

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СКВОЗНОГО СЧЕТА УДАРНЫХ ВОЛН

В.Ф. Куропатенко

Сильные разрывы – ударные волны возникают в сплошной среде при динамических внешних воздействиях. На поверхности сильных разрывов законы сохранения принимают вид нелинейных алгебраических уравнений, связывающих скачки величин по обе стороны разрыва. На сильном разрыве энтропия терпит скачок. В этом заключается принципиальное различие между ударными волнами и волнами с непрерывным изменением величин. В однородных разностных методах сильный разрыв заменяется слоем конечной ширины, сравнимой с размером сеточной ячейки. Такое свойство разностных схем получило название дистракции. Поскольку состояние за разрывом связано ударной адиабатой с состоянием перед разрывом, то в области дистракции сильного разрыва должен действовать механизм, обеспечивающий возрастание энтропии. Физическая вязкость и теплопроводность в уравнениях механики сплошной среды не устраняют необходимости введения поверхности сильного разрыва и, следовательно, не могут обеспечить величину дистракции, сравнимую, с несколькими ячейками разностной сетки. В работе рассмотрены несколько разностных схем, в которых диссипация энергии в слое дистракции определяется уравнениями, справедливыми на поверхности сильного разрыва.

Ключевые слова: ударная волна; разностный метод; дистракция; диссипация энергии; законы сохранения.

1. Идея метода

Ударная волна – поверхность сильного разрыва заменяется слоем конечной ширины, содержащим несколько ячеек сетки. Параметры вещества, находящегося в одной сеточной ячейке, за несколько шагов по времени изменяются от состояния перед сильным разрывом до состояния за сильным разрывом. Эти состояния в случае идеальной среды связаны законами сохранения массы, количества движения и энергии в виде системы нелинейных алгебраических уравнений

$$P_1 - P_0 - W(U_1 - U_0) = 0, \quad (1)$$

$$U_1 - U_0 + W(V_1 - V_0) = 0, \quad (2)$$

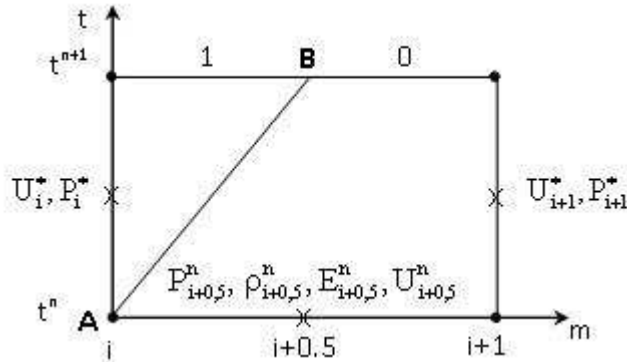
$$\left(E_1 + \frac{1}{2}U_1^2 - E_0 - \frac{1}{2}U_0^2 \right) W - (P_1U_1 - P_0U_0) = 0, \quad (3)$$

где P – давление, V – удельный объем, U – скорость, E – удельная внутренняя энергия, $W = \frac{dm}{dt}$ – скорость сильного разрыва. Состояние вещества перед разрывом, отмеченное индексом «0», считается заданным, а состояние за разрывом с индексом «1» – текущим. К уравнениям (1)–(3) добавляется уравнение состояния

$$P_1 = P(V_1, E_1). \quad (4)$$

Система четырех уравнений (1)–(4) содержит пять величин. Таким образом, чтобы определить конкретное состояние за разрывом, нужно задать одну из текущих величин, т.е. выбрать ее в качестве параметра.

В разностных методах сквозного счета ударных волн сильный разрыв заменяется ударным слоем шириной в несколько ячеек сетки [1–6]. Происходит дистракция сильного разрыва [7]. Уравнения (1)–(3) связывают состояния вещества на границах этого слоя. Внутри же слоя действуют различные механизмы диссипации энергии [2–5]. Рассмотрим разностный метод счета ударных волн, в котором сильный разрыв заменяется пакетом следующих друг за другом ударных волн меньшей амплитуды. Таким образом внутри ударного слоя в каждый момент времени t^n в каждой ячейке сетки создается сеточная ударная волна, которая после перехода на следующий шаг по времени $t^{n+1} = t^n + \tau$ исчезает. Сеточная ударная волна в ячейке сетки с индексом $i + 0,5$ схематически изображена на рисунке.



Схематическое изображение «сеточной» ударной волны АВ и состояний перед ней 0 и за ней 1

Чтобы не усложнять понимания идеи метода, рассмотрим разностную схему в простейшей постановке. Одномерное течение идеальной среды с плоской симметрией в лагранжевых координатах и без теплопроводности описывается системой законов сохранения

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial PU}{\partial m} = 0. \quad (5)$$

Умножим каждое из уравнений (5) на $dmdt$ и проинтегрируем по площади сеточной ячейки. Применив к полученным интегралам теорему о среднем значении, получим систему разностных уравнений

$$\frac{V_{i+0,5}^{n+1} - V_{i+0,5}^n}{\tau} - \frac{U_{i+1}^* - U_i^*}{h} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{U_{i+0,5}^{n+1} - U_{i+0,5}^n}{\tau} + \frac{P_{i+1}^* - P_i^*}{h} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\varepsilon_{i+0,5}^{n+1} - \varepsilon_{i+0,5}^n}{\tau} + \frac{(PU)_{i+1}^* - (PU)_i^*}{h} = 0, \quad (8)$$

где величины с индексами $n, n + 1$ и нижним индексом $i + 0,5$ являются средними на промежутке $m_i \leq m \leq m_{i+1}$ в моменты времени t^n и t^{n+1} , величины с верхним индексом $*$ и нижними индексами i и $i + 1$ являются средними на промежутке $t^n \leq t \leq t^{n+1}$ при значениях m_i и m_{i+1} . Иными словами $f_i = f(m_i)$, $f^* = f(t^*)$, $f^n = f(t^n)$. Масса сеточного интервала h связана с координатами его границ $h = (x_{i+1}^n - x_i^n) / V_{i+0,5}^n$. Величина h от времени не зависит и, таким образом, сохраняется при переходе от одного момента времени к другому. Удельная полная энергия ε есть сумма удельной внутренней и удельной кинетической энергии $\varepsilon = E + \frac{1}{2} \bar{U}^2$.

