ..., (j+n)\} : n = \varphi(G) - 1.$$

В дальнейшем такие вершины i и k будем именовать крайними вершинами n-последовательносвязной цепи. Заметим, что такие вершины i и k будут симплициальные.

На рис. 1 для различных n представлены n-последовательносвязные цепи.

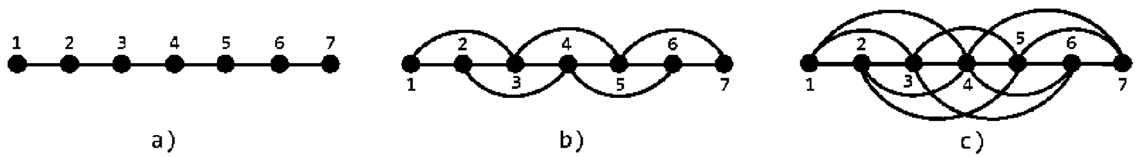

Рис. 1. n-последовательносвязные цепи: a) 1-последовательносвязная цепь; b) 2-последовательносвязная цепь; c) 3-последовательносвязная цепь

То есть 1-последовательносвязная цепь представляет собой простую цепь, т.к. для любых j $|N(j)| \leq 2$ и каждая вершина такой цепи связана не более чем с одной предшествующей вершиной. В 2(3)-последовательносвязной цепи каждая вершина связана не более чем с двумя (тремя) предыдущими вершинами соответственно.

На данный момент можно выделить два основных направления использования n-последовательносвязных цепей.

Первое – задачи размещения, в частности, задача Вебера в дискретной постановке [1], так как структура некоторых производственных процессов представляет собой n-последовательносвязную цепь. Например, в работе [2] предложен точный квазиполиномиальный алгоритм для решения задачи Вебера для неориентированной n-последовательносвязной цепи и конечного дискретного множества мест размещения.

Второе направление – решение задач выбора оптимального поведения в системах, описываемых управляемыми марковскими процессами, когда цепь Маркова является n-сложной, так как структура n-сложной марковской цепи представляет собой n-последовательносвязную цепь.

Основные характеристики и свойства n-последовательносвязной цепи

Приведем характеристики n-последовательносвязной цепи $G = (J, E)$.

1. Число ребер графа G равно:

$$|E| = (|J| - n) \cdot n + \sum_{i=\overline{1,n}} (n - i) = (|J| - n) \cdot n + \frac{n^2 - n}{2} = n \cdot \left(|J| - \left(\frac{n+1}{2} \right) \right);$$

2. Размер максимальной клики графа G равен $n + 1$, причем существует $|J| - n$ таких максимальных клик;
3. Граф G имеет 2 симплициальные вершины;
4. Число вершинной связности ξ_G графа G равно n, т.е. любая n-последовательно-связная цепь является n-связным графом;
5. Хроматическое число χ_G графа G равно $n + 1$;
6. Цикломатическое число C_G графа G равно:

$$C_G = n \cdot \left(|J| - \left(\frac{n+1}{2} \right) \right) - |J| + 1 = \left(|J| - \frac{n}{2} - 1 \right) \cdot (n - 1).$$

Рассмотрим некоторые свойства n-последовательносвязной цепи $G = (J, E)$.

Теорема 1. *В n-последовательносвязной цепи $G = (J, E)$ ни один из порожденных подграфов не является простым циклом длины $l \geq 4$.*

Доказательство. В пронумерованной n-последовательносвязной цепи $G = (J, E)$ рассмотрим две цепи $L_1 = (J_{L1}, E_{L1})$ и $L_2 = (J_{L2}, E_{L2})$, номера вершин которых принадлежат множествам N_{L1} и N_{L2} соответственно, причем

$$N_{L1} = \{j, j + k_1, j + k_1 + k_2, ..., j + \sum_{i=1}^{m} k_i\},$$

где $j \in \{1, 2, ..., |J_{L1}|\}$ и для любых $i = 1, 2, ..., m$ целые числа $k_i \in \{1, 2, ..., n\}$, при том, что $j + \sum_{i=1}^{m} k_i \leq |J_{L1}|$;

$$N_{L2} = \{j'', j'' - h_1, j'' - h_1 - h_2, ..., j'' - \sum_{t=1}^{w} h_t, j\},$$

