

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КВАТЕРНИОНОВ ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ МЕХАНИЗМОВ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ ЦЕПЯМИ

В.А. Смирнов, В.Б. Федоров

На примере механизма с параллельными кинематическими цепями, имеющего три степени свободы, показана возможность использования кватернионов при построении математических моделей таких механизмов.

Одним из путей совершенствования технологического оборудования является использование при его построении нетрадиционных кинематических схем. Часто под такими схемами понимают схемы механизмов, имеющих параллельные кинематические цепи, связывающие исполнительный орган с основанием [1-3].

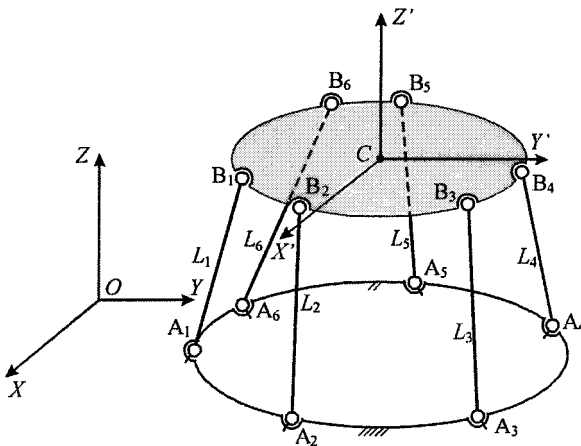


Рис. 1

Наиболее известным механизмом с параллельными кинематическими цепями (МПКЦ) является платформа Стюарта - шестикординатный механизм платформенного типа [4], схема которого показана на рис. 1. В данном механизме платформа соединена с основанием посредством шести штанг длиной L_i . Каждая из штанг соединена с платформой сферическим шарниром B_i , с основанием - через карданный шарнир A_i .

Длины штанг L_i целесообразно принять за обобщенные координаты рассматриваемого механизма, так как они однозначно описывают пространственную ориентацию платформы и удобны с точки зрения управления оборудованием, построенным на базе этого механизма.

Однако с точки зрения практического использования более полезны параметры, непосредственно характеризующие положение платформы. Назовем эти параметры выходными координатами механизма. В качестве выходных координат могут выступать координаты сферических шарниров B_i .

Математическая модель механизма должна связывать его обобщенные и выходные координаты:

$$L_i^2 = (x_{A_i} - x_{B_i})^2 + (y_{A_i} - y_{B_i})^2 + (z_{A_i} - z_{B_i})^2, \quad i=1...6. \quad (1)$$

В шесть уравнений (1) входят шесть обобщенных координат и 18 выходных координат. Следовательно, не все выходные координаты являются независимыми. Поэтому уравнения (1) должны быть дополнены 12 уравнениями связи вида [5]

$$(x_{B_i} - x_{B_j})^2 + (y_{B_i} - y_{B_j})^2 + (z_{B_i} - z_{B_j})^2 = |B_i B_j|^2, \quad (2)$$

где $i \neq j$ и расстояния между шарнирами B_i и B_j известны и постоянны.

Выбором иных выходных координат можно существенно упростить математическую модель. Можно принять в качестве выходных координат механизма три линейные координаты некоторой характерной точки C платформы, назовем ее полюсом, в неподвижной системе координат $OXYZ$ и три угловые координаты, определяющие разворот платформы вокруг полюса из некоторого начального состояния.

В качестве выходных угловых координат могут выступать, например, углы Крылова: угол рыскания ψ , угол тангажа ϑ , угол крена γ [6]. Данные углы позволяют пересчитать координаты

ты сферических шарниров, заданные в системе координат $CX'Y'Z'$, в систему координат $OXYZ$ [5]:

$$\begin{pmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \\ z_{B_i} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & x_C \\ m_1 & m_2 & m_3 & y_C \\ n_1 & n_2 & n_3 & z_C \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_{B_i} \\ y'_{B_i} \\ z'_{B_i} \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $l_1 = \cos \psi \cos \gamma + \sin \vartheta \sin \psi \sin \gamma$; $l_2 = \sin \psi \cos \vartheta$; $l_3 = -\cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma$;
 $m_1 = -\sin \psi \cos \gamma + \sin \vartheta \cos \psi \sin \gamma$; $m_2 = \cos \psi \cos \vartheta$; $m_3 = \sin \psi \sin \gamma + \cos \psi \sin \vartheta \cos \gamma$;
 $n_1 = \cos \vartheta \sin \gamma$; $n_2 = -\sin \vartheta$; $n_3 = \cos \vartheta \cos \gamma$.