Вообще говоря, уравнения (6)–(8) являются точными до тех пор, пока не конкретизированы координаты точек, в которых определены величины, входящие в эти уравнения. Уравнения (6)–(8) являются также общими до тех пор, пока не указаны уравнения для определения вспомогательных величин U_i^* , P_i^* , $(PU)_i^*$. Эти величины называются вспомогательными величинами, т.к. после завершения перехода к решению в момент t^{n+1} они забываются. Поскольку при нахождении решения в момент t^{n+1} используются законы сохранения на сильном разрыве в виде (1)–(3), то тем самым на каждом временном шаге диссипация энергии в отличие от [2–4] определяется единственным физически обоснованным механизмом – законами сохранения на поверхности сильного разрыва.

Для пояснения идеи рассмотрим процедуру перехода с момента t^n , где все сеточные функции известны, к моменту t^{n+1} в одной сеточной ячейке, изображенной на рисунке. Величина W может быть и положительной и отрицательной. Не умаляя общности, будем рассматривать случай $W > 0$.

Термодинамические величины $P_{i+0,5}^n$, $\rho_{i+0,5}^n$, $E_{i+0,5}^n$, $C_{i+0,5}^n$ характеризуют состояние вещества в момент t^n в ячейке с номером $i + 0,5$. Поскольку они являются результатом применения теоремы о среднем значении, то будем считать их постоянными на промежутке $m_i < t < m_{i+1}$. Это предположение означает, что на границах сеточных интервалов возникли разрывы. Будем рассматривать эти разрывы как сеточные ударные волны. Состояние с одной стороны разрыва – это состояние перед разрывом, а одна из величин в соседнем интервале – это величина за разрывом. Условие, что разрыв является сеточной ударной волной, имеет вид

$$\frac{U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n}{m_{i+0,5} - m_{i-0,5}} < 0.$$

Сравнение давлений $P_{i+0,5}^n$ и $P_{i-0,5}^n$ позволяет определить знак W_i . Если $P_{i-0,5}^n > P_{i+0,5}^n$, то $W_i > 0$ и ударная волна будет при $t > t^n$ распространяться в интервале с номером $i + 0,5$ (как показано на рисунке). В качестве величин перед разрывом берутся сеточные значения в момент t^n

$$U_0 = U_{i+0,5}^n, \quad P_0 = P_{i+0,5}^n, \quad \rho_0 = \rho_{i+0,5}^n, \quad E_0 = E_{i+0,5}^n, \quad V_0 = 1/\rho_0,$$

а в качестве величин за разрывом берутся либо скорость $U_{i-0,5}^n$, либо давление $P_{i-0,5}^n$.

Далее решается система уравнений (1)–(4), в результате чего определяются величины U_1, P_1, V_1, E_1 и W и, соответственно, вспомогательные значения U_i^* и P_i^*

$$\begin{aligned} U_i^* &= U_{i-0,5}^n, \quad P_i^* = P_{i+0,5}^n + W_i \left(U_{i-0,5}^n - U_{i+0,5}^n \right), \quad \text{если задано } U_1, \\ P_i^* &= P_{i-0,5}^n, \quad U_i^* = U_{i+0,5}^n + \frac{\left(P_{i-0,5}^n - P_{i+0,5}^n \right)}{W_i}, \quad \text{если задано } P_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогично определяются вспомогательные значения U_{i+1}^* , P_{i+1}^*

$$\begin{aligned} U_{i+1}^* &= U_{i+0,5}^n, \quad P_{i+1}^* = P_{i+1,5}^n + W_{i+1} \left(U_{i+0,5}^n - U_{i+1,5}^n \right), \quad \text{если задано } U_1 \text{ и } W_{i+1} > 0, \\ P_{i+1}^* &= P_{i+0,5}^n, \quad U_{i+1}^* = U_{i+1,5}^n + \frac{\left(P_{i+0,5}^n - P_{i+1,5}^n \right)}{W_{i+1}}, \quad \text{если задано } P_1 \text{ и } W_{i+1} > 0. \end{aligned}$$

Покажем теперь, что уравнения (6)–(8) со вспомогательными значениями U_i^* , P_i^* строго соответствуют мгновенным законам сохранения. Поскольку ячейка сетки состоит из двух частей, разделенных траекторией сеточного сильного разрыва – линией АВ, то в момент t^{n+1} масса вещества, находящегося за разрывом, равна $W\tau$, масса вещества перед разрывом $h - W\tau$. Термодинамические величины, средние в массе h в момент t^{n+1} находятся с помощью

мгновенных законов сохранения массы, количества движения и энергии. В рассматриваемом случае усреднение идет по двум массам с массовыми концентрациями $\frac{\tau W}{h}$ для величин за разрывом и $1 - \frac{\tau W}{h}$ для величин перед разрывом.

Рассмотрим получение удельного объема $V_{i+0,5}^{n+1}$. Первый из мгновенных законов сохранения имеет вид

$$V_{i+0,5}^{n+1} = \frac{\tau W}{h} V_1^{n+1} + \left(1 - \frac{\tau W}{h}\right) V_0^{n+1}. \quad (10)$$

Значение V_1^{n+1} это постоянное в интервале $W\tau$ значение удельного объема за фронтом сеточной ударной волны. Величины V_0, U_0, U_1 , входящие в уравнение (2) совпадают с сеточными величинами $V_0 = V_{i+0,5}^n, U_1 = U_i^*, U_0 = U_{i+0,5}^n$

$$V_1^{n+1} = V_{i+0,5}^n - \frac{1}{W} (U_i^* - U_{i+0,5}^n).$$

Значение V_0^{n+1} определяются из разностного уравнения

$$V_0^{n+1} = V_{i+0,5}^n + \frac{\tau}{h - W\tau} (U_{i+1}^* - U_{i+0,5}^n).$$

Подставив V_1^{n+1} и V_0^{n+1} в уравнение (10), получим разностное уравнение (6).

