

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОЙ КАПЛИ НА ВИБРИРУЮЩЕЙ ПОДЛОЖКЕ¹

А.Е. Коренченко², Д.С. Исаков³

Разработаны программы, позволяющие описать поведение свободной поверхности и контактной линии раздела лежащей капли. Изложены результаты численных исследований линейных вынужденных колебаний капли вязкой жидкости, лежащей на вибрирующей горизонтальной поверхности. Задача решена для случаев постоянного краевого угла и закрепленной трехфазной линии. Найдены резонансные частоты для трех первых основных мод колебаний в условиях осевой симметрии. Проведено сравнение результатов с найденными в литературе экспериментальными данными, хорошее согласие продемонстрировано.

Ключевые слова: поверхностное натяжение; межфазное натяжение; гидродинамика; лежащая капля; численное моделирование.

Введение

В последнее время повышенный исследовательский интерес наблюдается в отношении системы «капля на подложке». Эта система эффективна в медицинской диагностике, проводящейся по структуре следа, оставленного после испарения капли биологической жидкости (например, сыворотки крови) [1]. Выявлена принципиально новая возможность использования системы «микрокапля на подложке» в качестве микрореактора для реализации процесса самосборки наноструктур в процессе испарения на подложке коллоидной капли с наночастицами [2]. Остаются актуальными технологические приложения явления: в струйной печати, для охлаждения твердых поверхностей испарением помещенных на них капель, в технологиях нанесения жидких защитных покрытий. В сравнительно недавних работах изучается падение капли на жидкую пленку [3] и твердую поверхность [4], отскок капли воды от гидрофобной поверхности [5].

Кроме того, исследования вынужденных и свободных колебаний лежащей капли имеют фундаментальное значение, в частности потому, что включают два важных аспекта: поведение свободной поверхности жидкости и области трехфазного контакта. Так, в [6, 7] проведен численный анализ нелинейных вынужденных колебаний висящей капли и обнаружен гистерезис контактного угла. В [8] проведено аналитическое решение задачи о капле идеальной жидкости на вибрирующей подложке, когда условия на трехфазной границе описываются формулами Хокинга [9]. Скорость движения линии раздела в этом случае предполагается пропорциональной отклонению контактного угла от равновесного. В [8] показано, что такие условия вызывают появление трения на трехфазной границе и приводят к энергетическим потерям даже для колебаний идеальной жидкости. Капля на вибрирующей подложке подробно исследована экспериментально, например, в [10], в обоих крайних случаях постоянного краевого угла и закрепленной границы раздела. Авторы наблюдали формирование стоячих гравитационно-капиллярных волн, измерили их собственные частоты и зафиксировали положения узлов и пучностей. Результаты были интерпретированы в рамках теории одномерного осциллятора.

Однако за границами исследованной области остаются следующие вопросы: какова фазово-частотная характеристика объекта «капля–подложка», как на фазу колебаний влияют поверхностное натяжение, межфазное натяжение, плотность и вязкость жидкости? Кроме того, все известные авторам численные исследования колебаний капли на подложке проведены для невязких жидкостей в отсутствие силы тяжести и для случая постоянного радиуса пятна смачивания.

Цель настоящей работы состоит в разработке программного пакета, способного описать поведение капли вязкой жидкости на плоской горизонтальной поверхности, вибрирующей с малой амплитудой (случай линейных колебаний) в присутствии поля тяжести и с учетом эффектов, связанных с межфазным натяжением.

¹ Работа поддержана грантом РФФИ № 13-03-00918.

² Коренченко Анна Евгеньевна – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра оптики и спектроскопии, Южно-Уральский государственный университет.

E-mail: korenchenko@physics.susu.ac.ru

³ Исаков Денис Сергеевич – заведующий лабораторией физических исследований, Южно-Уральский государственный университет.

