УДК 517.956

# ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕИЗВЕСТНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ВРЕМЕНИ

***Р.Р. Сафиуллова***

Работа посвящена исследованию разрешимости обратной задачи с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени для гиперболических уравнений второго порядка, единственности ее решения. Суть задачи состоит в том, что требуется вместе с решением определить неизвестный коэффициент. Задача рассматривается в прямоугольной области, задаются условия обычной начально-краевой задачи и некоторое условие переопределения, необходимое для нахождения неизвестного коэффициента. При решении исходной задачи осуществляется переход от обратной задачи к некоторой прямой вспомогательной задаче с нулевыми граничными условиями. Доказывается разрешимость вспомогательной задачи в описанном выше классе функций. Затем вновь производится переход к исходной задаче, в результате делается вывод о разрешимости обратной задачи. При доказательстве используются метод продолжения по параметру, метод неподвижной точки, методы срезки и регуляризации. В работе доказываются теоремы существования, единственности решения в рассматриваемых классах.

*Ключевые слова: обратная задача; гиперболическое уравнение; нагруженные уравнения; метод продолжения по параметру; метод неподвижной точки; метод регуляризации.*

## 1. Постановка задачи

Пусть $D$ есть интервал $(0,1)$, $Q$ есть прямоугольник $D \times (0,T)$ конечной высоты $T$, $x$ есть точка области $D$, $t$ есть точка интервала $(0,T)$. Далее, пусть $f(x,t)$, $\varphi_0(t)$, $\psi_0(t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\mu(t)$ есть заданные функции, определенные при $x \in \overline{D}$, $t \in [0,T]$.

Обратная задача: найти функции $u(x,t)$, $q(t)$, связанные в $Q$ уравнением

$$u_{tt} - u_{xx} + q(t)u_t = f(x,t), \tag{1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in D, \tag{2}$$

$$u_x(0,t) = \varphi_0(t), u_x(1,t) = \psi_0(t), \quad t \in (0,T), \tag{3}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad t \in (0,T). \tag{4}$$

Задачами в близкой постановке занимались Валитов И.Р. [1, 2] и Павлов С.С. [3].

В работе [3] рассматривались многомерные обратные задачи с неизвестным коэффициентом $q(t)$, однако условия переопределения были другие, а именно задавалось интегральное условие переопределения

$$\int\limits_{\Omega} K(x)u(x,t)dx = \mu(t).$$

В работах [1, 2] рассматривались близкие к рассматриваемой задачи, но с тождественно нулевыми функциями $\varphi_0(t)$ и $\psi_0(t)$.

## 2. Разрешимость обратной задачи

При доказательстве теоремы будем пользоваться неравенством

$$v^2(x) \le 2d_0^2 \int\limits_0^1 v_x^2 dx + \left(1 + \frac{2}{d_0^2}\right) \int\limits_0^1 v^2 dx,$$

справедливым для любого $x \in D$, здесь $d_0$ – произвольное положительное число.

Положим

$$A(t) = \frac{f(0,t) - \mu''(t)}{\mu'(t)}, \quad B(t) = \frac{1}{\mu'(t)}, \quad B_0 = \max_{[0,T]} |B(t)|,$$

$$\alpha_1(t) = \frac{\varphi_0'(t)}{\mu'(t)}, \quad \beta_1(t) = \frac{\psi_0'(t)}{\mu'(t)},$$

$$a(x,t) = \frac{x^2}{2}[\beta_1(t) - \alpha_1(t)] + x\alpha_1(t),$$

$$b(x,t) = -a(x,t)a_{xx}(0,t) - a_{tt}(x,t) + a_{xx}(x,t),$$

$$w_0(x) = u_0''(x) - \left\{\frac{x^2}{2}[\beta_1(0) - \alpha_1(0)] + x\alpha_1(0)\right\} u_0''(0),$$

$$w_1(x) = u_1''(x) - u_1''(0)\left\{\frac{x^2}{2}[\beta_1(0) - \alpha_1(0)] + x\alpha_1(0)\right\} -$$

$$-u_0''(0)\left\{\frac{x^2}{2}[\beta_{1t}(0) - \alpha_{1t}(0)] + x\alpha_{1t}(0)\right\},$$

$$\widetilde{g}(x,t) = f_{xx}(x,t) - a(x,t)f_{xx}(0,t),$$

$$m_1 = \max_{\overline{Q}}[b_x(x,t) - a_{xt}(x,t)A(t)]^2, \quad m = \max_{\overline{Q}}[b_t(x,t) - a_t(x,t)A(t)]^2,$$