где $j'' = j + \sum_{i=\overline{1,m}} k_i$ и для любых $t = 1, 2, ..., w$ целые числа $h_t \in \{1, 2, ..., n\}$, при том, что $j'' - \sum_{t=1}^{w} h_t > j$. Пусть $L = L_1 \cup L_2$ – простой цикл длины $m + w + 1 \geq 4$.

Пусть некоторая вершина цепи L_2 с номером $j'' - \sum_{t=1}^{\varpi} h_t$, где $\varpi \in \{1, 2, ..., w\}$, находится «между» вершинами цепи L_1 с номерами $j + \sum_{i=1}^{\rho} k_i$ и $j + \sum_{i=1}^{\rho+1} k_i$, где $\rho \in \{1, 2, ..., m\}$ и $k_{\rho+1} \geq 2$. Очевидно, что

$$j + \sum_{i=1}^{\rho} k_i < j'' - \sum_{t=1}^{\varpi} h_t < j + \sum_{i=1}^{\rho+1} k_i.$$

Для такой вершины цепи L_2 с номером $j'' - \sum_{t=1}^{\varpi} h_t$ найдется хотя бы одно ребро (хорда) $(j + \sum_{i=1}^{\rho} k_i, j'' - \sum_{t=1}^{\varpi} h_t) \in E$ либо $(j'' - \sum_{t=1}^{\varpi} h_t, j + \sum_{i=1}^{\rho+1} k_i) \in E$, которое не принадлежит множествам ребер цепей L_1 и L_2, т. к. цикл $L = L_1 \cup L_2$ по определению простой и

$$(\forall j \in \{1, 2, ..., |J|\}) \qquad N(j) \subseteq \{(j - n), .., (j - 1), (j + 1), .., (j + n)\},$$

и для любых $i \in \{1, 2, ..., m\}$ и $t \in \{1, 2, ..., w\}$ справедливо неравенство $1 \leq k_i, h_t \leq n$. Исходя из этого, в графе G ни один из порожденных подграфов не является простым циклом длины $l \geq 4$. Теорема 1 доказана. □

Использованные в доказательстве теоремы 1 простые цепи L_1 и L_2, а так же хорды, соединяющие несмежные вершины простого цикла L в 3-последовательносвязной цепи представлены на рис. 2.

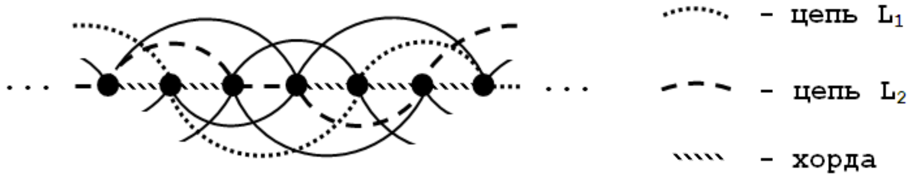

Рис. 2. bsd

Исходя из теоремы 1 n-последовательносвязная цепь при любых значениях параметра n является триангулированным (хордальным) графом [3–6]. Несмотря на справедливость теоремы 1 имеют место следующие свойства n-последовательносвязной цепи.

Теорема 2. *В n-последовательносвязной цепи $G = (J, E)$ при $n > 2$ с количеством вершин $|J| \geq 2n + 1$ существует порожденный подграф, являющийся циклом длины $l \geq 4$.*

Доказательство. Для доказательства теоремы 2 необходимо и достаточно найти в графе G такой цикл L длины $l \geq 4$, для которого в графе G не существует ребра соединяющего две несмежные вершины цикла L.

