

## РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОВОЙ ДИАГНОСТИКИ

А.И. Сидикова<sup>1</sup>, С.И. Бельков<sup>2</sup>

До последнего времени при решении данной задачи повышали точность среднеквадратичного приближения за счет разработки оптимальных методов. Недостатком среднеквадратичного приближения является не гарантированность достаточной точности приближений при конкретных значениях  $t$ . Потому, в настоящей работе предлагается алгоритм определения равномерного приближения. При этом дается равномерная оценка этого приближения.

*Ключевые слова:* обратная задача, регуляризация, оценка погрешности, некорректная задача, преобразование Фурье.

### Постановка задачи

Пусть тепловой процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (1)$$

решение  $u(x,t) \in C([0,1] \times [0,\infty)) \cap C^{2,1}((0,1) \times (0,\infty))$ , удовлетворяет следующим начальным и граничным условиям

$$u(x,0) = 0; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u(0,t) = h(t); \quad t \geq 0, \quad (3)$$

и

$$\frac{\partial u(1,t)}{\partial x} + ku(1,t) = 0, \quad k > 0, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

где

$$h(t) \in C^2[0,\infty), \quad h(0) = h'(0) = 0 \quad (5)$$

и существует число  $t_0 > 0$  такое, что для любого  $t \geq t_0$

$$h(t) = 0. \quad (6)$$

Рассмотрим множество  $M_r \subset L_2[0,\infty)$  и, определяемое формулой

$$M_r = \left\{ h(t) : h(t) \in L_2[0,\infty); \int_0^\infty h^2(t) dt + \int_0^\infty [h'(t)]^2 dt \leq r^2 \right\}.$$

Искомая функция

$$h(t) \in M_r. \quad (7)$$

Предположим, что при  $f(t) = f_0(t)$  существует функция  $h_0(t)$ , удовлетворяющая условиям (5)–(7) и такая, что при  $h(t) = h_0(t)$  существует решение  $u(x,t)$  задачи (1)–(6), удовлетворяющее условию

$$u(x_1,t) = f_0(t); \quad t \geq 0, \quad (8)$$

но функция  $f_0(t)$  нам не известна, а вместо неё даны некоторая приближенная функция  $f_\delta(t) \in L_2[0,\infty) \cap L_1[0,\infty)$  и число  $\delta > 0$  такие, что

$$\|f_\delta - f_0\| \leq \delta. \quad (9)$$

Требуется, используя  $f_\delta, \delta$  и  $M_r$ , определить приближенное решение  $h_\delta(t)$  задачи (1)–(4), (8) и оценить уклонение  $\|h_\delta - h_0\|_{L_2}$  приближенного решения  $h_\delta$  от точного  $h_0$ .

<sup>1</sup> Сидикова Анна Ивановна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет.

<sup>2</sup> Бельков Сергей Игоревич – магистрант, кафедра вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет.

E-mail: sergey\_belkov@mail.ru

Пусть  $H = L_2(-\infty, \infty) + iL_2(-\infty, \infty)$ , а  $F$  – оператор, отображающий  $L_2[0, \infty)$  в  $H$ . Из теоремы Планшереля [1] следует изометричность оператора  $F$ .

Применяя преобразование

$$F[h(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} h(t) e^{-it\tau} dt, \quad \tau \geq 0,$$

сведем задачу (1)–(4), (8) к задаче вычисления значений неограниченного оператора  $T$ ,  $T: H \rightarrow H$ ,

$$T\hat{f}(\tau) = \hat{h}(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad (10)$$

где  $\hat{f}(\tau) = F[f(t)]$ ,  $\hat{h}(\tau) = F[h(t)]$ , а

$$T\hat{f}(\tau) = \frac{\operatorname{ch} \mu_0 \sqrt{\tau} + (\mu_0 \sqrt{\tau})^{-1} k \operatorname{sh} \mu_0 \sqrt{\tau}}{\operatorname{ch} \mu_0 (1-x_1) \sqrt{\tau} + (\mu_0 \sqrt{\tau})^{-1} k \operatorname{sh} \mu_0 (1-x_1) \sqrt{\tau}} \hat{f}(\tau).$$