Рассмотрим теперь мгновенный закон сохранения количества движения

$$U_{i+0,5}^{n+1} = \frac{\tau W}{h} U_1^{n+1} + \left(1 - \frac{\tau W}{h}\right) U_0^{n+1}. \quad (11)$$

Значение U_1^{n+1} – это постоянное в интервале τW значение скорости за фронтом сеточной ударной волны. Оно связано со значением $U_0^n = U_{i+0,5}^n$ уравнением на разрыве (1) в виде

$$U_1^{n+1} = U_{i+0,5}^n + \frac{1}{W} (P_1 - P_{i+0,5}^n). \quad (12)$$

Поскольку вспомогательное давление P_i^* в силу (9) совпадает с давлением за фронтом сеточной ударной волны $P_1 = P_i^*$, то уравнение (12) принимает вид

$$U_1^{n+1} = U_{i+0,5}^n + \frac{1}{W} (P_i^* - P_{i+0,5}^n).$$

В интервале перед сеточным разрывом $P_{i+1}^* \neq P_{i+0,5}^n$. Поэтому за промежуток времени τ скорость вещества в интервале $h - W\tau$ изменится в соответствии с разностным уравнением

$$U_0^{n+1} = U_{i+0,5}^n - \frac{\tau}{h - W\tau} (P_{i+1}^* - P_{i+0,5}^n).$$

Подставив U_1^{n+1} и U_0^{n+1} в уравнение (11), получим разностное уравнение (7).

Наконец сделаем аналогичную процедуру с мгновенным законом сохранения энергии

$$\varepsilon_{i+0,5}^{n+1} = \frac{\tau W}{h} \varepsilon_1^{n+1} + \left(1 - \frac{\tau W}{h}\right) \varepsilon_0^{n+1}. \quad (13)$$

Значение удельной полной энергии ε_1^{n+1} является средним в интервале за фронтом сеточной ударной волны, значение ε_0^{n+1} – среднее в интервале перед фронтом сеточной ударной волны.

Значения ε_1^{n+1} и ε_0^{n+1} выражаются через основные и вспомогательные значения сеточных функций с помощью уравнений (3) и (8) в виде

$$\varepsilon_1^{n+1} = \varepsilon_{i+0,5}^n + \frac{1}{W} (P_i^* U_i^* - P_{i+0,5}^n U_{i+0,5}^n), \quad (14)$$

$$\varepsilon_0^{n+1} = \varepsilon_{i+0,5}^n - \frac{\tau}{h - W\tau} (P_{i+1}^* U_{i+1}^* - P_{i+0,5}^n U_{i+0,5}^n). \quad (15)$$

Подставим (14) и (15) в (13). В результате получим разностное уравнение (8).

Подчеркнем, что при получении разностных уравнений (6)–(8) было сделано несколько предположений:

- В слое «размазанной» ударной волны все функции кусочно постоянны.
- Разрывы на границах сеточных интервалов являются сильными разрывами (сеточными ударными волнами).
- Функции перед сеточным разрывом постоянны. Они выбираются в момент t^n в рассматриваемом интервале.
- Функции U или P за сеточным разрывом постоянны. Одна из них выбирается в момент t^n в соседнем интервале, а вторая рассчитывается из уравнений (1)–(3).
- Решение в момент t^{n+1} получается путем применения мгновенных законов сохранения.

2. Дивергентная разностная схема

Рассмотрим с небольшими изменениями разностную схему из [9]. Все термодинамические величины и скорости определены в серединах сеточных интервалов, узлы сетки имеют координаты t^n , m_i . Разностные уравнения имеют вид (6)–(8). Вспомогательные величины P_i^* , U_i^* определяются с помощью двух различных алгоритмов в зависимости от того, разрежение или сжатие происходит на вспомогательном промежутке $m_{i-0,5} \leq m \leq m_{i+0,5}$.

Если внутри вспомогательной ячейки $U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n \geq 0$, то решение в указанном сеточном интервале является непрерывным, и P_i^* , U_i^* определяются разностными уравнениями в виде

$$U_i^* = U_i^n - \frac{\tau}{2h} (P_{i+0,5}^n - P_{i-0,5}^n), \quad P_i^* = P_i^n - \frac{\tau a^2}{2h} (U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n).$$

Значения U_i^n и P_i^n находятся интерполяциями по $U_{i+0,5}^n$, $U_{i-0,5}^n$ и $P_{i+0,5}^n$, $P_{i-0,5}^n$.