$$n_0 = 16\max_{\overline{Q}} a_x^2 + \frac{1}{2}m_1 + 2\max_{\overline{Q}} a_{xt}^2, \quad n_1 = \frac{1}{2} + n_0,$$

$$n_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}n_0 + \frac{1}{2}\max_{[0,T]} A(t), \quad n_3 = n_1 + \frac{1}{2}\max_{[0,T]} A(t),$$

$$n_4 = \frac{1}{32} + 2\max_{\overline{Q}} a_x^2, \quad n_5 = 1 + 2m_1, \quad n_6 = 1 + 4\max_{\overline{Q}} a_{xt}^2,$$

$$\widetilde{n}_1 = 1 + 8\max_{\overline{Q}} a^2(x,t) + \frac{1}{2}m + \max_{\overline{Q}} a_t^2(x,t),$$

$$s_1 = \max_{\overline{Q}} |a_t(x,t)| B_0, \quad s_2 = \max_{\overline{Q}} |a_{xt}| B_0,$$

$$k_1 = \left(2d_0^2 + 1 + \frac{2}{d_0^2}\right)[s_1 + \frac{3}{2}s_2] + \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}d_0 + \sqrt{1 + \frac{2}{d_0^2}}\right) B_0,$$

$$k_2 = 8s_2\left\{4d_0^4 + \left(1 + \frac{2}{d_0^2}\right)^2\right\},$$

$$r_1 = \frac{1}{2} - \left(n_4 + \frac{1}{32}\right), \quad r_2 = \frac{1}{2} + \left(n_5 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{2}{d_0^2}\right), \quad r_3 = \left(n_3 + \frac{1}{2}\right) + 2d_0^2(n_6 + 1),$$

$$r_4 = \widetilde{n}_1 + (n_6 + 1)\left(1 + \frac{2}{d_0^2}\right), \quad r = \frac{1}{32}\left(11 - 2s_2)\right),$$

$$k_0 = \max\left\{r_2, r_3, r_4, \left(n_2 + \frac{5}{2}\right), 2d_0^2\left(n_5 + \frac{1}{2}\right)\right\},$$

$$R_1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 [w_1^2(x) + w_0'^2(x) + w_0^2(x)]dx + \frac{3}{4}\int\limits_0^1 [w_1'^2(x) + w_0''^2(x)]dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 [w_1''^2(x) + w_0'''^2(x)]dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \widetilde{g}^2 dx d\tau + \frac{21}{8}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \widetilde{g}_x^2 dx d\tau,$$

$$c_i = 4k_{i-1}, \quad i = 1,2,3, \quad c_0 = 4R_1,$$

$$A_1 = c_3 + \frac{c_1}{2} + \frac{3c_2}{4}, \quad A_0 = c_0 + \frac{T}{4}\left[c_2 + 2\right], \quad T^* = \frac{1}{A_0 A_1}.$$

**Теорема 1.** *Пусть для функций $f(x,t)$, $\varphi_0(t)$, $\psi_0(t)$, $\mu(t)$, $u_0(x)$ и $u_1(x)$ выполняются включения $f(x,t) \in W_2^3(Q)$, $\varphi_0(t) \in W_2^4([0,T])$, $\psi_0(t) \in W_2^4([0,T])$, $u_0(x) \in W_2^5(D)$, $u_1(x) \in W_2^4(D)$, $\mu(t) \in W_2^3([0,T])$. Кроме того, пусть выполняются условия*

$$\mu(0) = u_0(0), \quad \varphi_0^{'}(0) = u_1^{'}(0), \quad u_0^{'}(1) = \psi_0(0), \quad \mu'(t) \neq 0, \quad 0 < t < T,$$

$$\varphi_0''(t) + A(t)\varphi_0'(t) - f_x(0,t) \equiv 0, \quad \psi_0''(t) + A(t)\psi_0'(t) - f_x(1,t) \equiv 0,$$

$$r_1 > 0, \quad r > 0, \quad T < T^*, \quad A(t) \geq \alpha_0 > 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\frac{A_0}{1 - A_1 T A_0} \leq \frac{\alpha_0}{B_0\left[\sqrt{2}d_0 + \sqrt{1 + \frac{2}{d_0^2}}\right]}. \tag{6}$$

*Тогда обратная задача (1) – (4) имеет решения $\{u(x,t), q(t)\}$ такие, что $u(x,t) \in V$, $q(t) \in L_\infty([0,T])$.*

