

## СТАТИКА И ДИНАМИКА СТЕРЖНЯ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ

*Н.Ф. Морозов, П.Е. Товстик, Т.П. Товстик*

Дается краткий обзор работ по статической и динамической устойчивости тонкого стержня под действием осевого сжатия. При линейном подходе критическая нагрузка при статическом сжатии найдена Л. Эйлером. В работе М.А. Лаврентьева и А.Ю. Ишлинского установлено, что при интенсивном нагружении, существенно превосходящем эйлерову статическую критическую нагрузку, наибольшую скорость роста амплитуды поперечного прогиба имеет форма с большим числом волн в продольном направлении. Последующие исследования связаны с учетом распространения продольных волн по длине стержня. Исследованы условия возникновения параметрических резонансов, установлена возможность потери устойчивости при нагрузке, меньшей эйлеровой. При квази-линейном подходе обнаружен эффект возникновения биений с переходом энергии продольных колебаний в поперечные и наоборот. При длительном воздействии с нагрузкой, превосходящей эйлерову, как линейный, так и квазилинейный подход не приводит к конечным значениям амплитуды поперечных перемещений. Поэтому используется нелинейный подход. Исследуется развитие закритических деформаций стержня и отмечается связь картины деформирования с эффектом, обнаруженным Лаврентьевым и Ишлинским, с одной стороны, и с эластичностью Эйлера — с другой.

*Ключевые слова: устойчивость стержня; параметрический резонанс; биения; эластичность Эйлера.*

### Введение

Основы исследований по статической устойчивости стержней заложены в трудах Л. Эйлера [1]. Экспериментальные и теоретические исследования, проведенные различными авторами [2–5], указывают на необходимость достаточно осторожного применения методов статики в условиях динамического нагружения. Желательно проследить вышеуказанное обстоятельство применительно к исследованию задач устойчивости [6, 7]. В работе 1949 года Ишлинский и Лаврентьев (ИЛ) [8] обратили внимание на специфику результатов, полученных при исследовании на устойчивость стержня под действием ударного нагружения. Обнаружено, что при интенсивном нагружении, существенно превосходящем эйлерову статическую критическую нагрузку, наибольшую скорость роста амплитуды имеет форма с большим числом волн в продольном направлении.

При статическом сжатии стержень может потерять устойчивость прямолинейной формы, переходя в смежные формы равновесия (это классическая задача Эйлера, которой он начал заниматься еще в 1744 году [1, 5, 9]). При динамическом продольном нагружении задача значительно сложнее. При строгой постановке по стержню распространяются продольные упругие волны, которые, в свою очередь, могут порождать интенсивные поперечные колебания. Однако в связи с тем, что время распространения продольной волны по длине стержня существенно меньше наименьшего периода поперечных колебаний, как правило,

используется приближенная модель, согласно которой считается, что продольная волна распространяется по стержню мгновенно, а осевая сжимающая сила постоянна по длине. При такой постановке решены задачи с внезапным приложением конечной нагрузки, превосходящей критическое значение в статике [8], с нагрузкой, линейно возрастающей со временем [7], с нагрузкой, периодически меняющейся со временем и приводящей к параметрическому резонансу [10, 11]).

В работах [12–15] задача решается в более строгой постановке, при которой учитывается конечная скорость распространения продольных волн в стержне. Рассматривается как кратковременный продольный удар в предположении, что время удара меньше времени пробега продольной волны по удвоенной длине стержня [12, 14, 15], так и продолжительный удар [13]. В линейной постановке найдены условия возникновения параметрического резонанса, построена область неустойчивости на плоскости «длина стержня — нагрузка» и вычислены характеристические показатели. С использованием метода Бубнова–Галеркина построено приближенное решение нелинейной задачи, сформулированной в [12]. В отличие от [12] начальные неправильности стержня не учитываются, а возникновение поперечных колебаний связано ненулевыми начальными условиями. Установлено, что при квази-линейной постановке амплитуда поперечных колебаний существенно меньше, чем при линейной. Обнаружены биения, связанные с переходом энергии поперечных колебаний в продольные и наоборот. Как в линейной, так и в нелинейной постановке исследовано влияние вязко-упругих сил сопротивления на вызванные ударом колебания.

При длительном силовом воздействии с нагрузкой, превосходящей эйлерову, как линейный, так и квазилинейный подход не приводит к конечным значениям амплитуды поперечных перемещений. Поэтому используется нелинейный подход. Исследуется развитие закритических деформаций стержня и отмечается связь картины деформирования с эффектом, обнаруженным ИЛ, а также с эластичными Эйлера.

## 1. Постановка задачи и безразмерные переменные

В линейном приближении распространение продольных волн в вязко-упругом стержне описывается уравнением [13, 14]

$$ES \left( 1 + \frac{\delta}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \gamma S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Граничные условия возьмем в виде

$$ES \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = -P_0(t), \quad u(L, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (2)$$

Здесь  $u(x, t)$  — продольное смещение сечения,  $x$  — продольная координата,  $t$  — время,  $E$  и  $\gamma$  — модуль Юнга и плотность материала,  $S$  — площадь поперечного сечения,  $\delta$  — коэффициент вязкости [16],  $\omega$  — характерная частота колебаний,  $P_0 > 0$  — сжимающая сила на конце стержня.

Малые поперечные колебания стержня согласно модели плоских сечений Бернулли–Эйлера описываются уравнением

$$EJ \left( 1 + \frac{\delta}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left( P(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \gamma S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad P(x, t) = -ES \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3)$$

где  $w(x, t)$  — поперечное отклонение оси стержня, отнесенное к его длине,  $J$  — момент инерции поперечного сечения. Концы  $x = 0$  и  $x = L$  считаем шарнирно опертыми ( $w=w''=0$ ).