Вспомогательные величины P_i^* , U_i^* используются только в уравнениях (6) и (7) для нахождения $V_{i+0,5}^{n+1}$, $U_{i+0,5}^{n+1}$. Вместо уравнения энергии (8) на волне разрежения используется следствие из законов сохранения в виде

$$E^{n+1} - E^n + \int_{V^n}^{V^{n+1}} P(V, E) dV = 0. \quad (16)$$

Интегрирование вдоль изэнтропы успешно применялось в [10–14] для определения параметров вещества на волнах разрежения. Этот метод обеспечивает любую наперед заданную точность определения энтропии и устраняет ложную диссипацию энергии. Уравнение (16) может быть решено разными способами. Один из возможных способов интегрирования вдоль изэнтропы основан на использовании структуры УРС вещества [15]

$$P = P_x(V) + P_T(V, E_T), \quad E = E_x(V) + E_T.$$

Поскольку зависимости $P_x(V)$ и $E_x(V)$ заданы, то с их помощью находятся значения $P_x^{n+1}(V^{n+1})$ и $E_x^{n+1}(V^{n+1})$. В качестве зависимости между тепловым давлением P_T , тепловой энергией E_T и удельным объемом V возьмем уравнение, являющееся определением P_T

$$P_T = - \left(\frac{\partial E_T}{\partial V} \right)_s.$$

Согласно [15] зависимость P_T от V и E_T чаще всего представляется в виде

$$P_T = \Gamma(V) E_T / V,$$

где

$$\Gamma(V) = - \frac{d \ln \theta}{d \ln V},$$

а функция $\theta(V)$ есть аналог характеристической температуры Дебая [15]. Из этих трех уравнений после интегрирования вдоль изэнтропы получается уравнение

$$E_T^{n+1} = E_T^n \theta^{n+1}(V^{n+1}) / \theta^n(V^n),$$

позволяющее определить $E_T(V^{n+1})$. Особо следует отметить, что эти уравнения справедливы только при изменении V вдоль изэнтропы $S = \text{const}$. Такой расчет внутренней энергии и давления обеспечивает любую необходимую точность определения энтропии, а уравнение производства энтропии принимает вид

$$T \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)_m = 0.$$

Рассмотрим дивергентную разностную схему на волне сжатия. Вспомогательные величины вычисляются из уравнений на поверхности сильного разрыва (1)–(3) и уравнения состояния (4). Величины по обе стороны разрыва задаются следующим образом.

Если $U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n < 0$, то

1. $U_1 = U_{i-0,5}^n$, $(P, V, E, U)_0 = (P, V, E, U)_{i+0,5}^n$, $W > 0$ при $P_{i-0,5}^n > P_{i+0,5}^n$,
2. $U_1 = U_{i+0,5}^n$, $(P, V, E, U)_0 = (P, V, E, U)_{i-0,5}^n$, $W < 0$ при $P_{i-0,5}^n < P_{i+0,5}^n$.

Остальные величины с индексом «1» находятся из (1)–(4). Если ограничиться рассмотрением только случая $W > 0$, то P_i^* , U_i^* определяются уравнениями (9).

Для исследования диссипации энергии на сеточной ударной волне запишем в соответствии с [10–13] разностные законы сохранения (6)–(8) вместе со вспомогательными величинами (9) в дифференциальной форме

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial M} = \omega_1, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial M} = \omega_2, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial PU}{\partial M} = \omega_3.$$

Погрешности аппроксимации ω_1 , ω_2 , ω_3 имеют вид

$$\omega_1 = - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial m^2} + O^2, \quad \omega_2 = - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + hW \frac{\partial^2 U}{\partial m^2} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial m^2} + O^2,$$

$$\omega_3 = - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial m} \left(U \frac{\partial P}{\partial m} \right) + \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial m} \left(P \frac{\partial U}{\partial m} \right) + hW \frac{\partial}{\partial m} \left(U \frac{\partial U}{\partial m} \right) + O^2.$$

Согласно [10, 12], уравнение производства энтропии этой разностной схемы таково

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = \omega_3 + P\omega_1 - U\omega_2.$$

Подставив сюда выражения для $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, получим уравнение производства энтропии на сеточной ударной волне

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = hW \left(\frac{\partial U}{\partial m} \right)^2 - \frac{\tau a^2}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial m} \right)^2 - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial m} \right)^2 + O^2.$$

Для дальнейшего упрощения этого уравнения воспользуемся уравнениями (9) для вспомогательных величин. Представим все входящие в них величины в виде рядов Тейлора в точке $t^n, m_{i+0,5}$. В результате получим связь производных $\frac{\partial P}{\partial m}$ и $\frac{\partial U}{\partial m}$, которая на слабой ударной волне при $W \approx a$ имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial m} = a \frac{\partial U}{\partial m} + O^2.$$

Подставив эту связь в уравнение производства энтропии на сеточной ударной волне, получим уравнение

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = ha(1-K) \left(\frac{\partial U}{\partial m} \right)^2 + O^2.$$

Рассмотрим монотонность этой разностной схемы на акустической ($W = a$) волне сжатия. Основные уравнения вместе со вспомогательными значениями (9) примут вид

$$P_{i+0,5}^{n+1} = P_{i+0,5}^n - \frac{\tau a^2}{h} (U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n),$$

$$U_{i+0,5}^{n+1} = U_{i+0,5}^n - \frac{\tau}{h} (P_{i+1,5}^n - P_{i+0,5}^n - a(U_{i+1,5}^n - 2U_{i+0,5}^n + U_{i-0,5}^n)).$$

Заменим P и U их выражениями через инварианты α и β

$$\alpha_{i+0,5}^{n+1} + \beta_{i+0,5}^{n+1} = \alpha_{i+0,5}^n (1-K) + \beta_{i+0,5}^n (1+K) + K(\alpha_{i-0,5}^n - \beta_{i-0,5}^n),$$

$$\alpha_{i+0,5}^{n+1} - \beta_{i+0,5}^{n+1} = \alpha_{i+0,5}^n (1-K) - \beta_{i+0,5}^n (1-3K) - 2K\beta_{i+1,5}^n + K(\alpha_{i-0,5}^n - \beta_{i-0,5}^n).$$

Сложив эти два уравнения, получим

$$\alpha_{i+0,5}^{n+1} = \alpha_{i+0,5}^n (1-K) + K\alpha_{i-0,5}^n - K\beta_{i+1,5}^n + 2K\beta_{i+0,5}^n - K\beta_{i-0,5}^n. \quad (17)$$

В случае $\beta^n = \text{const}$ уравнение (17) принимает вид

$$\alpha_{i+0,5}^{n+1} = \alpha_{i+0,5}^n (1-K) + \alpha_{i-0,5}^n K.$$

Оба коэффициента положительны при $0 \leq K \leq 1$ и, таким образом, дивергентная разностная схема Куропатенко на волне сжатия монотонна.