*Доказательство.* Рассмотрим следующую краевую задачу: найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике $Q$ решением уравнения

$$w_{tt} - w_{xx} + [A(t) + B(t)w(0,t)]w_t = \widetilde{g}(x,t) - a(x,t)w_{xx}(0,t) + \tag{7}$$

$$+b(x,t)w(0,t) - 2a_t(x,t)w_t(0,t) - a_t(x,t)[A(t) + B(t)w(0,t)]w(0,t),$$

и удовлетворяющую условиям:

$$w_x(0,t) = w_x(1,t) = 0, \tag{8}$$

$$w(x,0) = w_0(x), \quad w_t(x,0) = w_1(x). \tag{9}$$

Определим необходимое ниже пространство $V$:

$$V = \{v(x,t) : v(x,t) \in W_2^2(Q), v_{xx}(x,t) \in W_2^1(Q), v_{xxxt}(x,t) \in L_2(Q)\}.$$

Норму в этом пространстве определим естественным образом

$$||v||_V = ||v||_{W_2^2(Q)} + ||v_{xx}||_{W_2^1(Q)} + ||v_{xxxt}||_{L_2(Q)}.$$

Положим

$$\Phi = -a(x,t)w_{xx}(0,t) - a_t(x,t)[A(t) + B(t)w(0,t)]w(0,t) -$$

$$-[A(t)+B(t)w(0,t)]w_t(x,t)+b(x,t)w(0,t)-2a_t(x,t)w_t(0,t).$$

Пусть $\varepsilon$ есть произвольное положительное число. Рассмотрим задачу: найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике $Q$ решением уравнения

$$w_{tt}-w_{xx}-\varepsilon w_{xxt}=\widetilde{g}(x,t)+\Phi \qquad (10_\varepsilon)$$

и удовлетворяющую условиям (8) и (9).

Определим срезывающую функцию $G(\xi)$ следующим образом:

$$G(\xi)=\begin{cases}\xi, & |\xi|\le M_0,\\ M_0, & \xi>M_0,\\ -M_0, & \xi<-M_0,\end{cases}$$

где $M_0=\frac{\alpha_0}{B_0}$.

Пусть $W(x,t)$ есть заданная функция из пространства $V$.

Положим

$$\Phi_1(x,t,w,W(0,t))=-a(x,t)w_{xx}(0,t)-a_t(x,t)[A(t)+B(t)G(W(0,t))]w(0,t)-$$

$$-[A(t)+B(t)G(W(0,t))]w_t(x,t)+b(x,t)w(0,t)-2a_t(x,t)w_t(0,t).$$

Рассмотрим задачу: найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике $Q$ решением уравнения

$$w_{tt}-w_{xx}-\varepsilon w_{xxt}=\widetilde{g}(x,t)+\Phi_1 \qquad (10'_\varepsilon)$$

и удовлетворяющую условиям (8) и (9).

Далее при $\varepsilon$ фиксированном воспользуемся методом продолжения по параметру. Пусть $\lambda$ есть число из отрезка [0,1]. Рассмотрим задачу: найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике $Q$ решением уравнения

$$w_{tt}-w_{xx}-\varepsilon w_{xxt}=\widetilde{g}(x,t)+\lambda\Phi_1 \qquad (10'_{\varepsilon,\lambda})$$

и удовлетворяющую условиям (8) и (9).

Обозначим через $\Lambda$ множество тех чисел $\lambda$ из отрезка $[0,1]$, для которых краевая задача $(10'_{\varepsilon\lambda})$, (8), (9) разрешима в пространстве $V$ при произвольной функции $\widetilde{g}(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$.

Как известно, если множество $\Lambda$ не пусто, открыто и замкнуто одновременно, то оно совпадает со всем отрезком $[0,1]$. А это и будет означать, что краевая задача $(10'_{\varepsilon\lambda})$, (8), (9) имеет решение из пространства $V$.

Множество $\Lambda$ не пусто, поскольку число $\lambda=0$ принадлежит ему [4]. Доказательство открытости и замкнутости $\Lambda$ устанавливается при помощи априорных оценок решений задачи $(10'_{\varepsilon\lambda})$, (8), (9) из пространства $V$.

Пусть $Q_t$ есть прямоугольник $\{(x,\tau):x\in D,0<\tau<t,t\le T\}$.