Из (9) следует, что

$$\|\hat{f}_\delta(\tau) - \hat{f}_0(\tau)\| \leq \delta \quad (11)$$

и при  $\hat{f}(\tau) = \hat{f}_0(\tau)$  существует точное решение  $\hat{h}_0(\tau)$  задачи (10), которое принадлежит множеству  $\widehat{M}_r$ , определяемому формулой

$$\widehat{M}_r = \left\{ \hat{h}(\tau) : \hat{h}(\tau) \in H, \int_0^{\infty} (1+\tau^2) |\hat{h}(\tau)|^2 d\tau \leq r^2 \right\}. \quad (12)$$

Требуется, используя  $\hat{f}_\delta(\tau)$ ,  $\delta$  и  $\widehat{M}_r$ , определить приближенное решение  $\hat{h}_\delta(\tau)$  задачи (10), (11) и оценить уклонение  $\|\hat{h}_\delta - \hat{h}_0\|$ . Для решения этой задачи используем регуляризующее семейство операторов  $\{T_\alpha\}$ ,  $\alpha > 0$

$$T_\alpha \hat{f}(\tau) = \begin{cases} T\hat{f}(\tau); & \tau \leq \alpha, \\ 0; & \tau > \alpha. \end{cases} \quad (13)$$

В качестве приближенного решения задачи (10), (11) возьмем элемент  $\hat{h}_\delta^\alpha(\tau) = T_\alpha \hat{f}_\delta(\tau)$ , в котором параметр регуляризации  $\alpha(\delta, r)$  определим из уравнения

$$\frac{r}{\sqrt{1+\alpha^2}} = e^{x_1 \sqrt{\alpha/2}} \delta. \quad (14)$$

Заметим, что метод  $\{T_{\alpha(\delta, r)} : 0 < \delta \leq \delta_0\}$ , определяемый формулами (13) и (14), является методом проекционной регуляризации, предложенным в [2].

В [3] доказаны теоремы.

**Теорема 1.** Для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta_\varepsilon > 0$  такое, что для любого  $\delta \in (0, \delta_\varepsilon)$  справедливы оценки

$$\frac{\sqrt{2}(1-\varepsilon)r}{\sqrt{1+\alpha^2(\delta, r)}} \leq \Delta_\delta [T_{\alpha(\delta, r)}] \leq \frac{\sqrt{2}(1+\varepsilon)r}{\sqrt{1+\alpha^2(\delta, r)}},$$

где метод  $\{T_{\alpha(\delta, r)} : 0 < \delta \leq \delta_\varepsilon\}$  определен формулой (13), (14).

**Теорема 2.** Метод  $\{T_{\alpha(\delta, r)} : 0 < \delta \leq \delta_\varepsilon\}$ , решение задачи (10), (11) и, определяемый формулами (13), (14) оптимален по порядку на классе  $\widehat{M}_r$  и для него справедлива оценка погрешности

$$\Delta_\delta [T_{\alpha(\delta, r)}] \leq \sqrt{2}(1+\varepsilon) \Delta_\delta^{opt}.$$

Получены асимптотические оценки [3].

**Теорема 3.** Для любого  $r > 0$  существуют числа  $c_1(r)$ ,  $c_2(r)$  и  $\delta_1 < 1$  такие, что для любого  $\delta \in (0, \delta_1)$  справедливы оценки

$$c_1(r) \ln^2 \delta \leq \sqrt{1 + \alpha^2(\delta, r)} \leq c_2(r) \ln^2 \delta.$$

Рассмотрим пространство  $\overline{H}_0 = F[L_2[0, \infty)]$ , где  $F$  преобразование Фурье и через  $\overline{h}_\delta(\tau)$  обозначим элемент, определяемый формулой

$$\overline{h}_\delta(\tau) = pr[\hat{h}_\delta(\tau); \overline{H}_0].$$

Окончательно, решение  $h_\delta(t)$  обратной задачи (1)–(4), (8) определим формулой

$$h_\delta(t) = \begin{cases} F^{-1}[\overline{h}_\delta(\tau)]; & t \in [0, t_0], \\ 0; & 0 < t, \quad t > t_0. \end{cases} \quad (15)$$