1. Математическая модель

В работе рассмотрена лежащая капля, помещенная на плоскую горизонтальную подложку (рис. 1). Подложка осциллирует в направлении своей нормали с частотой ω и малой амплитудой A , так что ее положение в лабораторной СО описывается как $z_s(t) = A \sin \omega t$. Приняты следующие обозначения: ρ – плотность жидкости, ν – кинематическая вязкость, σ_{lg} , σ_{gs} , σ_{ls} – коэффициенты межфазного натяжения на границах жидкость-газ, газ-твердое, жидкость-твердое соответственно. Индексами l, g и s обозначены жидкая, газовая и твердая среды.

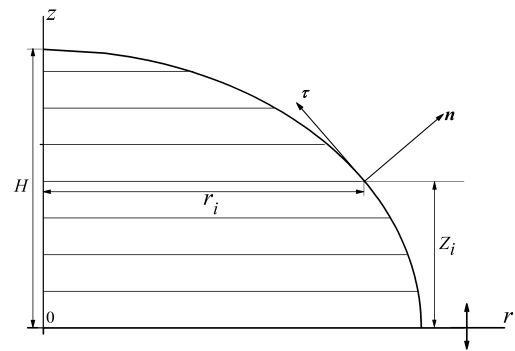


Рис. 1. Лежащая капля располагается на вибрирующей горизонтальной подложке. Показана половина осевого сечения капли

1.1. Приближения модели

Мы предполагаем верными следующие предположения о состоянии капли и течениях в ней:

- жидкость является ньютоновской и несжимаемой; практически это означает, что выполнено условие $\omega R \ll c$, где c – скорость звука в жидкости, R – радиус равновеликой сферической капли;
- влияние газа пренебрежимо мало;
- пренебрегаем испарением с поверхности капли, т.е. нет необходимости рассматривать смещение границы, связанное с потерей массы;
- форма капли имеет осевую симметрию, как и поля скорости и давления в ней;
- можно пренебречь тепловыделением внутри капли, так что жидкость можно считать изотермической.

1.2. Система уравнений сохранения и граничные условия

Введем систему координат с осями, в которой подложка неподвижна (см. рис. 1), $\vec{V} = \{V_r, V_z\}$ – вектор скорости, p есть превышение давления над гидростатическим P_0 , т.е. $p = P - P_0$, где P_0 – гидростатическое давление в равновесной капле, определяемое формулой $P_0(z) = -\sigma_{lg} \cdot K_0(z)$, $K_0(z)$ – кривизна равновесной капли.

Тогда уравнения сохранения вещества и импульса в неинерциальной системе отсчета запишутся в виде

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{V} + \frac{\vec{A}}{\omega^2} \sin \omega t, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0. \quad (2)$$

Условия на границе жидкость-газ S_{lg} запишутся как:

$$\vec{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{n} \Big|_{S_{lg}} = \sigma_{lg} K, \quad (3)$$

$$\vec{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{\tau} \Big|_{S_{lg}} = 0, \quad (4)$$

здесь $T_{ij} = -P \delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ – тензор напряжений, $\vec{A} = \{0, 0, A\}$, $\eta = \nu \rho$ – динамическая вязкость. Уравнение (3) представляет собой формулу Лапласа, а (4) означает, что касательные напряжения отсутствуют. В (3) и (4) граница «жидкость-газ» предполагается бесконечно тонкой и невесомой.

Граничные условия на твердой подложке запишутся как:

$$V_r \Big|_{S_{ls}} = 0, \quad V_z \Big|_{S_{ls}} = 0. \quad (5)$$

Динамика поведения контактной линии описана в работе следующими способами

- 1) $r_l = \text{const}$ – постоянный радиус пятна смачивания,
- 2) $\theta = \theta_0 = \text{const}$ – постоянный (равновесный) контактный угол.

Здесь r_1 – радиус пятна смачивания, θ_0 – равновесный контактный угол.

Уравнения приведены к безразмерной форме так, что все линейные размеры отнесены к радиусу R , скорости – к $u_0 = A\omega$, напряжения – к ρu_0^2 и время – к R/u_0 . Характерные значения параметров жидкости и материала подложки и безразмерных критериев задачи приведены в таблице 1 и обсуждены в секции 3.