Дифференцируя уравнение $(10'_{\varepsilon\lambda})$ по переменной $x$, получаем:

$$w_{xtt}-w_{xxx}-\varepsilon w_{xxxt}=\widetilde{g}_x(x,t)+\lambda\Phi_{1x}(x,t).$$

Умножая это уравнение на функцию $w_{xt}-(x-\frac{1}{2})w_{xx}-\varepsilon w_{xxxt}$, уравнение $(10'_{\varepsilon\lambda})$ на функцию $w_t(x,t)$, интегрируя по $Q_t=\{(x,\tau):x\in(0,1),0<\tau<t\}$, пользуясь леммой Гронуолла, приходим к априорной оценке

$$\int\limits_0^1[w_t^2(x,t)+w_x^2(x,t)+w^2(x,t)+w_{xt}^2(x,t)+w_{xx}^2(x,t)]dx+$$

$$+\varepsilon\int_0^t\int_0^1 w_{x\tau}^2dxd\tau+\varepsilon\int_0^1 w_{xxt}^2(x,t)dx+\int_0^t[w_{xx}^2(1,\tau)+w_{xx}^2(0,\tau)]d\tau+$$

$$+\varepsilon\int_0^1 w_{xxx}^2(x,t)dx+\varepsilon\int_0^t\int_0^1 w_{xx\tau}^2dxd\tau+\varepsilon^2\int_0^t\int_0^1 w_{xxx\tau}^2dxd\tau\le N, \tag{11}$$

где $N$ – постоянная, определяемая лишь входными данными задачи и числом $\varepsilon$.

Из данной оценки и следует открытость и замкнутость множества $\Lambda$. Как уже говорилось выше, непустота, открытость и замкнутость множества $\Lambda$ означают [7] его совпадение с отрезком $[0,1]$. Следовательно, краевая задача $(10_\varepsilon')$, (8), (9) разрешима в пространстве $V$.

Далее, оценка (11) позволяет применить метод неподвижной точки – именно, воспользоваться теоремой Шаудера. Краевая задача $(10_\varepsilon')$, (8), (9) порождает оператор $M$, переводящий пространство $V$ в себя: $M(W)=w$.

Из оценки (11) с помощью стандартных рассуждений (см., например [5, 6]) заключаем, что оператор $M$ будет переводить некоторое ограниченное множество пространства $V$ в себя и будет вполне непрерывным на нем.

Согласно теореме Шаудера, оператор $M$ будет иметь неподвижную точку в пространстве $V$: $M(w)=w$. Эта неподвижная точка $w(x,t)$ представляет собой решение уравнения

$$w_{tt}-w_{xx}-\varepsilon w_{xxt}=\widetilde{g}(x,t)+\Phi_1(x,t,w,w(0,t)), \tag{12}$$

удовлетворяющее условиям (8) и (9).

Перейдем теперь к осуществлению процедуры предельного перехода при $\varepsilon\to 0$ и в дальнейшем к построению решения задачи $(10_0)$.

Рассмотрим продифференцированное по $x$ уравнение (12), записанное в переменных $x,\tau$. Вновь умножим его на функцию $w_{x\tau}-(x-\frac{1}{2})w_{xx}-\varepsilon w_{xxx\tau}$ и проинтегрируем по области $Q_t$. После интегрирования по частям, применения неравенства Юнга, с учетом введенных обозначений и с использованием неравенства $A(t)+B(t)G(\zeta)\ge 0$, приходим к соотношению:

$$\frac{1}{4}\int_0^1[w_{xt}^2(x,t)+w_{xx}^2(x,t)]dx+\frac{1}{4}\int_0^t[w_{xx}^2(1,\tau)+w_{xx}^2(0,\tau)]d\tau+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 w_{xxt}^2(x,t)dx+\frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 w_{xxx}^2(x,t)dx+\varepsilon\int_0^t\int_0^1 w_{xx\tau}^2dxd\tau+\varepsilon^2\int_0^t\int_0^1 w_{xxx\tau}^2dxd\tau\le$$

$$\le\left(n_3+\frac{1}{2}\right)\int_0^t\int_0^1 w_{x\tau}^2dxd\tau+\left(n_2+\frac{5}{2}\right)\int_0^t\int_0^1 w_{xx}^2dxd\tau+ \tag{13}$$

$$+\frac{21}{32}\varepsilon^2\int_0^t\int_0^1 w_{xxx\tau}^2dxd\tau+n_4\int_0^t w_{xx}^2(0,\tau)d\tau+n_5\int_0^t w^2(0,\tau)d\tau+$$

$$+n_6\int_0^t w_\tau^2(0,\tau)d\tau+\int_0^t\int_0^1 B(\tau)G(w(0,\tau))w_{x\tau}\left\{(x-\frac{1}{2})w_{xx}\right\}dxd\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^1 a_{x\tau}(x,\tau)B(\tau)G(w(0,\tau))w(0,\tau)\left\{w_{x\tau}-(x-\frac{1}{2})w_{xx}-\varepsilon w_{xxx\tau}\right\}dxd\tau+K_1,$$

где $K_1$ – постоянная, определяемая лишь входными данными задачи.