При достаточно малом значении  $\delta$  справедлива оценка

$$\|h_\delta(t) - h_0(t)\|_{L_2} \leq \sqrt{2}(1 + \varepsilon) \frac{r}{\sqrt{1 + \alpha^2(\delta, r)}}. \quad (16)$$

**Решение задачи восстановления непрерывной функции, заданной со среднеквадратичной погрешностью**

Обозначим через  $M_r$  множество функций  $u(t) \in C[a, b]$  таких, что

$$\int_a^b u^2(t) dt + \int_a^b [u'(t)]^2 dt \leq r^2, \quad (17)$$

где  $u'(t)$  – обобщенная производная Соболева от функции  $u(t)$ .

Предположим, что функция  $u_0(t)$ , принадлежащая множеству  $M_r$ , нам не известна. Вместо нее даны некоторое приближение  $u_\varepsilon(t) \in L_2[a, b]$  и уровень погрешности  $\varepsilon > 0$  такие, что

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2} \leq \varepsilon. \quad (18)$$

Требуется, используя априорную информацию  $(u_\varepsilon(t), \varepsilon)$ , определить приближенное значение  $\overline{u}_\varepsilon(t) \in C[a, b]$  и оценить величину

$$\max \left\{ \left| \overline{u}_\varepsilon(t) - u_0(t) \right| : t \in [a, b] \right\}.$$

Эта задача называется задачей восстановления непрерывной функции, заданной с погрешностью. Для ее решения используем метод усредняющих функций, предложенный в [4].

Рассмотрим усредняющую функцию

$$\omega(t) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{1}{1-t^2}}; & |t| < 1, \\ 0; & |t| \geq 1, \end{cases} \quad (19)$$

где  $\gamma = \int_{-1}^1 e^{-\frac{1}{1-t^2}} dt$ .

Тогда для любого значения  $h > 0$  определим

$$\omega_h(t) = \frac{1}{h} \omega\left(\frac{|t|}{h}\right), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (20)$$

Из [5, с. 111–112] и формул (19), (20) следует, что для любого  $h > 0$   $\omega_h(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\omega_h(t) = 0$  при  $|t| \geq h$  и  $\int_{|t| \leq h} \omega_h(t) dt = 1$ .

Теперь определим регуляризующее семейство  $\{P_h : h > 0\}$  линейных ограниченных операторов  $P_h$ , отображающих пространство  $L_2[a, b]$  в  $C[a, b]$ , использующих формулу

**Лемма 1.** Пусть линейный ограниченный оператор  $P_h$  определен формулой (21). Тогда

$$\|P_h\| \leq \frac{1}{\sqrt{\gamma} \sqrt{h}}.$$

*Доказательство.* Пусть  $u(t) \in L_2[a, b]$  и  $\|u(t)\| \leq 1$ , тогда из (19)–(21) следует, что для любого  $t \in [a, b]$

$$|P_h u(t)| \leq \frac{1}{\gamma h} \|u\|_{L_2} \left[ \int_{|z| \leq h} e^{-\frac{2}{1-\frac{z^2}{h^2}}} dz \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (22)$$

Так как  $\|u\|_{L_2} \leq 1$ , и

$$\int_{-h}^h \left[ e^{-1/\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right)} \right]^2 dz \leq h \cdot \int_{-1}^1 e^{-\frac{1}{1-t^2}} dt \leq h\gamma,$$

то из (22) следует, что для любого  $t \in [a, b]$   $|P_h u(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\gamma} \sqrt{h}}$ , что и доказывает лемму.

**Лемма 2.** Пусть множество  $M_r$  определено соотношением (17), а  $u_0^h(t) = P_h u_0(t)$ . Тогда

$$\sup_{u_0 \in M_r} \|u_0 - u_0^h\|_{C[a, b]} \leq r\sqrt{h}.$$

*Доказательство.* Предположим, что  $u_0 \in M_r$ , тогда для любого  $t \in [a, b]$

$$|u_0(t) - u_0^h(t)| = \left| \int_{|t-\tau| \leq h} \omega_h(t-\tau) u_0(t) d\tau - \int_{|t-\tau| \leq h} \omega_h(t-\tau) u_0(\tau) d\tau \right|. \quad (23)$$

Из (23) следует, что

$$|u_0(t) - u_0^h(t)| = \int_{|t-\tau| \leq h} \omega_h(t-\tau) |u_0(t) - u_0(\tau)| d\tau. \quad (24)$$

Так как из теоремы, доказанной в [5] на стр. 126, следует, что для любого  $t \in [a, b]$  выполняется соотношение

$$|u_0(t) - u_0^h(t)| \leq r\sqrt{h},$$

что и доказывает лемму.