В уравнениях (1)–(3) перейдем к безразмерным переменным  $x_1, t_1$ , при которых длина стержня и время пробега продольной волны по длине стержня равны единице:

$$x = Lx_1, \quad t = \frac{L}{c}t_1, \quad c^2 = \frac{E}{\gamma}, \quad u = Lu_1, \quad w = Lw_1, \quad u(1, t) = 0, \quad (4)$$

где  $c$  — скорость звука. Тогда, опуская индекс 1, перепишем (1)–(3) в виде

$$\left(1 + \frac{\delta}{\omega} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\varepsilon_0(t) = -\frac{P_0(t)}{ES}, \quad u(1, t) = 0, \quad (5)$$

$$\mu^2 \left(1 + \frac{\delta}{\omega} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon(x, t) \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad \varepsilon(x, t) = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (6)$$

где  $\varepsilon(x, t)$  — продольная деформация ( $\varepsilon(x, t) > 0$  при сжатии),

$$\mu^2 = \frac{J}{SL^2} = \left(\frac{r}{L}\right)^2 \ll 1, \quad r = \sqrt{\frac{J}{S}}. \quad (7)$$

## 2. Решение Ишлинского–Лаврентьева

Предполагается [8], что продольные волны в стержне отсутствуют (или исчезли в связи с затуханием) и рассматривается уравнение (6) при  $\delta = 0$ ,  $\varepsilon(x, t) = \varepsilon_0 = \text{const} > 0$ :

$$\mu^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \varepsilon_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (8)$$

Эйлерова критическая деформация равна  $\varepsilon_* = \mu^2 \pi^2$ . При  $\varepsilon_0 > \varepsilon_*$  возможна потеря устойчивости по нескольким первым формам. При этом решение уравнения (8) имеет вид

$$w(x, t) = C_m e^{\alpha_m t}, \quad \alpha_m = \sqrt{\varepsilon_0 m^2 \pi^2 - \mu^2 m^4 \pi^4}, \quad m^2 < \frac{\varepsilon_0}{\mu^2 \pi^2}. \quad (9)$$

При этих  $m$  будем характеризовать интенсивность роста амплитуды  $m$ -й формы потери устойчивости параметром  $\alpha_m$ . На рис. 1 для  $\mu = 0,002$  показаны графики функций  $\alpha_m(\varepsilon_0)$  для  $m = 1, 2, \dots, 8$ .

С ростом деформации сжатия  $\varepsilon_0$  растет как максимальная интенсивность роста амплитуды, так и номер соответствующей формы.

## 3. Распространение продольных волн

В подходе ИЛ [8] предполагалось, что продольная сила не зависит ни от времени  $t$ , ни от координаты  $x$ . Найдем зависимость  $\varepsilon(x, t)$ . Распространение продольных волн в стержне описывается задачей (5) при нулевых начальных условиях.

При  $\delta = 0$  представление решения уравнения (5) в виде  $u(x, t) = f(x - t) + g(x + t)$  позволяет установить [12] его периодичность:  $u(x, t) = u(x, t + 4)$ .

Представим решение задачи (5) в виде ряда по собственным функциям задачи

$$v''(x) + \nu^2 v(x) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(1) = 0, \quad (')' = d(')/dx. \quad (10)$$

Находим

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) v_k(x), \quad v_k(x) = \cos \nu_k x, \quad \nu_k = (k - 0.5)\pi, \quad (11)$$

$$\ddot{\varphi}_k + \delta \nu_k \dot{\varphi}_k + \nu_k^2 \varphi_k = -2\varepsilon_0(t), \quad \varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0,$$

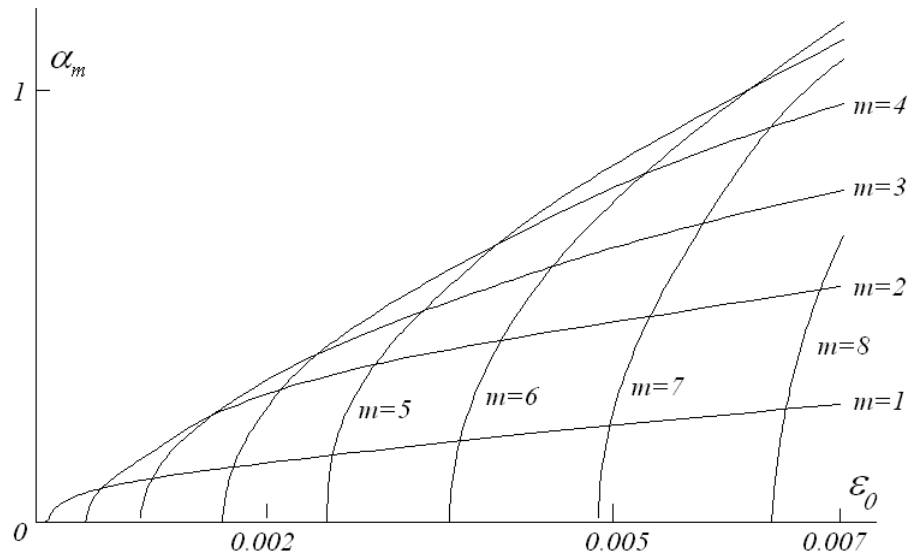


Рис. 1. Интенсивность роста амплитуды  $m$ -й формы

где точкой обозначена производная по времени. Осевое напряжение  $\varepsilon(x, t)$  представим в виде

$$\varepsilon(x, t) = -\frac{\partial u}{\partial x} = 2\varepsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \varphi_k(t) \sin \nu_k x = 2\varepsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(t)}{\nu_k} \sin \nu_k x. \quad (12)$$

Приведем функции  $\psi_k(t)$  для ряда ударных импульсов  $\varepsilon_0(t)$

$$\varepsilon_0(t) = \varepsilon_0 = \text{const} \Rightarrow \psi_k(t) = 1 - \cos(\nu_k t) e^{-\delta_{1k} t/2}, \quad \delta_{1k} = \delta \nu_k. \quad (13)$$

$$\varepsilon_0(t) = \begin{cases} \varepsilon_0, & t \leq \tau, \\ 0, & t > \tau \end{cases} \Rightarrow \psi_k(t) = \begin{cases} 1 - \cos(\nu_k t) e^{-\delta_{1k} t/2}, & t \leq \tau, \\ (\cos \nu_k(t - \tau) - \cos \nu_k t) e^{-\delta_{1k} t/2}, & t > \tau, \end{cases} \quad (14)$$

где  $\tau$  длительность импульса. Будут рассмотрены и другие импульсы.