В этом случае уравнения (1) после преобразований примут следующий вид:

$$\begin{aligned} L_i^2 &= (x_{A_i} - x_C)^2 + (y_{A_i} - y_C)^2 + (z_{A_i} - z_C)^2 + x_{B_i}^2 + y_{B_i}^2 + z_{B_i}^2 + \\ &+ 2[(C\psi C\gamma + S\vartheta S\psi S\gamma)x'_{B_i} + S\psi C\vartheta y'_{B_i} + (S\psi S\vartheta C\gamma - C\psi S\gamma)z'_{B_i}](x_C - x_{A_i}) + \\ &+ 2[(S\vartheta C\psi S\gamma - S\psi C\gamma)x'_{B_i} + C\psi C\vartheta y'_{B_i} + (S\psi S\gamma + C\psi S\vartheta C\gamma)z'_{B_i}](y_C - y_{A_i}) + \\ &+ 2[C\vartheta S\psi x'_{B_i} - S\vartheta y'_{B_i} + C\vartheta C\psi z'_{B_i}](z_C - z_{A_i}), i=1...6, \end{aligned}$$

где для сокращения записи введены обозначения: $S\psi = \sin \psi$, $C\psi = \cos \psi$ и т. д.

Пусть необходимо составить математическую модель для механизма, показанного на рис. 2. Количество степеней свободы этого механизма $H = 6(8-1) - 3 \cdot 3 - 5 \cdot 6 = 3$. Следовательно, пространственная ориентация платформы должна описываться тремя обобщенными координатами.

Примем, что обобщенными координатами являются длины штанг L_i , выходными будем считать координаты сферических шарниров B_i в неподвижной системе координат $OXYZ$. Запишем уравнения, связывающие обобщенные и выходные координаты:

$$L_i^2 = (x_{A_i} - x_{B_i})^2 + (y_{A_i} - y_{B_i})^2 + (z_{A_i} - z_{B_i})^2, i=1...3. \tag{4}$$

В уравнения (4) входят 9 координат сферических шарниров, следовательно эти уравнения должны быть дополнены 6 уравнениями связи. Однако для рассматриваемого механизма можно записать только три уравнения, аналогичные (2):

$$\begin{aligned} (x_{B_1} - x_{B_2})^2 + (y_{B_1} - y_{B_2})^2 + (z_{B_1} - z_{B_2})^2 &= |B_1 B_2|^2; \\ (x_{B_2} - x_{B_3})^2 + (y_{B_2} - y_{B_3})^2 + (z_{B_2} - z_{B_3})^2 &= |B_2 B_3|^2; \\ (x_{B_1} - x_{B_3})^2 + (y_{B_1} - y_{B_3})^2 + (z_{B_1} - z_{B_3})^2 &= |B_1 B_3|^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Остальные уравнения связи должны быть записаны из каких-то иных условий, например, учитывающих, что точки B_i - центры соответствующих шарниров, лежат в заданных плоскостях.

На рис. 2 показана плоскость, в которой лежит точка B_1 . Данная плоскость проходит через штангу L_1 , перпендикулярно прямой, являющейся осью вращения шарнира A_1 . Если ось вращения шарнира A_1 задана уравнением

$$\frac{x - x_{A_1}}{l_{A_1}} = \frac{y - y_{A_1}}{m_{A_1}} = \frac{z - z_{A_1}}{n_{A_1}},$$

где l_{A_1} , m_{A_1} , n_{A_1} - направляющие косинусы в системе координат $OXYZ$, то уравнение плоскости, перпендикулярной этой прямой и проходящей через точку B_1 , будет иметь вид [8]

$$l_{A_1}(x - x_{B_1}) + m_{A_1}(y - y_{B_1}) + n_{A_1}(z - z_{B_1}) = 0.$$

Так как эта плоскость проходит через точку пересечения штанги L_1 с осью вращения шарнира A_1 (точку A_1), то можно записать дополнительное уравнение связи