1.3. Начальные условия

Предположим, что при $t < 0$ капля находилась в состоянии статического равновесия и в момент $t = 0$ подложка начала вибрировать:

$$t = 0: \quad p = 0, \quad S_{lg} = S_0, \quad \vec{V} = 0,$$

где S_0 – есть равновесная форма поверхности капли.

2. Численные методы

Численное решение проводилось методом конечных разностей, где использовалась неравномерная сетка. Сначала капля делилась на m равных по толщине горизонтальных слоев. Форма

Таблица 1

Значения параметров расчета и безразмерных характеристик

Радиус равновеликой сферической капли R , м	10^{-3}	Кинематическая вязкость ν , $\text{м}^2\text{с}^{-1}$	10^{-6}
Амплитуда колебаний подложки A , м	10^{-4}	Частота колебаний подложки ω , с^{-1}	400–3500
Плотность жидкости ρ , $\text{кг}\cdot\text{м}^{-3}$	1000	Число Рейнольдса $Re = \frac{u_0 L}{\nu}$	4 – 35
Поверхностное натяжение σ_{lg} , $\text{Н}\cdot\text{м}^{-1}$	0,073	Число Бонда $Bo = \frac{\rho g R^2}{\sigma_{lg}}$	0,14
Разность межфазных натяжений $\sigma_{ls} - \sigma_{gs}$, $\text{Н}\cdot\text{м}^{-1}$	0	Число Вебера $We = \frac{\rho u_0^2 R}{\sigma_{lg}}$	$10^{-4} - 10^{-2}$
Номер моды колебаний l			2, 3, 4

капли описывалась массивами $\{r_i, i = 1, m\}$ и $\{z_i, i = 2, m+1\}$ (рис. 1). Очевидно, что $r_{m+1} = 0$ и $z_1 = 0$. Затем производилось деление вертикальными линиями, при этом необходимо соблюдение условия, чтобы ширины прямоугольных ячеек разбиения не отличались более чем на 30 %, это необходимо для сходимости расчета. Уравнения (1)–(6) записывались в разностной форме. Полученная система алгебраических уравнений решалась методом Гаусса. Решение проводилось в духе метода расщепления и делилось на следующие стадии:

- давление и скорости в капле находятся решением (1)–(5). Форма капли считалась неизменной на этой стадии;
- определяется новая форма капли по формулам:

$$r_i^{t+\Delta t} = r_i^t + V_r|_{S_{lg}} \cdot \Delta t, \quad i = 2, m, \quad z_i^{t+\Delta t} = z_i^t + V_z|_{S_{lg}} \cdot \Delta t, \quad i = 2, m+1.$$

Радиус пятна смачивания определяется из условий (6) по формулам

$$1) \quad r_1 = \text{const};$$

$$2) \quad r_1^{t+\Delta t} = r_2^{t+\Delta t} + z_2 \cdot \text{ctg} \theta_0;$$

- сетка перестраивается в соответствии с новой формой капли.

Расчеты проводились для различных пространственных разбиений и временных шагов, и было получено независящее от параметров сетки решение. Алгоритм был протестирован сравнением с известным аналитическим решением [11, 12]. Программы для расчета были написаны на языке Фортран и распараллелены с использованием библиотеки MPI. Вычисления проводились на суперкомпьютере ТОНАДО (ЮУрГУ).

3. Обсуждение результатов

Значения физических параметров, использованных при решении задачи, и соответствующих безразмерных критериев указаны в табл. 1. Как видно из таблицы, амплитуда колебаний подложки мала, так что ожидается только линейный отклик системы. Число Рейнольдса также мало, следовательно, в капле возникают лишь ламинарные течения. Значения числа Вебера указывают на то, что при колебаниях не будет разбрызгивания. Значения числа Бонда показывают, что и гравитационная, и поверхностная силы будут влиять на течения в капле и ее форму.

На рис. 2 приведены амплитудно-частотные характеристики вынужденных колебаний капли для случаев постоянного контактного угла и закрепленной линии контакта. Обе кривые представляют собой зависимости безразмерной амплитуды колебаний капли в вершине от частоты вибраций подложки. Как показало сравнение с результатами работы [13], абсциссы пиков на графиках совпадают с собственными частотами капли для соответствующих мод колебаний.