Формула (13) и (14) приближенно (при  $\delta \ll 1$ ) учитывают влияние вязкости. При ее отсутствии следует считать  $\delta = 0$ .

#### 4. Возбуждение поперечных колебаний, вызванных продольными напряжениями

Решение уравнения (6), удовлетворяющее условиям шарнирного опирания, ищем в виде ряда Фурье

$$w(x, t) = \sum_{m=1}^N X_m(x) T_m(t), \quad X_m(x) = \sin m\pi x. \quad (15)$$

Функции  $T_m(t)$  удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d^2 T_m}{dt^2} + \delta_{2m} \frac{dT_m}{dt} + \omega_m^2 T_m(t) - \sum_{n=1}^N a_{mn}(t) T_n(t) = 0, \quad \omega_m = \mu m^2 \pi^2, \quad m = 1, \dots, N, \quad (16)$$

где  $\delta_{2m} = \delta \omega_m$  и коэффициенты

$$a_{mn}(t) = 2 \int_0^1 e(x, t) X'_m(x) X'_n(x) dx. \quad (17)$$

Для импульсов вида (13) и (14) при  $\delta = 0$  функции  $a_{mn}(t)$  периодичны с периодом  $T = 4$ .

## 5. Параметрический резонанс

Рассмотрим устойчивость нулевого решения системы (16). Эта система содержит два безразмерных параметра: малую меру амплитуды продольной деформации  $\varepsilon_0$  и малый параметр  $\mu$  относительной толщины стержня  $\ell = \mu^{-1}$ .

При  $\varepsilon_0 = 0$  частоты собственных колебаний системы (16) равны  $\omega_n$ , а частота  $\theta$  параметрического возбуждения равна  $\theta = 2\pi/T = \pi/2$ . Методы исследования параметрических колебаний хорошо известны [11, 17, 18]. При малых  $\varepsilon_0$  области неустойчивости возможны лишь в окрестностях значений

$$|\omega_n \pm \omega_m| = k\theta, \quad m, n, k = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Для вычисления характеристических показателей перепишем систему (18) в виде системы  $2N$  уравнений первого порядка

$$\frac{dy}{dt} = B(\theta t)y, \quad B(\theta(t+T)) = B(\theta t), \quad T = 4, \quad (19)$$

и построим матрицу монодромии  $Y(T)$  в результате численного решения матричной задачи Коши

$$\frac{dY}{dt} = B(\theta t)Y, \quad Y(0) = E, \quad (20)$$

где  $E$  — единичная матрица порядка  $2N$ . Характеристические показатели  $\rho_j$  находим из алгебраического уравнения порядка  $2N$ :  $|Y(T) - \rho E| = 0$ . Положим  $\rho = \max_j |\rho_j|$ . Тогда при  $\rho > 1$  нулевое решение неустойчиво, и величина  $\rho$ , определяющая скорость роста решения пропорционально  $\rho^{t/4}$ , может служить мерой неустойчивости. Параметр  $\rho$  связан с параметром  $\alpha_m$ , входящим в формулу (2.2), соотношением

$$\alpha_m = \frac{\ln \rho}{4}. \quad (21)$$

На плоскости параметров  $(\ell, \varepsilon_0)$  при отсутствии вязкости область параметрической неустойчивости примыкает к оси  $\varepsilon_0 = 0$  при

$$\ell = \frac{2\pi(n^2 \pm m^2)}{k}, \quad m, n, k = 1, 2, \dots \quad (22)$$

Множество критических длин, определяемое формулой (22) является всюду плотным, а сами резонансы возбуждаются с различными скоростями роста амплитуд колебаний. При  $m = n$ ,  $k = 1$  получаем главные резонансы, при  $m \neq n$  — комбинационные резонансы и при  $k > 1$  — резонансы на обертоне. В [14] показано, что комбинационные резонансы и резонансы на обертоне возбуждаются существенно меньше. Поэтому ограничимся рассмотрением главных резонансов  $\ell_m = 4\pi m^2$ .

Пренебрегая взаимодействием форм поперечных колебаний, приходим к уравнению:

$$\frac{d^2 T_m}{dt^2} + b_m(t)T_m(t) = 0, \quad b_m(t) = \omega_m^2 - a_{mm}(t), \quad (23)$$

где

$$a_{mm}(t) = 8m^2\varepsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} C_{km}(1 - \cos \nu_k t), \quad C_{km} = \frac{1}{(2k-1)^2 - 16m^2} + \frac{1}{(2k-1)^2}. \quad (24)$$

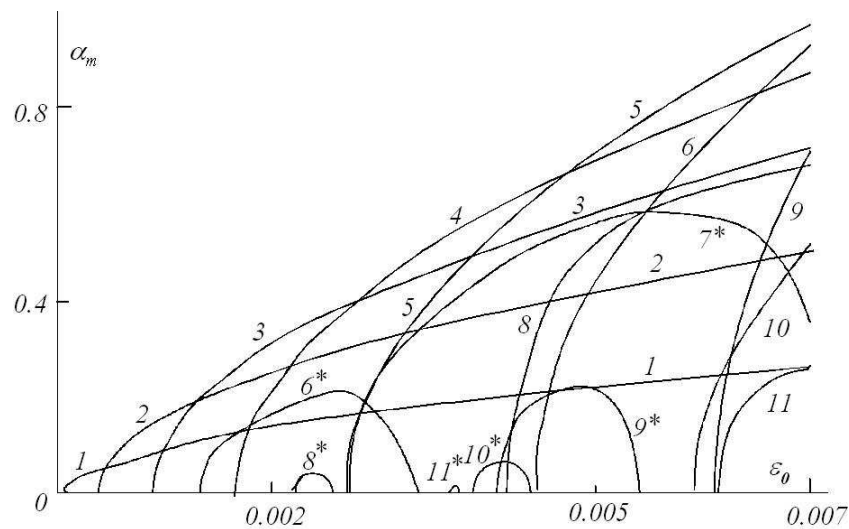
После преобразований с учетом соотношения  $\sum_{k=1}^{\infty} C_{km} = \pi^2/8$  получаем

$$b_m(t) = \omega_m^2 - m^2\pi^2\varepsilon_0 + 8m^2\varepsilon_0\eta_m(t), \quad \eta_m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{km} \cos \nu_k t. \quad (25)$$

При  $\eta_m(t) = 0$  возможна статическая потеря устойчивости по  $m$ -й форме при  $\varepsilon_0 \geq \varepsilon_{*m} = \mu\omega_m$ , что полностью соответствует подходу ИЛ. Наличие периодической функции  $\eta_m(t)$  приводит к тому, что потеря устойчивости по  $m$ -й форме происходит и при меньших значениях  $\varepsilon_0$ . В [14] приведены численные результаты.