Умножим равенство (12) на функцию $w_t(x,t)$ и проинтегрируем по цилиндру $Q_t$. Интегрируя по частям, применяя неравенство Юнга, приходим к соотношению:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 [w_t^2(x,t)+w_x^2(x,t)+w^2(x,t)]dx+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{x\tau}^2 dxd\tau \leq \widetilde{n_1}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_\tau^2 dxd\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w^2 dxd\tau+\frac{1}{32}\int\limits_0^t w_{xx}^2(0,\tau)d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_0^t w^2(0,\tau)d\tau+\int\limits_0^t w_\tau^2(0,\tau)d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_\tau(x,\tau)B(\tau)G(w(0,\tau))w(0,\tau)w_\tau dxd\tau+K_2, \tag{14}$$

где $K_2$ – постоянная, определяемая лишь входными данными задачи.

Сложим неравенства (13) и (14). Получим:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 [w_t^2(x,t)+w_x^2(x,t)+w^2(x,t)]dx+\frac{1}{4}\int\limits_0^1 [w_{xt}^2(x,t)+w_{xx}^2(x,t)]dx+$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_0^t [w_{xx}^2(1,\tau)+w_{xx}^2(0,\tau)]d\tau+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{x\tau}^2 dxd\tau+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^1 [w_{xxt}^2(x,t)+w_{xxx}^2(x,t)]dx+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xx\tau}^2 dxd\tau+\varepsilon^2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xxx\tau}^2 dxd\tau \leq$$

$$\leq \widetilde{n_1}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_\tau^2 dxd\tau+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w^2 dxd\tau+\left(n_4+\frac{1}{32}\right)\int\limits_0^t w_{xx}^2(0,\tau)d\tau+$$

$$+\left(n_3+\frac{1}{2}\right)\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{x\tau}^2 dxd\tau+\left(n_2+\frac{5}{2}\right)\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xx}^2 dxd\tau+\frac{21\varepsilon^2}{32}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xxx\tau}^2 dxd\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_\tau(x,\tau)B(\tau)G(w(0,\tau))w(0,\tau)w_\tau(x,\tau)dxd\tau+ \tag{15}$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 B(\tau)G(w(0,\tau))w_{x\tau}(x-\frac{1}{2})w_{xx}dxd\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_{x\tau}(x,\tau)B(\tau)G(w(0,\tau))w(0,\tau)\left(w_{x\tau}-(x-\frac{1}{2})w_{xx}-\varepsilon w_{xxx\tau}\right)dxd\tau+$$

$$+\left(n_5+\frac{1}{2}\right)\int\limits_0^t w^2(0,\tau)d\tau+(n_6+1)\int\limits_0^t w_\tau^2(0,\tau)d\tau+R_1.$$

Рассмотрим по отдельности последние пять интегральных слагаемых неравенства (15). Обозначим

$$J_1 = -\int\limits_0^t \int\limits_0^1 a_\tau(x,\tau)B(\tau)G(w(0,\tau))w(0,\tau)w_\tau(x,\tau)dxd\tau.$$

Поскольку $|G(\xi)| \le |\xi|$, то

$$|J_1| \le \max_{\overline{Q}} |a_t(x,t)| B_0 \int\limits_0^t w^2(0,\tau) \int\limits_0^1 |w_\tau| dxd\tau.$$

Воспользуемся неравенством, приведенным перед формулировкой теоремы. Имеем

$$w^2(0,\tau) \le 2d_0^2 \int\limits_0^1 w_x^2(x,\tau)dx + \left(1 + \frac{2}{d_0^2}\right) \int\limits_0^1 w^2(x,\tau)dx. \tag{16}$$

Отсюда

$$|J_1| \le s_1 \int\limits_0^t \left[ 2d_0^2 \int\limits_0^1 w_x^2(x,\tau)dx + \left(1 + \frac{2}{d_0^2}\right) \int\limits_0^1 w^2(x,\tau)dx \right] \cdot \left(|w_\tau| dx\right) d\tau.$$