Далее, аналогично [7, 9], исследуем дистракцию ударной волны. Перейдем к автомодельной переменной $\xi = m - Wt$. Тогда уравнения (6)–(8) вместе со вспомогательными значениями U_i^*, P_i^* , определяемыми уравнениями (9) и погрешностями аппроксимации ω_1, ω_2 и ω_3 , примут вид

$$WV' + U' - \frac{\tau W^2}{2} V'' - \frac{h}{2} U'' + O^2 = 0, \quad (18)$$

$$WU' - P' - \frac{\tau W^2}{2} U'' - \frac{h}{2} P'' + hWU'' + O^2 = 0, \quad (19)$$

$$W\varepsilon' - (PU)' - \frac{\tau W}{2} PU'' - \frac{h}{2} (UP')' + \frac{h}{2} (PU')' - hW(UU')' + O^2 = 0. \quad (20)$$

Проинтегрировав эти уравнения по ξ , получим

$$WV + U - \frac{\tau W^2}{2} V' - \frac{h}{2} U' = WV_0 + U_0 + O^2, \quad (21)$$

$$WU - P - \frac{\tau W^2}{2} U' - \frac{h}{2} P' + hWU' = WV_0 - P_0 + O^2, \quad (22)$$

$$W\varepsilon - PU - \frac{\tau W}{2} (PU)' - \frac{h}{2} UP' + \frac{h}{2} PU' - hWUU' = W\varepsilon_0 - P_0U_0 + O^2. \quad (23)$$

С помощью (18)–(20) заменим в (21)–(23) U' и P' на V' . Затем с помощью (21)–(23) заменим U и P на V . В результате для идеального газа получим уравнение, описывающее профиль $V(\xi)$.

$$\frac{2h(1-K)}{(\gamma+1)} \cdot \frac{dV}{d\xi} + \frac{(V-V_0)(V-V_1)}{V} + O(\tau^2, h^2) = 0. \quad (24)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\xi = \frac{2h(1-K)}{(\gamma+1)(V_0-V_1)} (V_1 \ln(V-V_1) - V_0 \ln(V_0-V)). \quad (25)$$

Из (25) следует, что

$$\xi = \xi_0 = +\infty \text{ при } V = V_0, \quad \xi = \xi_1 = -\infty \text{ при } V = V_1.$$

Таким образом, дистракция разрыва в дивергентной разностной схеме метода Куропатенко при $K < 1$ бесконечна, а при $K \rightarrow 1$ дистракция $D_{K1} \rightarrow 0$.

Для определения эффективной дистракции D_{K1}^\exists находятся точки пересечения прямой линии $V(\xi)$, имеющей максимальный наклон V'_M , со значениями V_0 и V_1 . Эффективная ширина ударного слоя определяется уравнением

$$\Delta\xi = \frac{V_0 - V_1}{V'_M}. \quad (26)$$

Для определения V'_M продифференцируем (24) и в полученном уравнении положим нулю V'' . В результате получим значение $V = V_M$, при котором $V'' = 0$, и выражение производной V' при $V = V_M$

$$V_M = \sqrt{V_0 V_1}, \quad V'_M = \frac{\gamma+1}{2h(1-K)} (\sqrt{V_0} - \sqrt{V_1}).$$

Подставив V'_M в (26), получим после деления на h выражение для эффективной дистракции в дивергентной разностной схеме Куропатенко

$$D_{K1}^\exists = \frac{2}{(\gamma+1)} (1-K) \left(\frac{\sqrt{V_0} + \sqrt{V_1}}{\sqrt{V_0} - \sqrt{V_1}} \right). \quad (27)$$

Рассмотренная дивергентная разностная схема устойчива при соотношении шагов

$$\frac{\tau a^2}{h} \leq 1, \quad \text{где } a^2 = - \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_s.$$

3. Недивергентная разностная схема

Сетки для скорости и для термодинамических величин различаются. Значения P , V , E определяются в серединах сеточных интервалов по массе, значения скорости – в узлах сетки t^n , m_i .

В случае волны разрежения при $U_{i+1}^n - U_i^n \geq 0$ разностные уравнения имеют вид

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \tau U_i^n, \quad (28)$$

$$V_{i+0,5}^{n+1} = \frac{x_{i+1}^{n+1} - x_i^{n+1}}{h}. \quad (29)$$

Удельная внутренняя энергии $E_{i+0,5}^{n+1}$ и давление $P_{i+0,5}^{n+1}$ находятся из уравнения (16) вместе с уравнением состояния (4), один из способов решения которого изложен в §2. После определения $P_{i+0,5}^{n+1}$ и значения $P_{i-0,5}^{n+1}$ в соседнем интервале определяется скорость U_i^{n+1}

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + \frac{P_{i+0,5}^{n+1} - P_{i-0,5}^{n+1}}{h} = 0. \quad (30)$$

Разностные уравнения (28)–(30) в дифференциальной форме имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial m} = \omega_2, \quad \frac{\partial x}{\partial t} - U = \omega_4, \quad \frac{\partial x}{\partial m} - V = \omega_5.$$

Таким образом, независимыми погрешностями аппроксимации являются ω_2 , ω_4 , ω_5

$$\omega_2 = -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} - \frac{h^2}{24} \frac{\partial^3 U}{\partial m^3} + O^3, \quad \omega_4 = \frac{\tau}{2} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + O^3, \quad \omega_5 = -\frac{h^2}{24} \frac{\partial^3 x}{\partial m^3} + O^3.$$