Окончательно, в качестве приближенного значения восстанавливаемой функции  $u_0(t)$  возьмем функцию

$$\bar{u}_\varepsilon = u_\varepsilon^{h(\varepsilon)}(t) = P_{h(\varepsilon)} u_\varepsilon(t),$$

в которой  $\varepsilon$  определено формулой (18), а  $h(\varepsilon)$  формулой

$$h(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma} r}. \quad (25)$$

Учитывая, что

$$\|u_0(t) - \bar{u}_\varepsilon(t)\|_{C[a, b]} \leq \sup_{t \in [a, b]} |u_0(t) - u_0^{h(\varepsilon)}(t)| + \|P_{h(\varepsilon)}\| \varepsilon,$$

где  $h_\varepsilon$  определена формулой (25).

Из лемм 1 и 2 получим, что

$$\|u_0(t) - \bar{u}_\varepsilon(t)\|_{C[a, b]} \leq \frac{2\sqrt{r\varepsilon}}{\sqrt[4]{\gamma}}. \quad (26)$$

Теперь докажем, что оценка (26) является точной по порядку, а метод усредняющих функций  $\{P_{h(\varepsilon)} : 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ , используемый в настоящем параграфе, оптимален по порядку. Из работы [6] следует, что

$$\omega_1(2\varepsilon, r) \sim \sqrt{\varepsilon} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (27)$$

где модуль непрерывности  $\omega_1(2\varepsilon, r)$  определен формулой

$$\omega_1(2\varepsilon, r) = \sup \left\{ \|u_1(t) - u_2(t)\|_{C[a,b]} : u_1, u_2 \in M_r; \|u_1 - u_2\|_{L_2} \leq 2\varepsilon \right\}.$$

Из работы [7] и формул (26), (27) следует, что метод  $\{P_{h(\varepsilon)} : 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$  оптимален по порядку на классе  $M_r$ , а оценка погрешности (26) этого метода является точной по порядку.

## Равномерное приближения решения $h_0(t)$ обратной граничной задачи (1)–(4), (8)

Используя методику, изложенную выше, задачу равномерного приближения граничного условия  $h_0(t)$  в задаче (1)–(4), (8) сведем к задаче восстановления непрерывной функции, заданной со среднеквадратичной погрешностью.

Таким образом, из условия (17) следует, что нам необходимо определить функцию  $h_0(t) \in W_2^1[0, t_0]$ , и удовлетворяющую условию

$$\int_0^{t_0} h_0^2(t) dt + \int_0^{t_0} [h_0'(t)]^2 dt \leq r^2. \quad (28)$$

Из (15) и (16) следует, что нам известна функция  $h_\delta(t) \in L_2[0, t_0]$  такая, что

$$\|h_\delta(t) - h_0(t)\|_{L_2} \leq \varepsilon(\delta), \quad (29)$$

где  $\varepsilon(\delta) = \frac{\sqrt{2}(1+\varepsilon)r}{\sqrt{1+\bar{\alpha}^2(\delta, r)}}$ ,  $\bar{\alpha}(\delta, r)$  – решение уравнения (14).

Требуется, используя априорную информацию  $h_\delta(t), \varepsilon(\delta), r$  задачи (28), (29) определить функцию  $z_\delta(t) \in C[0, t_0]$  такую, что

$$\max \{|z_\delta(t) - h_0(t)| : t \in [0, t_0]\} \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0$$

и оценить скорость этой сходимости.