Применяя неравенство Гельдера, получим

$$|J_1| \le s_1 \int\limits_0^t \left[ 2d_0^2 \int\limits_0^1 w_x^2(x,\tau)dx + \left(1 + \frac{2}{d_0^2}\right) \int\limits_0^1 w^2(x,\tau)dx \right] \cdot \left( \int\limits_0^1 w_\tau^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} d\tau.$$

Обозначим

$$y(t) = \int\limits_0^1 [w^2(x,t) + w_t^2(x,t) + w_x^2(x,t) + w_{xx}^2(x,t) + w_{xt}^2(x,t)]dx.$$

Тогда

$$|J_1| \le s_1 \left( 2d_0^2 + 1 + \frac{2}{d_0^2} \right) \int\limits_0^t y(\tau) y^{\frac{1}{2}}(\tau) d\tau = s_1 \left( 2d_0^2 + 1 + \frac{2}{d_0^2} \right) \int\limits_0^t y^{\frac{3}{2}}(\tau) d\tau.$$

Аналогичным образом можно оценить слагаемые $J_2$ и $J_3$:

$$J_2 = -\int\limits_0^t \int\limits_0^1 a_{x\tau}(x,\tau)B(\tau)G(w(0,\tau))w(0,\tau) \left( w_{x\tau} - (x - \frac{1}{2})w_{xx} - \varepsilon w_{xxx\tau} \right) dxd\tau.$$

$$|J_2| \le \frac{3}{2} s_2 (2d_0^2 + 1 + \frac{2}{d_0^2}) \int\limits_0^t y^{\frac{3}{2}}(\tau) d\tau +$$

$$+16 s_2 \left[ 4d_0^4 + \left(1 + \frac{2}{d_0^2}\right)^2 \right] \int\limits_0^t y^2(\tau) d\tau + \frac{s_2}{32} \varepsilon^2 \int\limits_0^t \int\limits_0^1 w_{xxx\tau}^2 dxd\tau.$$

$$|J_3| = \left| \int\limits_0^t \int\limits_0^1 B(\tau)G(w(0,\tau))w_{x\tau}(x-\frac{1}{2})w_{xx}dxd\tau \right| \leq \frac{1}{2}B_0\left[\sqrt{2}d_0 + \sqrt{1+\frac{2}{d_0^2}}\right]\int\limits_0^t y^{\frac{3}{2}}d\tau.$$

Последние два слагаемых неравенства (15) оцениваются следующим образом

$$\int\limits_0^t w^2(0,\tau)d\tau \leq 2d_0^2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_x^2dxd\tau + \left(1+\frac{2}{d_0^2}\right)\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w^2dxd\tau,$$

$$\int\limits_0^t w_\tau^2(0,\tau)d\tau \leq 2d_0^2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{x\tau}^2dxd\tau + \left(1+\frac{2}{d_0^2}\right)\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_\tau^2dxd\tau.$$

С учетом проделанных выкладок от (15) нетрудно перейти к неравенству

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1[w_t^2(x,t)+w_x^2(x,t)+w^2(x,t)]dx + \frac{1}{4}\int\limits_0^1[w_{xt}^2(x,t)+w_{xx}^2(x,t)]dx+$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_0^t w_{xx}^2(1,\tau)d\tau + r_1\int\limits_0^t w_{xx}^2(0,\tau)d\tau + \varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{x\tau}^2dxd\tau+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^1[w_{xxt}^2(x,t)+w_{xxx}^2(x,t)]dx + \varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xx\tau}^2dxd\tau + \varepsilon^2 r\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xxx\tau}^2dxd\tau \leq$$

$$\leq r_4\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_\tau^2dxd\tau + r_2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w^2dxd\tau + r_3\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{x\tau}^2dxd\tau+ \tag{17}$$

$$+\left(n_2+\frac{5}{2}\right)\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_{xx}^2dxd\tau + 2d_0^2\left(n_5+\frac{1}{2}\right)\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_x^2dxd\tau+$$

$$+k_1\int\limits_0^t y^{\frac{3}{2}}(\tau)d\tau + k_2\int\limits_0^t y^2(\tau)d\tau + R_1.$$

В силу условий теоремы следствием этого неравенства может служить следующее соотношение

$$y(t) \leq c_1\int\limits_0^t y(\tau)d\tau + c_2\int\limits_0^t y^{\frac{3}{2}}(\tau)d\tau + c_3\int\limits_0^t y^2(\tau)d\tau + c_0. \tag{18}$$

Оценивая первое и второе слагаемые соотношения (18) с помощью неравенства Юнга, получаем

$$y(t) \leq A_1\int\limits_0^t y^2(\tau)d\tau + A_0. \tag{19}$$

Воспользуемся обобщенной леммой Гронуолла, или леммой Бихари [8], согласно которой функция $y(t)$ из соотношения (19) будет ограничена сверху некоторой функцией $z(t)$, являющейся решением дифференциального уравнения $z'(t) = A_1z^2$ и удовлетворяющей начальному условию $z(0) = A_0$.