Для волн сжатия выполняется условие $U_{i+1}^n - U_i^n < 0$. В этом случае в соответствии с основной идеей метода считается, что в сеточном интервале находится сеточная ударная волна. Ее местоположение, знак скорости W и значения U_1 и U_0 определяются профилем $P(m)$ в соответствии с условиями,

$$\text{если } P_{i+1,5}^{n+1} > P_{i-0,5}^{n+1}, \text{ то } W < 0, m_p = m_{i+1}, U_0 = U_i^n, U_1 = U_{i+1}^n,$$

$$\text{если } P_{i+1,5}^{n+1} < P_{i-0,5}^{n+1}, \text{ то } W > 0, m_p = m_i, U_0 = U_{i+1}^n, U_1 = U_i^n.$$

В качестве величин перед сильным разрывом берутся величины в сеточном интервале в момент t^n

$$P_0 = P_{i+0,5}^n, V_0 = V_{i+0,5}^n, E_0 = E_{i+0,5}^n.$$

Поскольку скорости определены на концах интервала, для определения полной энергии $\varepsilon_{i+0,5}$ нужно доопределить скорость в середине интервала. Из предположения, что фон перед сеточной ударной волной постоянный, следует

$$U_{i+0,5}^n = \begin{cases} U_{i+1}^n, & \text{если } W > 0, \\ U_i^n, & \text{если } W < 0. \end{cases}$$

На следующем этапе определяются значения за сеточной ударной волной. Решая систему уравнений (1)–(4) с заданным значением U_1 , получим P_1 , V_1 , E_1 , W .

Для определения $V_{i+0,5}^{n+1}$ применим мгновенный закон сохранения массы (10). Величина τW это тот промежуток по m , который сеточная ударная волна прошла со скоростью W за время $\tau = t^{n+1} - t^n$. Сеточная ударная волна распространяется с постоянной скоростью W и постоянными величинами перед и за разрывом. Из этого следует, что V_1 не изменяется со

временем и, таким образом, $U_1^{n+1} = U_1$. Поскольку скорость перед разрывом постоянная, то и среднее на промежутке $h - \tau W$ значение V_0^{n+1} должно быть равно $V_0 = V_{i+0,5}^n$. Из уравнения (2) выразим V , и в полученном уравнении заменим V_0 , U_0 и U_1 значениями $V_{i+0,5}^n$, U_{i+1}^n и U_i^n . В результате получим

$$V_{i+0,5}^{n+1} = V_{i+0,5}^n + \frac{\tau}{h} (U_{i+1}^n - U_i^n). \quad (31)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (6), если в качестве вспомогательных значений U_{i+1}^* , U_i^* взять скорости концов интервала $i + 0,5$

$$U_{i+1}^* = U_{i+1}^n, U_i^* = U_i^n.$$

Такое определение вспомогательных значений не противоречит требованию инвариантности вспомогательных величин к изменению индекса i .

При переходе с одного временного шага t^n на следующий шаг t^{n+1} величина $h = m_{i+1} - m_i$ сохраняется

$$h = \frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{V_{i+0,5}^n} = \frac{x_{i+1}^{n+1} - x_i^{n+1}}{V_{i+0,5}^{n+1}}. \quad (32)$$

Подставив $V_{i+0,5}^{n+1}$ из (31) в уравнение (32), получим

$$x_{i+1}^{n+1} - x_i^{n+1} = x_{i+1}^n - x_i^n + \tau (U_{i+1}^n - U_i^n).$$

Траектории частиц не зависят от индекса i . Следовательно

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \tau U_i^n.$$

Рассмотрим теперь мгновенный закон сохранения количества движения (11). Значения U_1^{n+1} и U_0^{n+1} это средние значения скорости в промежутках τW и $h - \tau W$. За ударной волной все величины постоянны и $U_1^{n+1} = U_1$. Для среднего значения U_0^{n+1} напишем разностное уравнение

$$U_0^{n+1} = U_{i+0,5}^{n+1} - \frac{\tau}{h - \tau W} (P_{i+1}^* - P_{i+0,5}^n). \quad (33)$$

Будем считать, что в интервале $i + 1,5$ тоже распространяется сеточная ударная волна с $W_{i+1,5} > 0$. Тогда

$$P_{i+1}^* = (P_1)_{i+1,5} = P_{i+1,5}^n - W_{i+1,5} (U_{i+2}^n - U_{i+1}^n).$$

Очевидно, что

$$P_{i+1}^* \neq P_{i+0,5}^n$$

и таким образом среднее значение $U_0^{n+1} \neq U_{i+0,5}^n$. Выразим U_1 из (1) и подставим его вместе с U_0^{n+1} из (33) в (11). В результате получим разностное уравнение (7).

Мгновенный закон сохранения энергии имеет вид (13). Величину ε_1^{n+1} выразим из (3). С учетом введенных выше обозначений получим

$$\varepsilon_1^{n+1} = \varepsilon_{i+0,5}^n + \frac{1}{W} (P_i^* U_i^* - P_{i+0,5}^n U_{i+1}^n). \quad (34)$$

Величина ε_0^{n+1} определяется из разностного уравнения

$$\varepsilon_0^{n+1} = \varepsilon_{i+0,5}^n - \frac{\tau}{h - \tau W} (P_{i+1}^* U_{i+1}^* - P_{i+0,5}^n U_{i+1}^n). \quad (35)$$

Подставив (34), (35) в (13) и проведя простые преобразования, получим уравнение (8).

Переход от мгновенных законов сохранения (10), (11), (13) к разностным уравнениям (6)–(8) возможен при вполне конкретном выборе вспомогательных значений P_i^* , U_i^* .