Пусть $L = (J_L, E_L) : |E_L| \geq 4$ цикл в графе G, номера вершин которого принадлежат множеству N_L, причем

$$N_L = \{j, j + n, j + 2n, ..., j + kn, j + kn - 1, j + (k - 1)n, j + (k - 1)n - 1, j + (k - 2)n, ..., j\},$$

при условии, что целое число $k = 2, 3, ...$, при том, что $j + kn \leq |J_L|$.

Очевидно, что для любой вершины $l \in J_L$ не существует таких ребер $(l, m) \in E : m \in J_L$, которые бы не принадлежали множеству ребер E_L цикла L, так как известно, что для любых $j \in \{1, 2, ..., |J|\}$ множество $N(j) \subseteq \{(j-n), .., (j-1), (j+1), .., (j+n)\}$. Теорема 2 доказана. □

Такой цикл L в n-последовательносвязной цепи при $n = 3, 4$ представлен на рис. 3.

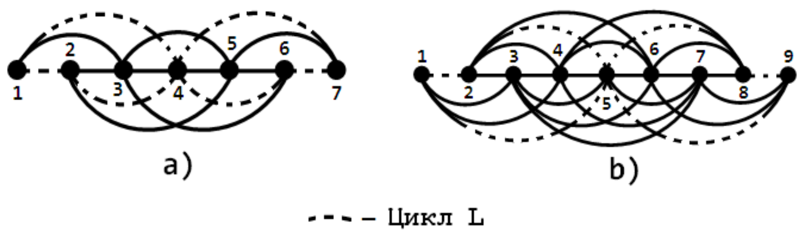

Рис. 3. csd

Теорема 3. *В любой n-последовательносвязной цепи $G = (J, E)$ при $n \geq 4$ существует порожденный подграф, являющийся циклом длины $l \geq 4$.*

Доказательство. Положим, что $A = (J_A, E_A)$ – подграф n-последовательносвязной цепи $G = (J, E)$ при $n \geq 4$, образующий клику размера $k + 1$, где $4 \leq k \leq n : k(\text{mod } 2) \equiv 2$.

Так как степени всех вершин такой клики A четны, то подграф M индуцированный множеством вершин клики A является эйлеровым графом, а значит найдется такой цикл $L = M$, который включает в себя все вершины и ребра порожденного графа $M \in G$.

Исходя из этого, в графе G существует порожденный подграф L, являющийся циклом длины $l \geq 4$. Теорема 3 доказана. □

Несмотря на справедливость теорем 2 и 3 имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *В n-последовательносвязной цепи $G = (J, E)$ при $n = 2$ ни один из порожденных подграфов не является циклом длины $l \geq 4$.*

Доказательство. Пусть $L = (J_L, E_L) : |E_L| \geq 4$ – цикл в графе G, где $J_L = \{j, i_1, i_2, ..., i_t, j\} : j \in J$.

Рассмотрим два случая цикла L: первый случай – когда вершина i_1 есть вершина с номером $j + 1$, второй случай – когда вершина i_1 есть вершина с номером $j + 2$.

Рассмотрим первый вариант первого случая цикла L, когда

$$J_L = \{j, j+1, i_2, ..., i_r, j', j+1, j-1, i_{r+4}, ..., i_t, j\} : j' \in \{j+2, j+3\}.$$

В данном варианте при любых $j' \in \{j+2, j+3\}$ в графе G имеется ребро $(j, j+2) \in E$, соединяющее две несмежные вершины цикла L (рис. 4, a – b), т.к. вершина с номером $j + 2$ при любых j содержится в цикле L и цикл заканчивается в вершине с номером j. В дальнейшем такое ребро будем называть хордой.