Для стержня с длиной  $\ell_5 = 100\pi = 314,2$  скорость роста амплитуды поперечных колебаний с учетом распространения продольных волн при  $\varepsilon_0 \leq 0,007$  представлена на рис. 2. По сравнению с постоянной осевой деформацией  $\varepsilon_0$  наличие продольных волн приводит к двум эффектам. Во-первых, эйлерова критическая деформация сдвигается и, во-вторых, появляются параметрические резонансы. Для форм с  $m = 1, 2, \dots, 6$  сдвиг по сравнению с моделью ИЛ происходит в сторону увеличения  $\varepsilon_0$ , а формы с  $m = 7$  и  $m = 8$  обнаруживают аномальное поведение.

Параметрические резонансы отмечены на рис. 2 звездочками. Они появляются раньше эйлеровых форм потери устойчивости. Раньше других имеет место резонанс с  $m = 6^*$ , реализующийся при  $0,00134 < \varepsilon_0 < 0,00334$ .



**Рис. 2.** Интенсивность роста амплитуды  $m$ -й формы с учетом распространения продольных волн

При кратковременном ударе длительностью  $\tau$  продольная деформация  $\varepsilon(x, t)$  задается формулой (14), и среднее значение коэффициента  $a_{mm}(t)$  в уравнении (23) при  $t > \tau$  равно нулю. Поэтому определяющее влияние на потерю устойчивости имеют не эйлеровы критические нагрузки, а параметрические резонансы. В [14] приведены численные примеры.

## 6. Влияние вязкости в линейном приближении

Изложенное выше описывает скорость роста амплитуды поперечного движения стержня в начальный период времени. С течением времени в случае потери устойчивости или параметрического резонанса амплитуда стремится к бесконечности. Для получения ограниченных амплитуд имеются две возможности: учет сопротивлений и рассмотрение нелинейной постановки.

При подходе ИЛ продольная деформация постоянна, в связи с чем влияние вязкости не рассматривается.

Рассмотрим сначала влияние малой вязкости (скажем,  $0,001 \leq \delta \leq 0,02$ ) на поперечные колебания при длительном ударе с учетом распространения продольных волн. Влияние вяз-

кости проявляется как при затухании переменной составляющей продольной деформации, так и при демпфировании поперечных колебаний.

Запишем уравнение для функции  $T_m(t)$ , определяющей амплитуду  $m$ -й формы:

$$\frac{d^2 T_m}{dt^2} + \delta_{2m} \frac{dT_m}{dt} + (\omega_m^2 - m^2 \pi^2 \varepsilon_0 + 8m^2 \varepsilon_0 \eta_m(t)) T_m(t) = 0, \quad (26)$$

где

$$\eta_m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{km} \cos \nu_k t e^{\delta_{k1} t}, \quad \delta_{1k} = \delta \nu_k, \quad \delta_{2m} = \delta \omega_m. \quad (27)$$

Коэффициенты уравнения (26) при  $\delta_{1k} \neq 0$  уже не являются периодическими и для оценки скорости роста амплитуды приходится интегрировать это уравнение численно на большом интервале времени.

Например, при

$$\ell = 45, \quad m = 2, \quad \varepsilon_0 = 0,0035 < \varepsilon^* = 0,00487, \quad \delta_{1k} \neq 0 \quad (28)$$

проведем интегрирование на большом интервале времени при различных коэффициентах сопротивления  $\delta$ . Для ненулевых начальных условий перемещение сначала растет (с осцилляцией), а затем начинает убывать в связи с затуханием продольных колебаний. В табл. 1 для различных  $\delta$  приведено максимальное значение амплитуды  $T_2^{\max}$ .

Таблица 1

Зависимость максимальной амплитуды от коэффициента сопротивления

$\delta$	0,02	0,01	0,007	0,005	0,003	0,002	0,0015	0,001
$T_2^{\max}$	1,2	2,8	5,3	12,8	87,7	942,8	9823,0	1021345,0

Этот пример интересен тем, что деформация  $\varepsilon_0$  меньше эйлеровой критической деформации  $\varepsilon^*$ . Небольшое сопротивление не может предотвратить развитие больших поперечных колебаний.

## 7. Квази-линейный подход

Если длительно действующая нагрузка превосходит критическую эйлерову нагрузку, то при линейном подходе (как при подходе ИЛ, так и при учете распространения продольных волн) имеет место неограниченный рост амплитуды поперечных колебаний. Учет вязкоупругих сил не препятствует неограниченному росту амплитуды. Поэтому линейный подход описывает движение лишь на начальном интервале времени, когда амплитуда поперечных перемещений невелика. С ростом времени продольные волны затухают и стержень принимает форму одной из эластик Эйлера [19]. Подробнее этот вопрос обсуждается в пп. 8, 9.

Если длительно действующая нагрузка меньше эйлеровой, при определенных значениях параметров возможен параметрический резонанс, также приводящий к неограниченному росту амплитуды, а при учете вязкоупругих сил — к существенному росту амплитуды. Та же качественная картина имеет место и в случае кратковременного импульса. Рассматриваемый ниже квази-линейный подход, при котором продольная деформация сжатия  $\varepsilon$  связана с перемещениями оси стержня формулой

$$-\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (29)$$

приводит к конечному значению максимальной амплитуды.