Из всех искомых величин остались неопределенными скорости U_1^{n+1} и U_{i+1}^n . В рассмотренном нами случае, когда $W > 0$, в момент t^n скорость в интервале $i + 0,5$ считалась постоянной и равной U_{i+1}^n , т.е. $U_{i+0,5} = U_{i+1}^n$. Завершить расчет величин в момент $t^n + 1$ следует так, чтобы такая же ситуация была бы и в момент t^{n+1} , т.е.

$$U_{i+1}^{n+1} = U_{i+0,5}^{n+1}.$$

Величина удельной внутренней энергии определяется уравнением

$$E_{i+0,5}^{n+1} = \varepsilon_{i+0,5}^{n+1} - \frac{1}{2} \left(U_{i+0,5}^{n+1} \right)^2.$$

Недивергентная разностная схема устойчива при соотношении шагов $\frac{\tau a}{h} < 1$. Дистракция разрывов определяется уравнением (27).

Разностные уравнения обладают двумя важными свойствами:

1. При $\tau = 0$ профили величин, заданных в момент t^n , не изменяются.
2. При соотношении шагов $\frac{\tau W}{h} = 1$ ударная волна не размывается и при постоянном фоне стационарная ударная волна «прыгает» из точки в точку. Действительно, при $\frac{\tau W}{h} = 1$ из уравнений (10), (11), (13) следует, что

$$V_{i+0,5}^{n+1} = V_1, \quad U_{i+0,5}^{n+1} = U_1, \quad \varepsilon_{i+0,5}^{n+1} = \varepsilon_1, \quad U_{i+1}^{n+1} = U_1.$$

Заключение

Метод определения вспомогательных величин P_i^* , U_i^* , основанный на использовании законов сохранения на сильном разрыве для расчета параметров сеточных ударных волн и на применении мгновенных законов сохранения, позволяет строить и дивергентные, и недивергентные разностные схемы. В [16, 17] описан богатый опыт их применения для моделирования ударных волн и волн разрежения.

Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ. Грант 13-01-00072.

Литература

1. Куропатенко, В.Ф. О разностных методах для уравнений гидродинамики / В.Ф. Куропатенко // Труды матем. инст. им. В.А.Стеклова. – 1966. – Т. 74, вып. 1. – С. 107–137.
2. Neumann, J. A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamical Shocks / J. Neumann, R. Richtmayer // J. Appl. Phys. – 1950. – V. 21, № 3. – P. 232–237.
3. Lax, P.D. Weak Solution of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computations / P.D. Lax // Comn. Pure and Appl. Math. – 1954. – V. 7. – P. 159–193.
4. Годунов, С.К. Разностный метод расчета ударных волн / С.К. Годунов // Успехи математических наук. – 1957. – № 12, вып. 1. – С. 176–177.
5. Куропатенко, В.Ф. Метод расчета ударных волн / В.Ф. Куропатенко // ДАН СССР. – 1960. – Т. 3, № 4. – С. 771–772.

6. Рождественский, Б.Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко. – М.: Наука, 1968.
7. Куропатенко, В.Ф. Исследование дистракции разрывов в методах расчета ударных волн / В.Ф. Куропатенко, И.Р. Макеева // Математическое моделирование. – 2006. – Т. 18, № 3. – С. 120–128.
8. Ступоченко, Е.В. Релаксационные процессы в ударных волнах / Е.В. Ступоченко, С.А. Лосев, А.И. Осипов. – М.: Наука, 1965.
9. Куропатенко, В.Ф. Разностный метод расчета ударных волн с повышенными свойствами монотонности / В.Ф. Куропатенко, И.Р. Макеева // Препринт ВНИИТФ. – 1997. – № 120.
10. Куропатенко, В.Ф. Локальная консервативность разностных схем для уравнений газовой динамики / В.Ф. Куропатенко // Журнал выч. матем. и матем. физики. – 1985. – Т. 25, № 8. – С. 1176–1188.
11. Куропатенко, В.Ф. О полной консервативности разностных законов сохранения / В.Ф. Куропатенко // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Численные методы решения задач математической физики. – 1982. – Вып. 3(11). – С. 3–5.
12. Куропатенко, В.Ф. О точности вычисления энтропии в разностных схемах для уравнений газовой динамики / В.Ф. Куропатенко // Численные методы механики сплошной среды: сб. – 1978. – Т. 9, № 7. – С. 49–59.
13. Куропатенко, В.Ф. Связь дивергентности с консервативностью разностных схем для уравнений газовой динамики / В.Ф. Куропатенко // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физ. процессов. – 1990. – Вып. 2. – С. 63–69.
14. Куропатенко, В.Ф. Методы расчета ударных волн / В.Ф. Куропатенко // Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Серия Б. Математическое моделирование в низкотемпературной плазме. Часть 2. – 2008. – Т. VII-I. – С. 496–506.
15. Куропатенко, В.Ф. Модели механики сплошной среды / В.Ф. Куропатенко. – Челябинск: ЧелГУ, 2007.
16. Куропатенко, В.Ф. О влиянии свойств разностных схем на математическое моделирование динамических процессов / В.Ф. Куропатенко, И.А. Доровских, И.Р. Макеева // Вычислительные технологии. – 2006. – Т. 11, часть 2. – С. 9–11.
17. Комплекс программ ВОЛНА и неоднородный разностный метод для расчета неустановившихся движений сжимаемых сплошных сред / В.Ф. Куропатенко, Г.В. Коваленко, В.И. Кузнецова, Г.И. Михайлова // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физ. процессов. – 1989. – Вып. 2. – С. 9–25.

Валентин Федорович Куропатенко, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики им. академика Е.И. Забабахина (г. Снежинск, Челябинская обл., Российская Федерация), v.f.kuropatenko@rambler.ru.