Во втором варианте первого случая цикла L вершина $i_t = j + 2$. Здесь, в свою очередь, возможны два случая: первый, когда $i_2 = j + 3$ – с хордой $(j + 1, j + 2) \in E$, т.к. для любых $i_{t-1} \in \{j + 3, j + 4\}$ ребро $(j + 1, j + 2) \in E$ не принадлежит циклу L (рис. 4, c), второй, когда $i_2 = j+2$ и $i_3 \in \{j+3, j+4\}$ – с хордой $(j+1, j+3) \in E$, т.к. при $i_3 = j+3$ вершина $i_{t-1} = j+4$, а при $i_3 = j+4$ вершина $i_{t-1} = j+3$ и во всех случаях ребро $(j+1, j+3) \in E$ не принадлежит циклу L (рис. 4, d – e).

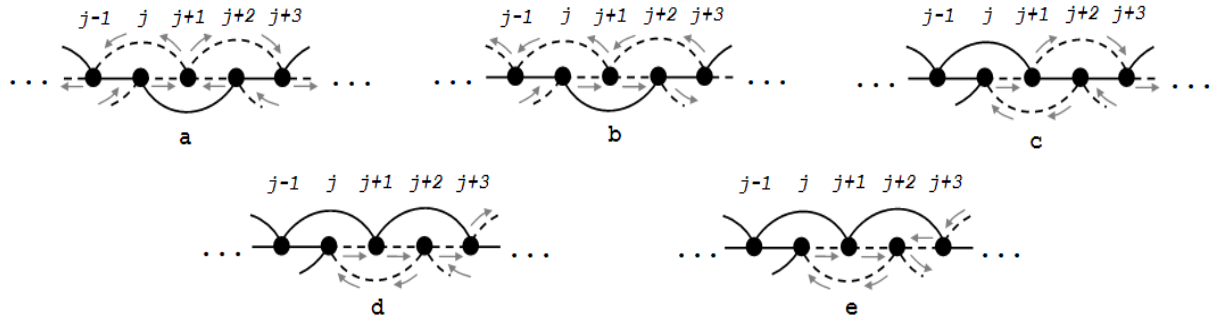

Рис. 4. Первый вариант построения цикла L в 2-последовательносвязной цепи

Рассмотрим первый вариант второго случая цикла L, когда

$$J_L = \{j, j+2, i_2, ..., i_r, j+3, j+1, j', i_{r+4}, ..., i_t, j\} : j' \in \{j, j-1\}.$$

В данном варианте при $j' = j-1$ в графе G содержатся две хорды $(j, j+1) \in E$ и $(j+1, j+2) \in E$ (рис. 5, a), а при $j' = j$ – хорда $(j+1, j+2) \in E$ (рис. 5, b).

Во втором варианте второго случая цикла L, когда

$$J_L = \{j, j+2, i_2, ..., i_r, j+2, j+1, j', i_{r+4}, ..., i_t, j\} : j' \in \{j, j-1\},$$

при $j' = j-1$ в графе G содержится хорда $(j, j+1) \in E$ (рис. 5, c), а при $j' = j$, когда $i_2 \in \{j+3, j+4\}$ – хорда $(j+1, j+3) \in E$ (рис. 5, d – e).