Для вывода системы уравнений будем исходить из принципа Остроградского–Гамильтона, по-прежнему, принимая гипотезу плоских сечений и пренебрегая моментом сил инерции вращательного движения сечений,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt = \delta A, \quad (30)$$

где  $T$  и  $\Pi$  — кинетическая и потенциальная энергии,  $\delta A$  — элементарная работа внешней силы. В безразмерных переменных эти величины приближенно равны

$$T = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dx, \quad \Pi = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \varepsilon^2 + \mu^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx, \quad \delta A = \delta u(0, t) \varepsilon_0(t). \quad (31)$$

Варьированием соотношения (30) по  $u$  и  $w$  получаем искомую систему уравнений и граничные условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad -\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \mu^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad x = 0, 1; \quad \varepsilon(0, t) = \varepsilon_0(t), \quad u(1, t) = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Начальные условия возьмем в виде

$$u(x, 0) = 0, \quad w(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (33)$$

Система (32) эквивалентна рассмотренным выше уравнениям (5) и (6), если считать  $\varepsilon = -\partial u / \partial x$ ,  $\delta = 0$ .

Приближенное решение задачи (32), (33) ищем в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^K a_k(t) \cos((k - 0,5)\pi x), \quad w(x, t) = \sum_{m=1}^M b_m(t) \sin(m\pi x). \quad (34)$$

Для построения уравнений относительно функций  $a_k(t)$  и  $b_m(t)$  подставим (33) в (29) и приравняем нулю коэффициенты при вариациях

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_k}{dt^2} + \delta_{1k} \frac{da_k}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = \varepsilon_0(t), \quad k = 1, 2, \dots, K, \\ \frac{d^2 b_m}{dt^2} + \delta_{2m} \frac{db_m}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial b_m} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M, \end{aligned} \quad (35)$$

$$a_k = \frac{da_k}{dt} = \frac{db_m}{dt} = 0, \quad b_m = b_m^0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (36)$$

где  $b_m^0$  — заданные малые начальные отклонения,

$$\Phi(a_k, b_m) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \varepsilon^2 + \frac{1}{\ell^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx. \quad (37)$$

В систему (35) включены слагаемые, учитывающие вязко-упругость, причем коэффициенты вязкости  $\delta_{1k}$  и  $\delta_{2m}$  те же, что и в (27).

Рассмотрим длительное нагружение при  $\varepsilon_0(t) = \varepsilon_0 = \text{const}$  и рассмотрим случай  $\ell = 45$ ,  $\varepsilon_0 = 0,0035$ , при котором возбуждается параметрический резонанс при  $m = 2$  при нагрузке,



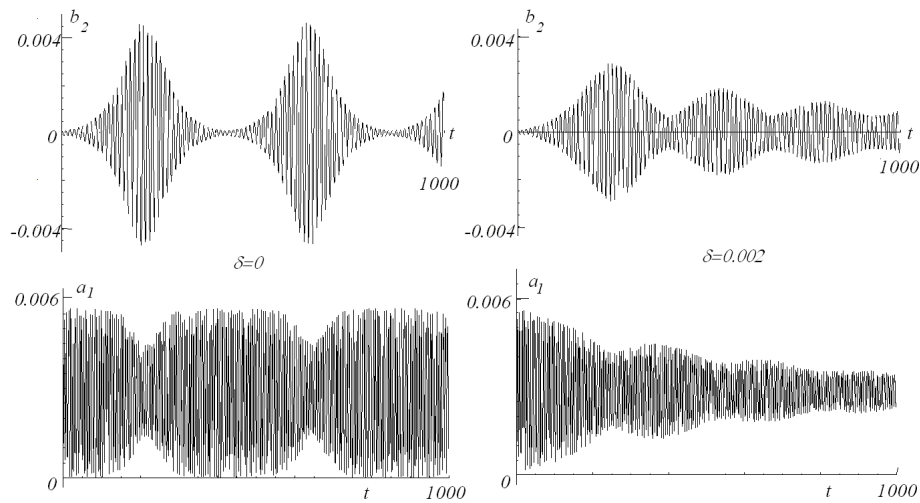


Рис. 3. Длительное возбуждение при квази-линейном подходе

меньшей эйлеровой. При интегрировании системы (35) возьмем  $b_2(0) = 0,0001$ , а остальные начальные условия считаем равными нулю. Рассмотрено движение без сопротивления и при коэффициенте вязкости  $\delta = 0,002$  (см. рис. 3, на котором в интервале времени  $0 \leq t \leq 1000$  приводится резонансная амплитуда  $b_2(t)$  и функция  $a_1(t)$ , дающая главную часть продольного смещения).

При отсутствии вязкости движение представляет собой незатухающие биения, при которых происходит обмен энергии продольных и изгибных колебаний. Расчеты показали, что амплитуда биений слабо зависит от начальных условий. При  $\delta = 0,002$  имеем затухающие биения, причем скорость их затухания сильно зависит от коэффициента вязкости  $\delta$ . Также изменилась частота биений по сравнению со случаем без затухания. В линейном приближении при  $\delta = 0,002$  максимальная амплитуда возросла в 942 раза по сравнению с начальным значением (см. табл. 1), а при нелинейном подходе амплитуда биений от начальных условий не зависит.

## 8. Эластики Эйлера

Если длительная осевая нагрузка превосходит эйлерову, то линейный (а также квази-линейный) подход пригодны для описания деформаций лишь на начальном интервале времени. Проследим развитие деформаций с ростом времени.

Для построения эластик Эйлера рассмотрим плоскую деформацию тонкого стержня с шарнирно опертыми концами А и В, причем конец А неподвижен, а конец В может перемещаться по прямой АВ. По этой же прямой направлена и постоянная сжимающая сила  $P$  (рис. 4).