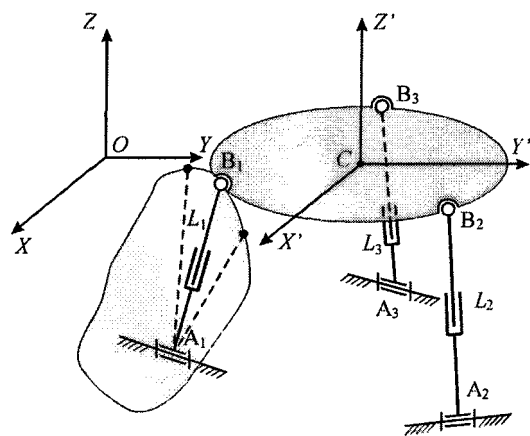


Рис. 2

$$l_{A_1}(x_{A_1} - x_{B_1}) + m_{A_1}(y_{A_1} - y_{B_1}) + n_{A_1}(z_{A_1} - z_{B_1}) = 0.$$

Аналогично для остальных штанг:

$$l_{A_2}(x_{A_2} - x_{B_2}) + m_{A_2}(y_{A_2} - y_{B_2}) + n_{A_2}(z_{A_2} - z_{B_2}) = 0;$$

$$l_{A_3}(x_{A_3} - x_{B_3}) + m_{A_3}(y_{A_3} - y_{B_3}) + n_{A_3}(z_{A_3} - z_{B_3}) = 0.$$

Оси вращения цилиндрических шарниров обычно лежат в плоскостях, параллельных плоскости OXY . В этом случае $n_{A_1} = n_{A_2} = n_{A_3} = 0$ и дополнительные уравнения связи несколько упрощаются:

$$l_{A_1}(x_{A_1} - x_{B_1}) + m_{A_1}(y_{A_1} - y_{B_1}) = 0;$$

$$l_{A_2}(x_{A_2} - x_{B_2}) + m_{A_2}(y_{A_2} - y_{B_2}) = 0;$$

$$l_{A_3}(x_{A_3} - x_{B_3}) + m_{A_3}(y_{A_3} - y_{B_3}) = 0.$$

(6)

Совместное решение девяти уравнений (4)-(6) позволит определить выходные координаты по известным обобщенным координатам, т. е. решить прямую задачу о положениях.

При решении обратной задачи о положениях необходимо задать три выходные координаты и с использованием уравнений (4)-(6) определить обобщенные координаты - длины штанг L_i .

Если при функционировании механизма представляет интерес пространственное положение его платформы, то в качестве выходных координат целесообразно использовать координаты полюса C в системе координат $OXYZ$ и три угловые координаты, характеризующие поворот платформы вокруг полюса - углы Крылова. В этом случае для решения задач о положениях потребуется совместно решать шесть уравнений - по числу выходных координат механизма:

$$L_1^2 = (x_{A_1} - l_1 x'_{B_1} - l_2 y'_{B_1} - l_3 z'_{B_1} - x_C)^2 + (y_{A_1} - m_1 x'_{B_1} - m_2 y'_{B_1} - m_3 z'_{B_1} - y_C)^2 + (z_{A_1} - n_1 x'_{B_1} - n_2 y'_{B_1} - n_3 z'_{B_1} - z_C)^2;$$

$$L_2^2 = (x_{A_2} - l_1 x'_{B_2} - l_2 y'_{B_2} - l_3 z'_{B_2} - x_C)^2 + (y_{A_2} - m_1 x'_{B_2} - m_2 y'_{B_2} - m_3 z'_{B_2} - y_C)^2 + (z_{A_2} - n_1 x'_{B_2} - n_2 y'_{B_2} - n_3 z'_{B_2} - z_C)^2;$$

$$L_3^2 = (x_{A_3} - l_1 x'_{B_3} - l_2 y'_{B_3} - l_3 z'_{B_3} - x_C)^2 + (y_{A_3} - m_1 x'_{B_3} - m_2 y'_{B_3} - m_3 z'_{B_3} - y_C)^2 + (z_{A_3} - n_1 x'_{B_3} - n_2 y'_{B_3} - n_3 z'_{B_3} - z_C)^2;$$