Решением данного дифференциального уравнения является функция $z(t) = A_0 \cdot (1 - A_1 t A_0)^{-1}$.

При $T < T^*$ имеем $z(t) \leq A_0 \cdot (1 - A_1 T A_0)^{-1} = A$, и далее $y(t) \leq z(T)$.

Вспоминая (17), получим окончательную оценку

$$y(t) + \int\limits_0^t w_{xx}^2(1,\tau)d\tau + 4r_1 \int\limits_0^t w_{xx}^2(0,\tau)d\tau + 4\varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_0^1 w_{x\tau}^2 dx d\tau +$$

$$+2\varepsilon \int\limits_0^1 [w_{xxt}^2(x,t) + w_{xxx}^2(x,t)]dx + 4\varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_0^1 w_{xx\tau}^2 dx d\tau + 4r\varepsilon^2 \int\limits_0^t \int\limits_0^1 w_{xxx\tau}^2 dx d\tau \leq$$

$$\leq c_1 T z(T) + c_2 T z^{\frac{3}{2}}(T) + c_3 T z^2(T) + c_0 = R. \tag{20}$$

Из оценки (20), свойства рефлексивности гильбертова пространства [7], теорем вложения и теоремы о возможности выбора из последовательности, сходящейся сильно, подпоследовательности, сходящейся почти всюду [9], следует, что при выполнении условий теоремы существуют числовая последовательность $\{\varepsilon_m\}$, функциональная последовательность $\{w_m(x,t)\}$ решений задачи ($10'_{\varepsilon_m}$), (8), (9) и функция $w(x,t)$ такие, что при $m \to \infty$ имеют место сходимости $\varepsilon_m \to 0$, $w_m(x,t) \to w(x,t)$ слабо в пространстве $W_2^2(Q)$, $w_m(0,t) \to w(0,t)$ почти всюду на отрезке $[0,T]$, $\varepsilon_m w_{mxxt}(x,t) \to 0$ слабо в пространстве $L_2(Q)$. Очевидно, что для функции $w(x,t)$ будут выполняться уравнение ($10'_0$) и условия (8) и (9).

Имеет место неравенство

$$|w(0,t)| \leq \left\{ \sqrt{2} d_0 + \sqrt{1 + \frac{2}{d_0^2}} \right\} z(T).$$

Из этого неравенства и из условия (6) теоремы следует, что для функции $w(x,t)$ выполняется уравнение ($10_0$).

С учетом вида $z(T)$, условия (6) теоремы, получим, что $G(w(0,t)) = w(0,t)$, в силу чего придем к решению задачи (7) – (9).

Определим функцию $v(x,t)$: $v(x,t) = w(x,t) + a(x,t)w(0,t)$. Очевидно, что для функции $v(x,t)$ выполняется уравнение

$$v_{tt} - v_{xx} + [A(t) + B(t)v(0,t)]v_t = f_{xx},$$

а также условия

$$v_x(0,t) = \alpha_1(t)v(0,t), \quad v_x(1,t) = \beta_1(t)v(0,t),$$

$$v(x,0) = u_0''(x), \quad v_t(x,0) = u_1''(x).$$

Определим функцию $u(x,t)$ как решение задачи Коши

$$u_{xx}(x,t) = v(x,t), \quad u(0,t) = \mu(t), \quad u_x(0,t) = \varphi_0(t).$$

Обозначим $w_1(x,t) = u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + [A(t) + B(t)u_{xx}(0,t)]u_t(x,t) - f(x,t)$.

Для этой функции имеют место равенства

$$w_{1xx}(x,t) = 0, \quad w_1(0,t) = w_{1x}(0,t) = 0.$$

Следовательно, $w_1(x,t)$ есть тождественно нулевая функция.