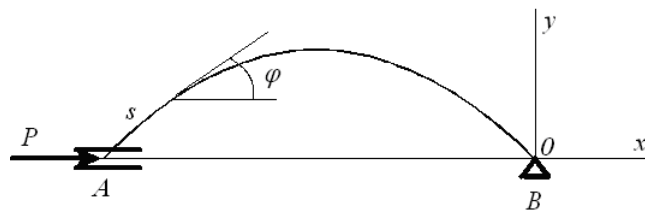


Рис. 4. Нелинейная деформация стержня

Для нерастяжимого стержня его возможные положения равновесия (называемые эластиками Эйлера) удовлетворяют краевой задаче

$$EI \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + Py = 0, \quad \frac{dx}{ds} = \cos \varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \varphi, \quad 0 \leq s \leq L, \quad (38)$$

$$y(0) = x(L) = y(L) = 0, \quad \left. \frac{d\varphi}{ds} \right|_{s=0}, \quad \left. \frac{d\varphi}{ds} \right|_{s=L}.$$

Здесь  $s$  — длина дуги на оси стержня,  $x, y, \varphi$  — декартовы координаты точки на оси стержня и угол наклона оси (рис. 4). Введем новые безразмерные переменные (со \*)

$$\{x^*, y^*, s^*\} = \frac{\pi}{L} \{x, y, s\}, \quad p = \frac{L^2}{EI\pi^2} P. \quad (39)$$

Опуская \*, перепишем уравнения (38)

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} + py = 0, \quad \frac{dx}{ds} = \cos \varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \varphi, \quad 0 \leq s \leq \pi. \quad (40)$$

При  $p < 1$  система (40) имеет только нулевое решение. Значение  $p = 1$  соответствует указанной выше критической деформации  $\varepsilon_* = \mu^2 \pi^2$ . Устойчивые ненулевые решения для ряда значений  $p > 1$  показаны на рис. 5 ( $p_1 = 1,01, p_2 = 1,2, p_3 = 1,5, p_4 = 2,184, p_5 = 3, p_6 = 10$ ). С ростом  $p$  конец А стержня приближается к неподвижному концу В, а при  $p_4 = 2,184$  совпадает с ним. При  $p > p_4$  образуется петля.

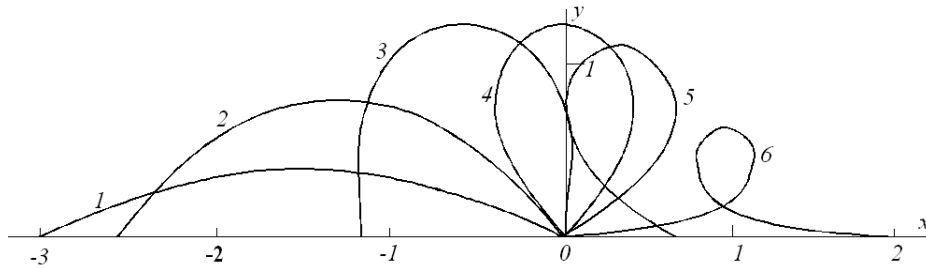


Рис. 5. Эластики Эйлера

## 9. Численное решение

Для построения формы сжатого стержня в последовательные моменты времени используется дискретная аппроксимация. В недеформированном состоянии прямолинейный стержень заменяем системой из  $n+1$  материальных точек с равными массами  $M$ , расположенных на расстояниях  $L_0 = L/n$  друг от друга. В деформированном состоянии точки расположены в одной плоскости и имеют декартовы координаты  $x_i, y_i, i = 1, 2, \dots, n+1$ . Кинетическая и потенциальная энергии системы аппроксимируются выражениями

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2), \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n C\varepsilon_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n D\kappa_i^2, \quad (41)$$

где

$$\varepsilon_i = \frac{r_i}{L_0} - 1, \quad r_i^2 = (x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2, \quad \kappa_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}, \quad \tan \varphi_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}. \quad (42)$$

Здесь  $\varepsilon_i$  — деформации растяжения,  $r_i$  — расстояния между соседними точками,  $\varphi_i$  — углы наклона отрезков, соединяющих соседние точки. Константы  $C, D, M$  связаны с параметрами

однородного сплошного стержня соотношениями  $C = ESL_0$ ,  $D = ELL_0$ ,  $M = \rho SL_0$ . Вариация функционала Гамильтона по  $x, y$  приводит к уравнениям, описывающим движение системы с  $2n - 1$  степенью свободы. В них дополнительно введены слагаемые, учитывающие силы сопротивления, пропорциональные скорости точек.

Приведем некоторые численные результаты. Возьмем начальные условия, при которых стержень равномерно сжат силой  $p$  и неподвижен. Для возбуждения поперечных колебаний отклоним одну из точек на малую величину  $y_2(0) = \delta$ , а остальные начальные условия нулевые. Возьмем  $n = 40$ ,  $\delta = 0,01$  и рассмотрим три значения сжимающей силы  $p_1 = 1,5$ ,  $p_2 = 10$ ,  $p_3 = 20$ . На рис. 6 в последовательные моменты времени представлены результаты численного интегрирования. При  $p = p_1$  возможна потеря устойчивости только по первой форме ( $m=1$ ). Амплитуда растет и в пределе совпадает с эластикой Эйлера 3 на рис. 5. При  $p = p_2$  возможна потеря устойчивости по трем первым формам ( $m=1, 2, 3$ ), причем коэффициенты роста пропорциональны величинам  $\alpha_1 = 3$ ,  $\alpha_2 = 4,9$ ,  $\alpha_3 = 3$ . Поэтому в первые моменты времени видим преимущественный рост прогиба по форме  $m = 2$ . Точно также при  $p = p_3$  возможна потеря устойчивости по четырем формам при  $\alpha_1 = 4,36$ ,  $\alpha_2 = 8$ ,  $\alpha_3 = 9,95$ ,  $\alpha_4 = 8$  и наблюдается рост амплитуды при  $m=3$ . При дальнейшем росте времени в случаях  $p = p_2$  и  $p = p_3$  происходит искажение картины деформирования. Точка А приближается к неподвижной точке В, а затем проходит ее с образованием петли (рис. 5).