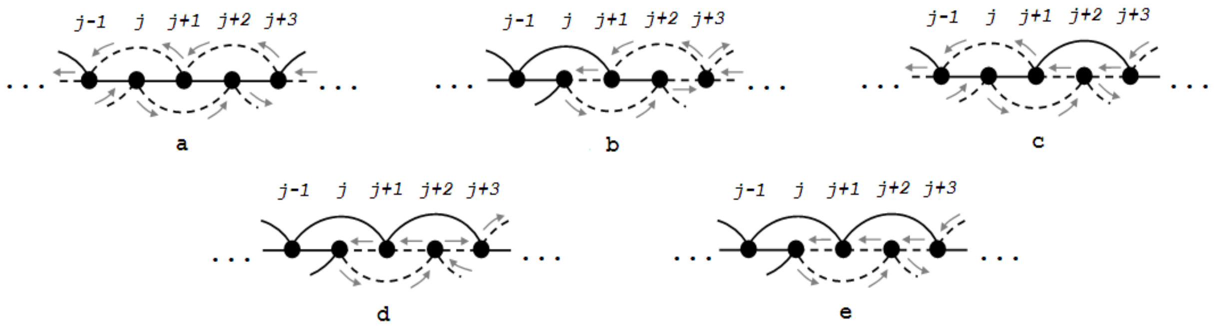

Рис. 5. Второй вариант построения цикла L в 2-последовательносвязной цепи

Так как цикл L во всех возможных случаях содержит хорду, то в n-последовательносвязной цепи $G = (J, E)$ при $n = 2$ ни один из порожденных подграфов не является циклом длины $l \geq 4$. Теорема 4 доказана. $\square$

Так как согласно теореме 1 любая n-последовательносвязная цепь является триангулированным графом, свойства n-последовательносвязной цепи повторяют свойства хордального графа. В частности справедливы

Свойство 1. Любая n-последовательносвязная цепь является совершенным графом.

Свойство 2. Любое разделяющее множество вершин n-последовательносвязной цепи, минимальное относительно включения, есть клика.

Свойство 3. Если n-последовательносвязная цепь отлична от полного графа, то в ней имеется две симплициальные вершины.

Свойство 4. Каждая часть n-последовательносвязной цепи относительно разделяющего множества вершин, являющегося кликой – совершенный граф.

Свойство 5. Неориентированная n-последовательносвязная цепь имеет дерево клик, причем древовидная ширина n-последовательносвязной цепи равна $n+1$.

Отношение класса n-последовательносвязных цепей к другим классам графов представлено графически на рисунке 6.

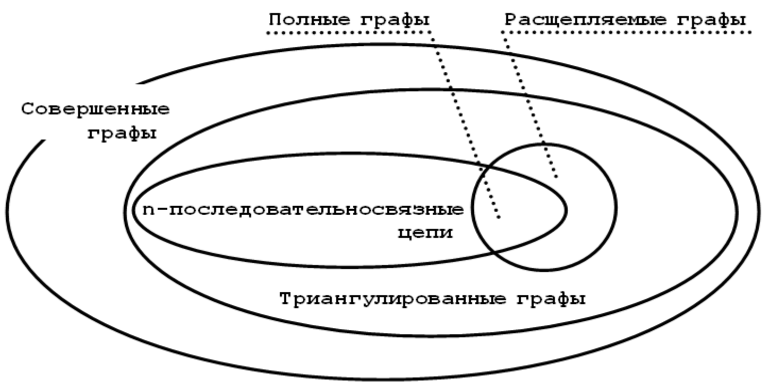

Рис. 6. Отношения классов графов

Т.е. класс n-последовательносвязных цепей принадлежит классам совершенных и триангулированных графов, при том, что n-последовательносвязные цепи с числом вершин $|J| = n+1$ принадлежат классу полных графов, а n-последовательносвязные цепи с числом вершин $|J| = n+2$ – классу расщепляемых графов.

Заключение

В работе введено понятие неориентированной n-последовательносвязной цепи. Обозначены области применения n-последовательносвязных цепей. Рассмотрены основные характеристики n-последовательносвязной цепи.

Доказано, что в n-последовательносвязной цепи при любых значениях параметра n ни один из порожденных подграфов не является простым циклом длины $l \geq 4$, из чего следует, что класс n-последовательносвязных цепей принадлежит классу триангулированных графов.

Так же доказано, что в n-последовательносвязной цепи при $n \geq 2$ с количеством вершин $|J| \geq 2n+1$ и в любой n-последовательносвязной цепи при $n \geq 4$ существует порожденный подграф, являющийся циклом длины $l \geq 4$, при том, что в n-последовательносвязной цепи при $n = 2$ ни один из порожденных подграфов не является циклом длины $l \geq 4$.