Резонансные частоты колебаний с постоянным контактным углом (I) получились меньшими, чем для колебаний с закрепленной линией контакта (II). В [10] такой сдвиг частот был исследован экспериментально, и для его описания была предложена формула $\omega_{II}/\omega_I = (2l-1)/(2l-2)$,

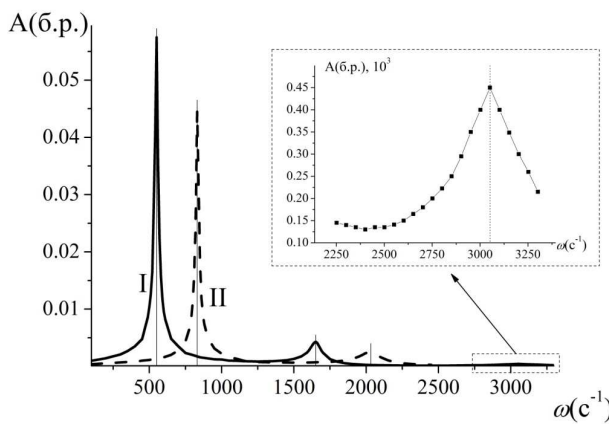


Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика вынужденных колебаний капли; I – постоянный контактный угол, II – закрепленная линия трехфазного контакта

Таблица 2
Отношение ω_{II}/ω_I для мод колебаний

Номер моды	$l = 2$	$l = 3$
Эксперимент [10]	1,5	1,25
Расчет [эта работа]	1,509	1,237

где ω_I и ω_{II} – есть резонансные частоты в случае свободно движущейся и закрепленной границы трехфазного контакта, l – номер моды. Номера мод колебаний капли совпадают с индексами полиномов Лежандра, которые были получены Рэлеем при решении задачи о колебаниях свободной капли в [12]. В табл. 2 представлены численные значения ω_{II}/ω_I . Как видно из таблицы, численные и экспериментальные значения близки между собой, что указывает на хорошую точность расчетной схемы.

На рис. 3 показаны мгновенные поля скоростей в осевом сечении капли, полученные при резонансе для трех мод с постоянным контактным углом. Длины векторов на рисунке масштабированы так, что относятся как 15:5:1. Как видно из рисунка, на поверхности капли существуют узлы – точки, находящиеся в покое при колебаниях (на рисунке отмечены жирным). Рассчитанные положения узлов качественно совпадают с экспериментальными, полученными в [10].

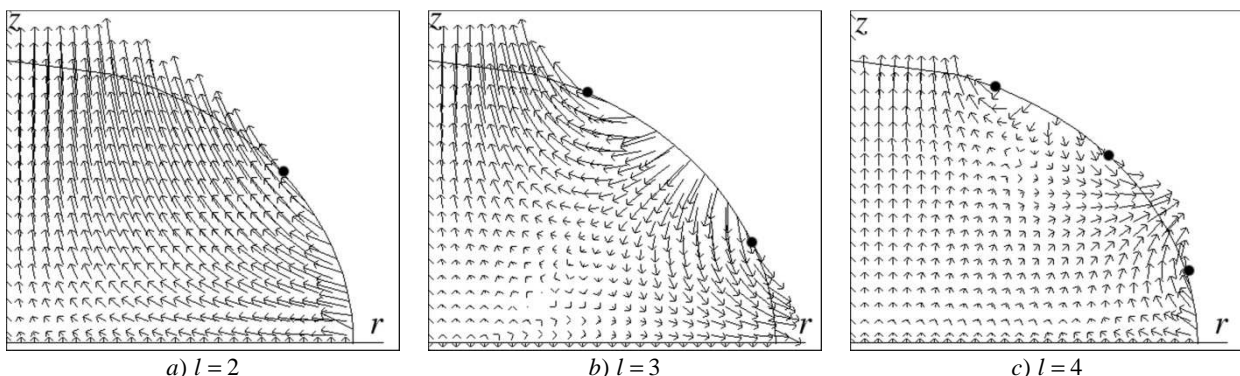


Рис. 3. Мгновенное поле скоростей для низших мод с постоянным контактным углом. Показана половина осевого сечения капли