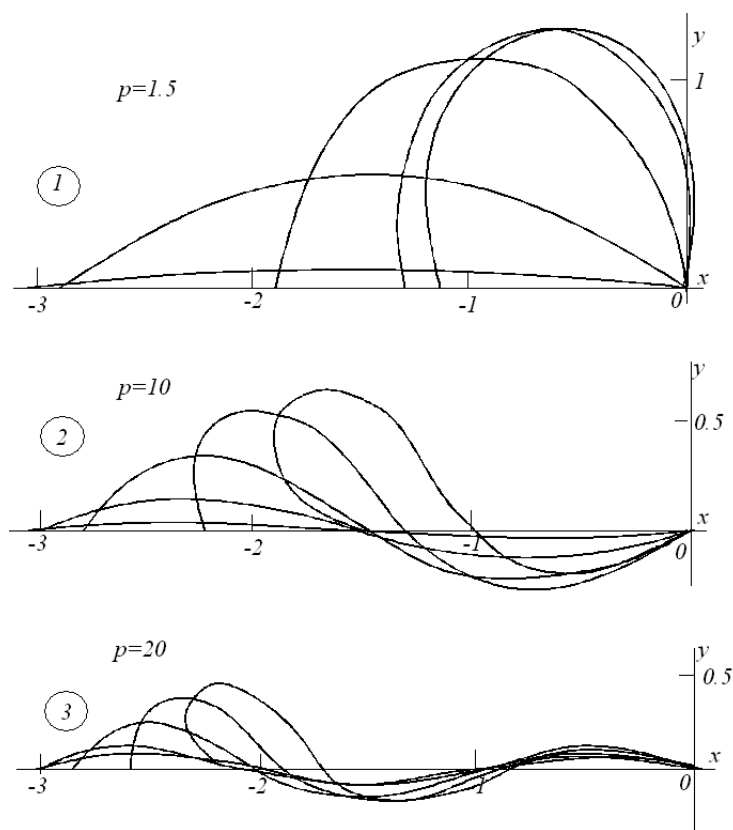


Рис. 6. Последовательные формы изогнутого стержня

## 10. Обсуждение

При обсуждении поперечных колебаний, вызванных продольным ударом по стержню, следует различать длительное воздействие и кратковременный удар. При длительном воз-

действии основным параметром, с которым следует сравнивать величину вызванных ударом продольных деформаций, является критическая эйлерова деформация. Если приложенная деформация существенно превосходит эйлерову, возможна потеря устойчивости по нескольким первым формам, причем наиболее быстро растет прогиб по одной из форм в соответствии с результатом ИЛ. С ростом времени при  $p < 2$ , 184 стержень принимает форму арки, а при  $p > 2$ , 184 равновесным может быть лишь положение, в котором стержень выворачивается и точка А заходит за точку В.

*Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ, гранты 12.01.92000.ННС-а, 13.01.00523-а.*

## Литература

1. Эйлер, Л. Метод нахождения кривых, обладающих свойством максимума либо минимума / Л Эйлер. – М.-Л.: ГТТИ, 1934.
2. Hutchinson, W.J. Dynamic Buckling Estimates / W.J. Hutchinson, B. Budiansky // AIAA J. – 1966. – V. 4, № 3. – P. 527–530.
3. Knauss, W.G. Some Basic Problems in Stress Wave Dominated Fracture / W.G. Knauss, K. Ravi-Chandar // Intern. J. Fracture. – 1985. – V. 27, issue 3-4. – P. 127–143.
4. Морозов, Н.Ф. Проблемы динамики разрушения / Н.Ф. Морозов, Ю.В. Петров. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997.
5. Bratov, V.A. Dynamic Strength of Continuum / V.A. Bratov, N.F. Morozov, Yu.V Petrov. – SPb: St. Petersburg Univ. Press. 2009.
6. Болотин, В.В. Динамическая устойчивость упругих систем / В.В. Болотин. – М.: Наука, 1956.
7. Вольмир, А.С. Устойчивость сжатых стержней при динамическом нагружении / А.С. Вольмир // Строит. мех. и расчет сооружений. – 1960. – № 1. – С. 6–9.
8. Лаврентьев, М.А. Динамические формы потери устойчивости упругих систем / М.А. Лаврентьев, А.Ю. Ишлинский // Докл. АН СССР. – 1949. – Т. 64, № 6. – С. 776–782.
9. Пановко, Я.Г. Устойчивость и колебания упругих систем / Я.Г. Пановко, И.И. Губанова – М.: Наука, 1987.
10. Вольмир, А.С. Устойчивость упругих систем / А.С. Вольмир – М.: ГИТТЛ, 1962.
11. Болотин, В.В. Поперечные колебания и критические скорости / В.В. Болотин. – М.: Изд-во АН СССР, 1951. – Вып. 1; 1953. – Вып. 2.
12. Морозов, Н.Ф. Динамика стержня при продольном ударе / Н.Ф. Морозов, П.Е. Товстик // Вестник СПбГУ. Сер. 1. – 2009. – № 2. – С. 105–111.
13. Беляев, А.К. Динамический подход к задаче Ишлинского–Лаврентьева / А.К. Беляев, Д.Н. Ильин, Н.Ф. Морозов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2013. – № 5. – С. 28–33.
14. Морозов, Н.Ф. Динамика стержня при кратковременном продольном ударе. / Н.Ф. Морозов, П.Е. Товстик // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. – 2013. – Вып. 3. – С. 131–141.
15. Морозов, Н.Ф. Поперечные колебания стержня, вызванные продольным ударом / Н.Ф. Морозов, П.Е. Товстик // Доклады Российской академии наук. – 2013. – Т. 452, № 1. – С. 37–41.
16. Пальмов, В.А. Колебания упругопластических тел / В.А. Пальмов – М.: Наука, 1976.

17. Ляпунов, А.М. Общая задача об устойчивости движения / А.М. Ляпунов – М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
18. Якубович, В.А. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения / В.А. Якубович, В.М. Старжинский – М.: Наука, 1972.
19. Илюхин, А.А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней / А.А. Илюхин. – Киев: Наукова думка, 1979.

Никита Федорович Морозов, доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН, кафедра «Теория упругости», Санкт-Петербургский государственный университет (г. С. Петербург, Российская Федерация), morozov@nm1016.spb.edu.

Петр Евгеньевич Товстик, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Теоретическая и прикладная механика», Санкт-Петербургский государственный университет (г. С. Петербург, Российская Федерация), peter.tovstik@mail.ru.