Определено отношение класса n-последовательносвязных цепей к классам совершенных, триангулированных, полных и расщепляемых графов.

Литература

1. Panyukov, A.V. Polynomial Algorithms to Finite Veber Problem for a Tree Network / A. V. Panyukov, B.V. Pelzwerger // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 1991. – Vol. 35. – P. 291–296.
2. Шангин, Р.Э. Детерминированный алгоритм для решения задачи Вебера для n-последовательносвязной цепи / Р.Э. Шангин // XIII Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям: Труды Всероссийской конференции (Новосибирск, 15–17 октября 2012 г.). URL: `http://conf.nsc.ru/ym2012/ru/reportview/137128` (дата обращения 15.10.2012).
3. Bender, E.A. Almost All Chordal Graphs Split / E.A. Bender, L.B. Richmond, N. C. Wormald // Journal of the Australian Mathematical Society. – 1985. – Vol. 38. – P. 214–221.
4. McKee, T.A. On the Chordality of a Graph / T.A. McKee, E.R. Scheinerman // Journal of Graph Theory. – 1993. – Vol. 17. – P. 221–232.
5. McKee, T.A. Beyond Chordal Graphs / T.A. McKee // Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing. – 1997. – Vol. 23. – P. 21–31.
6. Dirac, G.A. On Rigid Circuit Graphs / G.A. Dirac // Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg. – 1961. – Vol. 25. – P. 71–76.

Роман Эдуардович Шангин, аспирант, кафедра экономико-математических методов и статистики, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), `shanginre@gmail.com`.

ON SOME PROPERTIES OF N-SEQUENTIALLY CONNECTED CHAIN

R.E. Shangin, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)

It is introduced the class of the nonoriented n-sequentially connected chain. It is considered the application fields of the n-sequentially connected chains, in particular the problems of optimal location in discrete formulations, and the problems of selection the optimal conduct in systems, described by Markov controllable processes. The main characteristics of n-sequentially connected chains, such as the number of edges, the size of the maximum clique, the chromatic and the cyclomatic numbers, etc. are given. The relations of the class n-sequentially connected chains to perfect, triangulated, composite and splittable classes of graphs are determined.

Keywords: triangulated graph, chordal graph, tree-clique, Weber problem, the n-sequen-tially connected chain.

References

1. Panyukov A.V., Pelzwerger B.V. Polynomial Algorithms to Finite Veber Problem for a Tree Network. Journal of Computational and Applied Mathematics. 1991. Vol. 35. P. 291–296.
2. Shangin R.E. Determinirovannyj algoritm dlja reshenija zadachi Vebera dlja n-posledovatelnosvjaznoj cepi [The Deterministic Algorithm for Solving the Weber Problem for

the n-sequentially Connected Chain]. XIII Vserossijskaja konferencija molodyh uchenyh po matematicheskomu modelirovaniju i informacionnym tehnologijam: trudy Vserossijskoj konferencii (Novosibirsk, Russia, 15–17 oktjabrja 2012) [The XIII All-Russian Conference of Young Scientists on Mathematical Modeling and Information Technologies: Proceedings of the All-Russian Conference (Novosibirsk, Russia, 15–17 October 2012)]. URL: `http://conf.nsc.ru/ym2012/ru/reportview/137128.pdf`.

3. Bender E.A. Almost All Chordal Graphs Split. Journal of the Australian Mathematical Society. 1985. Vol. 38. P. 214–221.
4. McKee T.A. On the Chordality of a Graph. Journal of Graph Theory. 1993. Vol. 17. P. 221–232.
5. McKee T.A. Beyond Chordal Graphs. Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing. 1997. Vol. 23. P. 21–31.
6. Dirac G.A. On Rigid Circuit Graphs. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg. 1961. Vol. 25. P. 71–76.

Поступила в редакцию 1 ноября 2012 г.