4. Выводы

В работе проведено исследование поведения лежащей капли на вибрирующей подложке с учетом гравитации, вязкости и условий на трехфазной границе. Получены амплитудно-частотные характеристики колебаний вершины капли на подложке для режимов с постоянным контактным углом и закрепленной трехфазной границей. Резонансные частоты совпадают с собственными частотами колебаний капли для всех изученных мод колебаний. Наблюдалось формирование в капле стоячих капиллярных волн, расположение узлов и пучностей которых качественно совпадает с экспериментальными данными, найденными в литературе.

Проведенные расчеты и сравнения позволяют сделать вывод о возможности использования разработанных программ для количественного исследования характеристик системы «капля-подложка» при различных значениях физико-химических параметров жидкости и материала подложки.

Авторы благодарят проф. В.П. Бескачко за полезное обсуждения и внимание к работе.

Литература

1. Тарасевич, Ю.Ю. Механизмы и модели дегидратационной самоорганизации биологических жидкостей / Ю.Ю. Тарасевич // УФН. – 2004. – Т. 174, № 7. – С. 779–790.
2. Driving forces of the solute self-organization in an evaporating liquid microdroplet / L.V. Andreeva, A.V. Koshkin, P.V. Lebedev-Stepanov *et al.* // Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects. – 2007. – Vol. 300, № 3 Spec. Iss. – P. 300–306.
3. Nikolopoulos, N.A. Normal impingement of a droplet onto a wall film: a numerical investigation / N.A. Nikolopoulos, A. Theodorakakos, G. Bergeles // Int. J. Heat Fluid Fl. – 2005. – Vol. 26. – Issue 1. – P. 119–132.
4. Fedorchenko, A.I. Effect of capillary and viscous forces on spreading of a liquid drop impinging on a solid surface / A.I. Fedorchenko, An-Bang Wang, Yi-Hua Wang // Phys. Fluids. – 2005. – Vol. 17. – Issue 9. – P. 093104.
5. Water spring: A model for bouncing drops / K. Okumura, F. Chevy, D. Richard *et al.* // Europhys. Lett. – 2003. – Vol. 62, no. 2. – P. 237–243.
6. Wilkes, E.D. Forced oscillations of pendant (sessile) drops / E.D. Wilkes, O.A. Basaran // Phys. Fluids. – 1997. – Vol. 9. – Issue 6. – P. 1512–1528.
7. Wilkes, E.D. Hysteretic response of supported drops during forced oscillations / E.D. Wilkes, O.A. Basaran // J. Fluid Mech. – 1999. – Vol. 393. – P. 333–356.
8. Lyubimov, D.V. Behavior of a drop on an oscillating solid plate / D.V. Lyubimov, T.P. Lyubimova, S.V. Shklyaev // Phys. Fluids. – 2006. – Vol. 18. – Issue 1. – P. 012101.
9. Hocking, L.M. The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary / L.M. Hocking // J. Fluid Mech. – 1987. – Vol. 179. – P. 253–266.
10. Noblin, X. Vibrated sessile drops: transition between pinned and mobile contact line oscillations / X. Noblin, A. Buguin, F. Brochard-Wyart // Eur. Phys. J. E – 2004. – Vol. 14. – Issue 4. – P. 395–404.
11. Korenchenko, A.E. Oscillations of a sessile droplet in open air / A.E. Korenchenko, V.P. Beskachko // Phys. Fluids. – 2013. – Vol. 25. – Issue 11. – P. 112106.
12. Rayleigh, Lord On the capillary phenomenon of jets / Lord Rayleigh // Proceedings of the Royal Society of London. – 1879. – Vol. 29. – P. 71–79.
13. Коренченко, А.Е. Численное исследование свободных колебаний лежащей капли / А.Е. Коренченко, А.Ж. Илимбаева, В.П. Бескачко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2011. – Вып. 4. – № 10(227). – С. 72–76.

Поступила в редакцию 30 августа 2014 г.