Татьяна Петровна Товстик, кандидат физико-математических наук, ст.н.с., лаборатория «Мехатроника», Институт Проблем Машиноведения РАН (г. С. Петербург, Российская Федерация), tovstik\_t@mail.ru.

---

**Bulletin of the South Ural State University.**  
**Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software",**  
**2014, vol. 7, no. 1, pp. 76–89.**

---

MSC 74H10

DOI: 10.14529/mmp140107

## Static and Dynamics of a Rod at the Longitudinal Loading

*N.F. Morozov*, Saint Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russian Federation, morozov@nm1016.spb.edu,

*P.E. Tovstik*, Saint Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russian Federation, peter.tovstik@mail.ru,

*T.P. Tovstik*, Institute of Problems of Mechanical Engineering Russian Academy of Sciences, Saint-Petersburg, Russian Federation, tovstik\_t@mail.ru

A short review of works about static and dynamical stability of a thin rod under axial compression is given. By using linear static approach a critical compression has been found by L. Euler. In the paper of M.A. Lavrentiev and A.Y. Ishlinsky it has been established that at intensive loading which essentially exceeds the Eulerian one, the maximum growth of the lateral deflection corresponds to the mode with a large number of waves in the longitudinal direction. The following researches are connected with the longitudinal waves influence. The conditions of parametric resonances appearing and also the cases of stability loss under load less than the Eulerian one are found. Under quasi-linear approach the beating effect with energy transition from longitudinal vibrations into transversal ones and vice versa is established. At a long-time action of the load exceeding the Eulerian one both linear and quasi-linear approaches do not lead to finite values of transversal amplitude. That is why the non-linear approach is used and the growth of the post-critical deformations of the rod is studied. The connection of the deformation picture with the effect discovered by M.A. Lavrentiev and A.Y. Ishlinsky with the Eulerian elastics is marked.

*Keywords: stability of rod; parametric resonance; beatings; Eulerian elastics.*

## References

1. Euler L. *Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes Sive Solutio Problematis Isoperimetrici Latissimo Sensu Accepti*. Opera omnia: Opera mathematica, Springer, 1952.
2. Hutchinson W.J., Budiansky B. Dynamic Buckling Estimates. *AIAA J.*, 1966, vol. 4, no. 3, pp. 527–530.
3. Knauss W.G., Ravi-Chandar K. Some Basic Problems in Stress Wave Dominated Fracture. *Intern. J. Fracture*, 1985, vol. 27, issue 3-4, pp. 127–143. DOI: 10.1007/BF00017963
4. Morozov N.F., Petrov Ju.V. *Problemyi dinamiki razrusheniya* [Problems of destruction dynamics]. St. Petersburg, St. Petersburg Univ. Press, 1997.
5. Bratov V.A., Morozov N.F., Petrov Yu.V. *Dynamic Strength of Continuum*. St. Petersburg, St. Petersburg Univ. Press, 2009.
6. Bolotin V.V. *Dinamicheskaya ustoychivost' uprugikh sistem* [Dynamical Stability of Elastic Systems]. Moscow, Nauka, 1956.
7. Vol'mir A.S. Stability of Compressed Rod at Dynamical Loading. [Ustoychivost' szhatykh sterzhney pri dinamicheskom nagruzhenii] *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenii*, 1960, no. 1, pp. 69.
8. Lavrent'ev M.A., Ishlinsky A.Ju. Dynamical Modes of Stability Loss of Elastic Systems. [Dinamicheskie formy poteri ustoychivosti uprugikh sistem]. *Dorlady Physics*, 1949, vol. 64, no. 6, pp. 776–782.
9. Panovko Ya.G., Gubanov I.I. *Stability and Vibrations of Elastic Systems* [Ustoychivost' i kolebaniya uprugikh sistem]. Moscow, Nauka, 1987.
10. Vol'mir A.S. *Stability of Elastic Systems* [Ustoychivost' uprugikh sistem]. Moscow, GITTL, 1962.
11. Bolotin V.V. *Poperechnye kolebaniya i kriticheskie skorosti*. [Transversal Vibrations and Critical Velocities]. Izd. AN USSR, vol. 1 (1951), vol. 2 (1953).
12. Morozov N.F., Tovstik P.E. Dynamics of Rod at a Longitudinal Impact [Dinamika sterzhnya pri prodol'nom udare]. *Vestnik St. Petersburg Univ. Ser. 1*, 2009, no. 2, pp. 105–111.
13. Belyaev A.K., Il'in D.N., Morozov N.F. Dytamical Approach to the Ishlinsky–Lavrent'ev Problem. *Mech. of Solids*, 2013, vol. 48, no. 5, pp. 504–508. DOI: 10.3103/S002565441305004X
14. Morozov N.F., Tovstik P.E. The Rod Dynamics under a Short-Term Longitudinal Impact [Dinamika sterzhnya pri kratkovremennom prodol'nom udare]. *Vestnik St. Petersburg Univ. Ser. 1*, 2013, no. 3, pp. 131–141.
15. Morozov N.F., Tovstik P.E. Transverse Rod Vibrations under a Short-Term Longitudinal Impact. *Doklady Physics*, 2013, vol. 58, no. 9, pp. 387–391. DOI: 10.1134/S1028335813090024
16. Palmov V.A. *Kolebaniya uprugoplasticheskikh tel* [Vibrations of Elasto-Plastic Bodies]. Moscow, Nauka, 1976.
17. Lyapunov A.M. *Obshchaya zadacha ob ustoychivosti dvizheniya* [General Problem of a Motion Stability]. Moscow, Leningrad. Gostekhizdat, 1950.
18. Jakubovich V.A., Sterzhinsky V.M. *Lineynye differentsial'nye uravneniya s periodicheskimi koeffitsientami i ikh prilozheniya* [Linear Differential Equations with Periodic Coefficients and Their Applications]. Moscow, Nauka, 1972.
19. Ilukhin A.A. *Prostranstvennye zadachi nelineynoy teorii uprugikh sterzhney* [Space Problems of the Linear Theory of Elastic Rods]. Kiev, Naukova Dumka, 1979.

Поступила в редакцию 9 декабря 2013 г.