MSC 76.L, 74.S

DOI: 10.14529/mmp140106

A Shock Capturing Method

V.F. Kuropatenko, Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin Institute of Applied Physics, Snezhinsk, Russian Federation, v.f.kuropatenko@rambler.ru

Strong discontinuities, or shocks in continua are a result of external dynamic loads. On the shock surface the conservation laws take the form of nonlinear algebraic equations for jumps across the shock. Entropy jumps across a strong discontinuity, and just this jump differs shocks from waves where the quantities vary continuously. In the heterogeneous difference schemes, the shock is treated as a layer of a finite thickness comparable with the cell size. This property of finite-difference schemes was called distraction. Since the state behind a shock is related to the state before it by the Hugoniot, in the distraction region there must act a mechanism that increases entropy. The physical viscosity and heat conductivity in continuum mechanics equations do not make it unnecessary to introduce a shock surface and hence cannot make the distraction length comparable with a few cells of the difference mesh. The paper considers a number of finite difference schemes where energy dissipation in the distraction region is defined by equations which are valid on the shock surface.

Keywords: shock wave; differential method; distraction; energy dissipation; conservation laws.

References

1. Kuropatenko V.F. Finite Difference Methods for Hydrodynamics Equations [O raznostnykh metodakh dlya uravneniy gidrodinamiki]. *Trudy matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 1966, vol. 74, part 1, pp. 107–137.
2. Neumann J., Richtmayer R. A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks. *J. Appl. Phys.*, 1950, vol. 21, no. 3, pp. 232–237. DOI: 10.1063/1.1699639
3. Lax P.D. Weak Solution of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computations. *Conn. Pure and Appl. Math.*, 1954, vol. 7, pp. 159–193. DOI: 10.1002/cpa.3160070112
4. Godunov S.K. A Finite-Difference Method for Shock Calculation [Raznostnyy metod rascheta udarnykh voln]. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* [Russian Mathematical Surveys], 1957, no. 12, issue 1, pp. 176–177.
5. Kuropatenko V.F. A Shock Calculation Method. *DAN SSSR*, 1960, vol. 3, no. 4, pp. 771–772.
6. Rohzdestvensky B.I., Yanenko N.N. *Sistemy kvazilineynykh uravneniy i ikh prilozheniya k gazovoy dinamike* [Systems of Quasi-Linear Equations and Their Applications to Hydrodynamics]. Moscow, Nauka, 1968. 592 p.
7. Kuropatenko V.F., Makeyeva I.R. Discontinuity Distraction in Shock Calculation Methods [Issledovanie distraktsii razryvov v metodakh rascheta udarnykh voln]. *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations], 2006, vol. 18, no. 3, pp. 120–128.

8. Stupochenko E.V., Losev S.A., Osipov A.I. *Relaksatsionnye protsessy v udarnykh volnakh* [Relaxation Processes in Shock Waves]. Moscow, Nauka, 1965. 484 p.
9. Kuropatenko V.F., Makeyeva I.R. *Raznostnyy metod rascheta udarnykh voln s povyshennymi svoystvami monotonnosti* [A Higher-Monotonicity Finite-Difference Shock Capture Method]. VNIITF Preprint, 1997, no. 120.
10. Kuropatenko V.F. Local Conservatism of Difference Schemes for Hydrodynamics Equations [Lokal'naya konservativnost' raznostnykh skhem dlya uravneniy gazovoy dinamiki]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1985, vol. 25, no. 8, pp. 1176–1188.
11. Kuropatenko V.F. Ultimate Conservatism of Finite-Difference Conservation Laws [O polnoy konservativnosti raznostnykh zakonov sokhraneniya]. *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Seriya: Chislennye metody resheniya zadach matematicheskoy fiziki* [Atomic Science and Engineering. Series: Numerical Methods of Mathematical Physics], Moscow, 1982, issue 3 (11), pp. 3–5.
12. Kuropatenko V.F. Entropy Accuracy in Finite Difference Schemes for Hydrodynamics Equations [O tochnosti vychisleniya entropii v raznostnykh skhemakh dlya uravneniy gazovoy dinamiki]. *Chislennye metody mekhaniki sploshnoy sredy* [Numerical Methods for Continuum Mechanics], Novosibirsk, 1978, vol. 9, no. 7, pp. 49–59.
13. Kuropatenko V.F. Divergence and Conservatism of Finite-Difference Schemes for Hydrodynamics Equations [Svyaz' divergentnosti s konservativnost'yu raznostnykh skhem dlya uravneniy gazovoy dinamiki]. *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov* [Atomic Science and Engineering. Series: Mathematical Modeling of Physical Processes], 1990, issue 2, pp. 63–69.
14. Kuropatenko V.F. Shock Calculation Methods [Metody rascheta udarnykh voln]. *Entsiklopediya nizkotemperaturnoy plazmy. Seriya B. Matematicheskoe modelirovanie v nizkotemperaturnoy plazme* [Encyclopedia of Low-Temperature Plasma. Series B. Mathematical Modelling of Low-Temperature Plasma], part 2, vol. VII-I, 2008, pp. 496–506.
15. Kuropatenko V.F. *Modeli mekhaniki sploshnoy sredy* [Continuum mechanics models]. Chelyabinsk, Chelyabinsk State University, 2007, 302 p.
16. Kuropatenko V.F., Dorovskikh I.A., Makeyeva I.R. The Properties of Finite Difference Schemes and Simulation of Dynamic Processes [O vliyaniy svoystv raznostnykh skhem na matematicheskoe modelirovanie dinamicheskikh protsessov]. *Vychislitel'nye tekhnologii* [Computing Technologies], 2006, vol. 11, part 2, pp. 9–11.
17. Kuropatenko V.F., Kovalenko G.V., Kuznetsova V.I., Mikhaylova G.I. Complex Programs VOLNA and Method for Transient Flows of Continua [Kompleks programm VOLNA i neodnorodnyy raznostnyy metod dlya rascheta neustanovivshikhsya dvizheniy szhimaemykh sploshnykh sred]. *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov* [Atomic Science and Engineering, Series: Mathematical Modeling of Physical Processes], 1989, issue 2, pp. 9–25.

Поступила в редакцию 15 декабря 2013 г.