NUMERICAL SIMULATION OF A VIBRATING SESSILE DROPLET

A.E. Korenchenko¹, D.S. Isakov²

The software enabling the description of behavior of a free surface and a contact line of a sessile droplet was developed. Linear forced oscillations of a viscous liquid droplet placed on a horizontal vibrating substrate were investigated numerically. The problem was solved: (1) for the pinned contact line; (2) for cases with constant contact angle. Resonant frequencies for the three first basic modes were found. The numerical results showed good agreement with the ones found in the literature.

Keywords: surface tension; interphase tension; hydrodynamics; sessile droplet; computer simulation.

References

1. Tarasevich Yu.Yu. Mechanisms and models of the dehydration self-organization in biological fluids. *Physics-Uspeski*. 2004. Vol. 47, no. 7. pp. 717–728. DOI: 10.1070/PU2004v047n07ABEH001758
2. Andreeva L.V., Koshkin A.V., Lebedev-Stepanov P.V., Petrov A.N., Alifimov M.V. Driving forces of the solute self-organization in an evaporating liquid microdroplet. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*. 2007. Vol. 300, no. 3. Spec. Iss. pp. 300–306.
3. Nikolopoulos N.A., Theodorakakos A., Bergeles G. Normal impingement of a droplet onto a wall film: a numerical investigation. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2005. Vol. 26. Issue 1. pp. 119–132. DOI: 10.1016/j.ijheatfluidflow.2004.06.002
4. Fedorchenko A.I., Wang An-Bang, Wang Yi-Hua Effect of capillary and viscous forces on spreading of a liquid drop impinging on a solid surface. *Phys. Fluids*. 2005. Vol. 17. Issue 9. pp. 093104. <http://dx.doi.org/10.1063/1.2038367>
5. Okumura K., Chevy F., Richard D., Quéré D., Clanet C. Water spring: A model for bouncing drops. *Europhys. Lett*. 2003. Vol. 62, no. 2. pp. 237–243. <http://dx.doi.org/10.1209/epl/i2003-00340-1>
6. Wilkes E.D., Basaran O.A. Forced oscillations of pendant (sessile) drops. *Phys. Fluids*. 1997. Vol. 9. Issue 6. pp. 1512–1528. <http://dx.doi.org/10.1063/1.869276>
7. Wilkes E.D., Basaran O.A. Hysteretic response of supported drops during forced oscillations. *J. Fluid Mech*. 1999. Vol. 393. pp. 333–356. DOI: <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112099005819>
8. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Shklyaev S.V. Behavior of a drop on an oscillating solid plate. *Phys. Fluids*. 2006. Vol. 18. Issue 1. pp. 012101. <http://dx.doi.org/10.1063/1.2137358>
9. Hocking L.M. The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary. *J. Fluid Mech*. 1987. Vol. 179. pp. 253–266. DOI: <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112087001514>
10. Noblin X., Buguin A., Brochard-Wyart F. Vibrated sessile drops: transition between pinned and mobile contact line oscillations. *Eur. Phys. J. E*. 2004. Vol. 14. Issue 4. pp. 395–404. DOI 10.1140/epje/i2004-10021-5
11. Korenchenko A.E., Beskachko V.P. Oscillations of a sessile droplet in open air. *Phys. Fluids*. 2013. Vol. 25. Issue 11. p. 112106. <http://dx.doi.org/10.1063/1.4829025>
12. Rayleigh, Lord On the capillary phenomenon of jets. *Proceedings of the Royal Society of London*. 1879. Vol. 29. pp. 71–79.
13. Korenchenko A.E., Ilimbaeva A.G., Beskachko V.P. Chislennoe modelirovanie svobodnykh kolebaniy lezhashchey kapli. (The numerical simulation of sessile drop free oscillations). *Bulletin of the South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics"*. 2011. Issue 4. no. 10(227). pp. 72–76. (in Russ.).

Received 30 August 2014

¹ Korenchenko Anna Evgenievna is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Optics and Spectroscopy Department, South Ural State University.

E-mail: korenchenko@physics.susu.ac.ru

² Isakov Denis Sergeevich is Head of the Laboratory of Physics Research, South Ural State University.