Для решения этой задачи используем регуляризующее семейство операторов  $\{P_\beta : \beta > 0\}$ , определяемое формулой (21)

$$P_\beta h(t) = \int_0^{t_0} h(\tau) \omega_\beta(t - \tau) d\tau, \quad h(t) \in L_2[0, t_0],$$

$$\omega_\beta(t) = \frac{1}{\beta} \omega\left(\frac{|t|}{\beta}\right), \quad t \in [0, t_0], \text{ а } \omega(t) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{1}{1-t^2}}, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1, \end{cases}$$

где  $\gamma = \int_{-1}^1 e^{-\frac{1}{1-t^2}} dt$ .

Окончательно, в качестве приближенного решения возьмем функцию

$$z_\delta(t) = P_{\beta(\delta)} h_\delta(t); \quad t \in [0, t_0],$$

где

$$\beta(\delta) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma} r}.$$

Из формулы (26) следует, что

$$\|z_\delta(t) - z_0(t)\|_{C[0, t_0]} \leq \frac{2\sqrt{r\varepsilon}}{\sqrt[4]{\gamma}}.$$

### Литература

1. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1972. – 496 с.
2. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М.: Наука, 1978. – 208 с.
3. Танана, В.П. О гарантированной оценке точности приближенного решения одной обратной задачи тепловой диагностики / В.П. Танана, А.И. Сидикова // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 2. – С. 1–15.
4. Васин, В.В. Регуляризация задачи численного дифференцирования / В.В. Васин // Математические записки. – 1969. – Т. 7, № 2. – С. 29–33.
5. Осипов Ю.С. Основы метода динамической регуляризации / Ю.С. Осипов, Ф.П. Васильев, М.М. Потапов. М.: МГУ, 1972. – 238 с.
6. Хромова, Г.В. О задаче восстановления функций, заданных с погрешностью / Г.В. Хромова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1977. – Т. 17, № 5. – С. 1161–1171.
7. Танана, В.П. О классификации некорректно поставленных задач и оптимальных методах их решения / В.П. Танана // Изв. Вузов. Математика. – 1977. – № 11. – С. 106–112.

Поступила в редакцию 27 сентября 2013 г.

---

*Bulletin of the South Ural State University*  
*Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*  
2014, vol. 6, no. 1, pp. 36–41

---

## REGULAR APPROXIMATION FOR BOUNDARY CONDITION IN INVERSE PROBLEM OF THERMAL DIAGNOSTICS

A.I. Sidikova<sup>1</sup>, S.I. Belkov<sup>2</sup>

Until recently at the solution of the problem the accuracy of the root-mean-square approximation has been increased through the development of optimum methods. The drawback of the root-mean-square approximation is unreliability of sufficient accuracy for concrete values of  $t$ . Thus, the algorithm of definition of regular approximation is considered in the article. Regular estimator of this approximation is given.

*Keywords:* inverse problem, regularization, estimation error, ill-posed problem, Fourier transformation.

### References

1. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* (Elements of Function Theory and Functional Analysis). Moscow, Nauka Publ., 1972. 496 p. (in Russ.).
2. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineynykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya* (Theory of linear ill-posed problems and its application). Moscow, Nauka Publ., 1978. 208 p. (in Russ.).
3. Tanana V.P., Sidikova A.I. *Trudy instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN*. 2010. Vol. 16, no. 2. pp. 1–15. (in Russ.).
4. Vasin V.V. *Matematicheskie zapiski*. 1969. Vol. 7, no. 2. pp. 29–33. (in Russ.).
5. Osipov Yu.S., Vasil'ev F.P., Potapov M.M. *Osnovy metoda dinamicheskoy regulyaryzatsii* (Basics of dynamic regularization method). Moscow, MGU Publ., 1972. 238 p.
6. Khromova G.V. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*. 1977. Vol. 17, no. 5. pp. 1161–1171. (in Russ.).
7. Tanana V.P. *Izvestiya Vuzov. Matematika*. 1977. no. 11. pp. 106–112. (in Russ.).

Received 27 September 2013

---

<sup>1</sup> Sidikova Anna Ivanovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Calculating Mathematics Department, South Ural State University.

<sup>2</sup> Belkov Sergey Igorevich is Undergraduate Student, Calculating Mathematics Department, South Ural State University.

E-mail: sergey\_belkov@mail.ru