(7)

$$l_{A_1}(x_{A_1} - l_1 x'_{B_1} - l_2 y'_{B_1} - l_3 z'_{B_1} - x_C) + m_{A_1}(y_{A_1} - m_1 x'_{B_1} - m_2 y'_{B_1} - m_3 z'_{B_1} - y_C) = 0;$$

$$l_{A_2}(x_{A_2} - l_1 x'_{B_2} - l_2 y'_{B_2} - l_3 z'_{B_2} - x_C) + m_{A_2}(y_{A_2} - m_1 x'_{B_2} - m_2 y'_{B_2} - m_3 z'_{B_2} - y_C) = 0;$$

$$l_{A_3}(x_{A_3} - l_1 x'_{B_3} - l_2 y'_{B_3} - l_3 z'_{B_3} - x_C) + m_{A_3}(y_{A_3} - m_1 x'_{B_3} - m_2 y'_{B_3} - m_3 z'_{B_3} - y_C) = 0.$$

Уравнения (7) получены из (4) и (6) с использованием (3). Уравнения (5) исключены из рассмотрения, так как при подстановке в них координат сферических шарниров, рассчитанных с использованием (3), они превращаются в тождества.

Из шести выходных координат только три являются независимыми. Принять, какие из выходных координат использовать в качестве независимых, т. е. для каких координат задавать значения при решении обратной задачи о положениях, зачастую можно только по результатам численного решения прямой задачи для различных значений обобщенных координат.

Покажем, как могут быть решены прямая и обратная задачи о положениях для рассматриваемого механизма с использованием кватернионов.

Введем в рассмотрение систему координат $A_1 X_1 Y_1 Z_1$, оси которой сонаправлены соответствующим осям системы координат $OXYZ$, и вектор \vec{r}_1 , начало которого совпадает с точкой A , (рис. 3), а координаты равны $r_{1X} = 0$, $r_{1Y} = 0$, $r_{1Z} = L_1$. Очевидно, что вектор \vec{r}_1 соответствует вертикальному положению штанги L_1 . Положению этой штанги при работе механизма соответствует вектор \vec{r}_1^* . С использованием математического аппарата кватернионов [7] переход от вектора \vec{r}_1 к вектору \vec{r}_1^* можно записать как

$$\vec{r}_1^* = \Lambda_1 \circ \vec{r}_1 \circ \tilde{\Lambda}_1,$$

где Λ_1 – нормированный кватернион, заданный в системе координат $A_1X_1Y_1Z_1$; $\tilde{\Lambda}_1$ – кватернион, сопряженный с Λ_1 ; \circ – символ операции умножения кватернионов.

Координаты точки B_1 конца вектора \vec{r}_1 определяются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_{B_1} \\ y_{B_1} \\ z_{B_1} \end{pmatrix} = \Lambda_1 \circ \vec{r}_1 \circ \tilde{\Lambda}_1 + \begin{pmatrix} x_{A_1} \\ y_{A_1} \\ z_{A_1} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Аналогично могут быть получены координаты точек B_2 и B_3 .

Кватернион Λ как гиперкомплексное число записывается в следующей форме:

$$\Lambda = \lambda_0 + i_1\lambda_1 + i_2\lambda_2 + i_3\lambda_3, \quad (9)$$

где λ_j – действительные числа; i_j – мнимые единицы. Для нормированного кватерниона

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1. \quad (10)$$

Кватернион $\tilde{\Lambda}$, сопряженный с Λ , записывается как

$$\tilde{\Lambda} = \lambda_0 - i_1\lambda_1 - i_2\lambda_2 - i_3\lambda_3. \quad (11)$$

Применительно к задаче описания вращения твердого тела, имеющего закрепленную точку, мнимые единицы i_j трактуются как орты некоторой прямоугольной системы координат. При таком подходе параметры λ_j определяют направление оси поворота твердого тела в системе координат, задаваемой ортами i_j ; параметр λ_0 характеризует угол \mathcal{G}^* поворота тела вокруг этой оси: $\lambda_0 = \cos \mathcal{G}^*/2$.

Примем, что для кватерниона Λ_1 орты i_j сонаправлены осям системы координат $A_1X_1Y_1Z_1$. С учетом (9) и (11) и свойств кватернионов [7] распишем преобразование (8):

$$\begin{aligned} x_{B_1} &= (\lambda_{01}^2 + \lambda_{11}^2 - \lambda_{21}^2 - \lambda_{31}^2) \cdot r_{1X} + 2(\lambda_{11}\lambda_{21} - \lambda_{01}\lambda_{31}) \cdot r_{1Y} + 2(\lambda_{11}\lambda_{31} + \lambda_{01}\lambda_{21}) \cdot r_{1Z} + x_{A_1}; \\ y_{B_1} &= 2(\lambda_{11}\lambda_{21} + \lambda_{01}\lambda_{31}) \cdot r_{1X} + (\lambda_{01}^2 + \lambda_{21}^2 - \lambda_{11}^2 - \lambda_{31}^2) \cdot r_{1Y} + 2(\lambda_{21}\lambda_{31} - \lambda_{01}\lambda_{11}) \cdot r_{1Z} + y_{A_1}; \\ z_{B_1} &= 2(\lambda_{11}\lambda_{31} - \lambda_{01}\lambda_{21}) \cdot r_{1X} + 2(\lambda_{21}\lambda_{31} + \lambda_{01}\lambda_{11}) \cdot r_{1Y} + (\lambda_{01}^2 + \lambda_{31}^2 - \lambda_{11}^2 - \lambda_{21}^2) \cdot r_{1Z} + z_{A_1}. \end{aligned}$$

Так как $r_{1X} = r_{1Y} = 0$, $r_{1Z} = L_1$ и $\lambda_{31} = 0$, полученные выражения существенно упрощаются:

$$x_{B_1} = 2\lambda_{01}\lambda_{21}L_1 + x_{A_1}; \quad y_{B_1} = y_{A_1} - 2\lambda_{01}\lambda_{11}L_1; \quad z_{B_1} = (2\lambda_{01}^2 - 1)L_1 + z_{A_1}. \quad (12)$$

Условие $\lambda_{31} = 0$ следует из того, что любое положение штанги можно рассматривать как поворот в шарнире A_1 из исходного вертикального положения на угол \mathcal{G}^* вокруг оси, лежащей в плоскости $X_1A_1Y_1$. При этом ориентация этой оси в плоскости задана, что устанавливает связь между компонентами кватерниона: $\lambda_{21} = k_1\lambda_{11}$, $k_1 = m_{A_1}/l_{A_1}$. Выражение для координаты z_{B_1} записано с использованием условия (10) нормирования кватерниона.

Для определения параметров кватернионов запишем с использованием (12) уравнения вида

$$\begin{aligned} (x_{B_j} - x_{B_j})^2 + (y_{B_j} - y_{B_j})^2 + (z_{B_j} - z_{B_j})^2 &= |B_j B_j|^2; \\ (2k_2\lambda_{02}\lambda_{12}L_2 + x_{A_2} - 2k_1\lambda_{01}\lambda_{11}L_1 - x_{A_1})^2 &+ (2\lambda_{01}\lambda_{11}L_1 - y_{A_1} - 2\lambda_{02}\lambda_{12}L_2 + y_{A_2})^2 + \\ + (2\lambda_{02}^2 - 1)L_2 + z_{A_2} - [2\lambda_{01}^2 - 1]L_1 - z_{A_1})^2 &= |B_2 B_1|^2; \end{aligned}$$

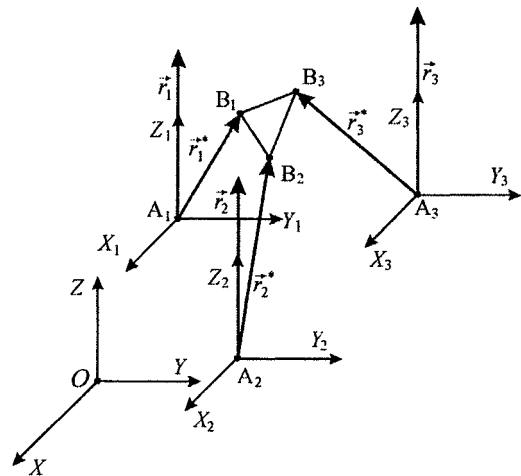


Рис. 3

$$\begin{aligned}
 & \left(2k_3\lambda_{03}\lambda_{13}L_3 + x_{A_3} - 2k_1\lambda_{01}\lambda_{11}L_1 - x_{A_1}\right)^2 + \left(2\lambda_{01}\lambda_{11}L_1 - y_{A_1} - 2\lambda_{03}\lambda_{13}L_3 + y_{A_3}\right)^2 + \\
 & + \left(2\lambda_{03}^2 - 1\right)L_3 + z_{A_3} - \left[2\lambda_{01}^2 - 1\right]L_1 - z_{A_1}\right)^2 = |B_3B_1|^2; \\
 & \left(2k_2\lambda_{02}\lambda_{12}L_2 + x_{A_2} - 2k_3\lambda_{03}\lambda_{13}L_3 - x_{A_3}\right)^2 + \left(2\lambda_{03}\lambda_{13}L_3 - y_{A_3} - 2\lambda_{02}\lambda_{12}L_2 + y_{A_2}\right)^2 + \\
 & + \left(2\lambda_{02}^2 - 1\right)L_2 + z_{A_2} - \left[2\lambda_{03}^2 - 1\right]L_3 - z_{A_3}\right)^2 = |B_2B_3|^2,
 \end{aligned} \tag{13}$$

где расстояния $|B_jB_i|$ между шарнирами известны и при работе механизма не меняется.

Для определения величин λ_{01} , λ_{11} , λ_{02} , λ_{12} , λ_{03} , λ_{13} уравнения (13) должны быть дополнены уравнениями

$$\lambda_{01}^2 + \lambda_{11}^2(1 + k_1^2) = 1; \quad \lambda_{02}^2 + \lambda_{12}^2(1 + k_2^2) = 1; \quad \lambda_{03}^2 + \lambda_{13}^2(1 + k_3^2) = 1, \tag{14}$$

следующими из условия (10) нормирования кватернионов. Из уравнений (14) можно записать:

$$\lambda_{11} = \pm \sqrt{\frac{1 - \lambda_{01}^2}{1 + k_1^2}}; \quad \lambda_{12} = \pm \sqrt{\frac{1 - \lambda_{02}^2}{1 + k_2^2}}; \quad \lambda_{13} = \pm \sqrt{\frac{1 - \lambda_{03}^2}{1 + k_3^2}},$$

что позволит уменьшить количество параметров кватернионов в (13) до трех:

$$\begin{aligned}
 & \left(2k_2\lambda_{02}\sqrt{\frac{1 - \lambda_{02}^2}{1 + k_2^2}}L_2 + x_{A_2} + 2k_1\lambda_{01}\sqrt{\frac{1 - \lambda_{01}^2}{1 + k_1^2}}L_1 - x_{A_1}\right)^2 + \left(-2\lambda_{01}\sqrt{\frac{1 - \lambda_{01}^2}{1 + k_1^2}}L_1 - y_{A_1} - \right. \\
 & \left. - 2\lambda_{02}\sqrt{\frac{1 - \lambda_{02}^2}{1 + k_2^2}}L_2 + y_{A_2}\right)^2 + \left(2\lambda_{02}^2 - 1\right)L_2 + z_{A_2} - \left[2\lambda_{01}^2 - 1\right]L_1 - z_{A_1}\right)^2 = |B_2B_1|^2; \\
 & \left(2k_3\lambda_{03}\sqrt{\frac{1 - \lambda_{03}^2}{1 + k_3^2}}L_3 + x_{A_3} + 2k_1\lambda_{01}\sqrt{\frac{1 - \lambda_{01}^2}{1 + k_1^2}}L_1 - x_{A_1}\right)^2 + \left(-2\lambda_{01}\sqrt{\frac{1 - \lambda_{01}^2}{1 + k_1^2}}L_1 - y_{A_1} - \right. \\
 & \left. - 2\lambda_{03}\sqrt{\frac{1 - \lambda_{03}^2}{1 + k_3^2}}L_3 + y_{A_3}\right)^2 + \left(2\lambda_{03}^2 - 1\right)L_3 + z_{A_3} - \left[2\lambda_{01}^2 - 1\right]L_1 - z_{A_1}\right)^2 = |B_3B_1|^2; \\
 & \left(2k_2\lambda_{02}\sqrt{\frac{1 - \lambda_{02}^2}{1 + k_2^2}}L_2 + x_{A_2} - 2k_3\lambda_{03}\sqrt{\frac{1 - \lambda_{03}^2}{1 + k_3^2}}L_3 - x_{A_3}\right)^2 + \left(2\lambda_{03}\sqrt{\frac{1 - \lambda_{03}^2}{1 + k_3^2}}L_3 - y_{A_3} - \right. \\
 & \left. - 2\lambda_{02}\sqrt{\frac{1 - \lambda_{02}^2}{1 + k_2^2}}L_2 + y_{A_2}\right)^2 + \left(2\lambda_{02}^2 - 1\right)L_2 + z_{A_2} - \left[2\lambda_{03}^2 - 1\right]L_3 - z_{A_3}\right)^2 = |B_2B_3|^2.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Знаки перед радикалами в (15) расставлены из анализа знаков координат сферических шарниров, получаемых с использованием преобразования (8).

Решение уравнений (15) позволяет при заданных обобщенных координатах L_i определить параметры кватернионов и, далее, с помощью зависимостей (12) и аналогичных, записанных для других сферических шарниров, определить координаты этих шарниров. Тем самым решается прямая задача о положениях. Использование кватернионов позволило снизить количество совместно решаемых уравнений с девяти до трех. Численное решение уравнений (15) авторами выполнялось с использованием пакета MathCad.

Технологическое оборудование, построенное с использованием рассматриваемого механизма с параллельными кинематическими цепями, можно использовать для перемещения заготовки, установленной на его платформе, в вертикальной плоскости с поворотом ее относительно двух горизонтальных осей. Требуемые для этого перемещения платформы можно описать с помощью трех выходных координат: координаты z_c полюса и двух углов Крылова (тангажа \mathcal{G} крена γ).

Поэтому при решении обратной задачи целесообразно выбрать в качестве трех известных выходных координат механизма величины Z_C , ϑ и γ .

Составим уравнения, позволяющие решить обратную задачу при принятых выходных координатах. С использованием третьего уравнения из (12) и аналогичных ему можно записать следующие выражения:

$$\begin{aligned} (2\lambda_{01}^2 - 1)L_1 + z_{A_1} &= n_1 x'_{B_1} + n_2 y'_{B_1} + n_3 z'_{B_1} + z_C; \\ (2\lambda_{02}^2 - 1)L_2 + z_{A_2} &= n_1 x'_{B_2} + n_2 y'_{B_2} + n_3 z'_{B_2} + z_C; \\ (2\lambda_{03}^2 - 1)L_3 + z_{A_3} &= n_1 x'_{B_3} + n_2 y'_{B_3} + n_3 z'_{B_3} + z_C. \end{aligned} \quad (16)$$

Направляющие косинусы, входящие в (16), определяются только углами ϑ и γ .

Из выражений (16) можно выразить длины штанг L_i :

$$L_i = \frac{n_1 x'_{B_i} + n_2 y'_{B_i} + n_3 z'_{B_i} + z_C - z_{A_i}}{2\lambda_{0i}^2 - 1}, \quad i = 1 \dots 3. \quad (17)$$

Подстановка (17) в (15) позволяет получить систему трех нелинейных уравнений, которая связывает три принятых независимых выходных координаты механизма с тремя неизвестными параметрами кватернионов λ_{01} , λ_{02} , λ_{03} . Численное решение этой системы позволит, с последующим использованием (17), определить обобщенные координаты L_i при заданных выходных координатах Z_C , ϑ и γ , т. е. решить для рассматриваемого механизма обратную задачу о положениях. Как и в случае прямой задачи, при использовании кватернионов количество совместно решаемых уравнений снижено до трех.

Уравнения, полученные для решения задач о положениях, служат основой для численного решения задач о скоростях и ускорениях. Следовательно, гиперкомплексные числа кватернионы могут быть успешно использованы при моделировании механизмов с параллельными кинематическими цепями путем решения прямой и обратной задач кинематики.

Литература

1. Потапов, В.А. Оборудование с параллельной кинематикой / В.А. Потапов // СТИН. - 2003. - №3. - С. 35-40.
2. Глазунов, В.А. Пространственные механизмы параллельной структуры / В.А. Глазунов, А.Ш. Колискор, А.Ф. Крайнев. - М.: Наука, 1991. - 95 с.
3. Обработывающее оборудование нового поколения. Концепция проектирования / В.Л. Афонин, А.Ф. Крайнев, В.Е. Ковалев и др.; под ред. В.Л. Афонина. - М.: Машиностроение, 2001. - 256 с.
4. Механика машин: учеб. пособие для вузов / И.И. Вульфсон, М.Л. Ерихое, М.З. Коловский и др.; под ред. Г.А. Смирнова. - М.: Высш. шк., 1996. - 511 с.
5. Манипуляционные системы роботов / А.И. Корендясев, Б.Л. Саламандра, Л.И. Тывес и др.; под общ. ред. А.И. Корендясева. - М.: Машиностроение, 1989. - 472 с.
6. ГОСТ 20085-80. Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения.
7. Бранец, В.Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский. - М.: Наука, 1973. - 320 с.
8. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. - М.: Физматгиз, 1963. - 872 с.