Положим $q(t) = A(t) + B(t)u_{xx}(0,t)$. Очевидно, что функции $u(x,t)$ и $q(t)$ связаны в прямоугольнике $Q$ уравнением (1). Выполнение условий (2) для функции $u(x,t)$ очевидно. Покажем, что выполняется условие $u_x(1,t) = \psi_0(t)$.

Положим $\Phi(t) = u_x(1,t) - \psi_0(t)$. Имеет место равенство

$$\Phi^{''}(t) + q(t)\Phi^{'}(t) = 0.$$

Из этого равенства и из условий $\Phi(0) = \Phi^{'}(0) = 0$ (следующих из условий согласования) вытекает, что функция $\Phi(t)$ есть тождественно нулевая функция. А это и означает, что выполняется условие $u_x(1,t) = \psi_0(t)$.

Принадлежность функций $u(x,t)$ и $q(t)$ требуемым классам очевидна. Таким образом, найденные функции $u(x,t)$ и $q(t)$ дают требуемое решение искомой обратной задачи. Теорема доказана. □

Определим класс $W_1$:

$$W_1 = \{\{u(x,t), q(t)\} : u(x,t) \in V, u_x(x,t) \in V, u_{xx}(x,t) \in V, q(t) \in L_\infty([0,T]), q(t) \geq 0\}.$$

**Теорема 2.** *Пусть для функций $f(x,t)$, $\varphi_0(t)$, $\psi_0(t)$, $\mu(t)$, $u_0(x)$ и $u_1(x)$ выполняются все условия теоремы 1. Тогда в множестве $W_1$ обратная задача (1) – (4) не может иметь более одного решения.*

*Доказательство.* Предположим, что обратная задача (1) – (4) имеет в множестве $W_1$ два решения $\{u_1(x,t), q_1(t)\}$ и $\{u_2(x,t), q_2(t)\}$.

Положим $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$, $q(t) = q_1(t) - q_2(t)$. Для функции $u(x,t)$ выполняются равенства

$$u_{tt} - u_{xx} + q_1(t)u_t + \frac{1}{\mu'(t)}u_{xx}(0,t)u_{2t} = 0, \tag{21}$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0.$$

Дифференцируя уравнение (21) по переменной $x$, полагая в полученном равенстве сначала $x = 0$, затем $x = 1$, получаем условия

$$u_{xxx}(0,t) = \alpha_1(t)u_{xx}(0,t), \quad u_{xxx}(1,t) = \beta_1(t)u_{xx}(0,t).$$

Произведем повторное дифференцирование по переменной $x$.

Положим

$$v(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad \varphi(t) = \alpha_1(t)u_{xx}(0,t), \quad \psi(t) = \beta_1(t)u_{xx}(0,t).$$

Придем к функции $v(x,t)$, для которой будут выполняться следующие равенства

$$v_{tt} - v_{xx} + q_1(t)v_t = -\frac{1}{\mu'(t)}v(0,t)v_{2t}, \quad v_x(0,t) = \varphi(t), \quad v_x(1,t) = \psi(t), \quad v(x,0) = v_t(x,0) = 0.$$

Положим $v_0(x,t) = \frac{x^2}{2}[\psi(t) - \varphi(t)] + x\varphi(t)$.

$$w(x,t) = v(x,t) - v_0(x,t),$$

$$b(x,t) = -a(x,t)a_{xx}(0,t) + \frac{a(x,t)}{\mu'(t)}v_{2t}(0,t) - a_{tt}(x,t) +$$

$$+ a_{xx}(x,t) - q_1(t)a_t(x,t) - \frac{1}{\mu'(t)}v_{2t}(x,t).$$

Имеют место равенства

$$w_{tt} - w_{xx} + q_1(t)w_t = -a(x,t)w_{xx}(0,t) - 2a_t(x,t)w_t(0,t) + b(x,t)w(0,t), \tag{22}$$

$$w_x(1,t) = w_x(0,t) = 0, \tag{23}$$

$$w(x,0) = w_t(x,0) = 0. \tag{24}$$

Дифференцируя равенство (22) по переменной $x$, умножая на функцию $w_{xt} - (x - \frac{1}{2})w_{xx}$, интегрируя по $Q_t$, используя условия (23), (24), применяя неравенство Юнга, получим

$$\frac{1}{4}\int\limits_0^1 [w_{xt}^2(x,t) + w_{xx}^2(x,t)]dx + \frac{1}{4}\int\limits_0^t [w_{xx}^2(1,\tau) + w_{xx}^2(0,\tau)]d\tau \le$$

$$\le p_1 \int\limits_0^t \int\limits_0^1 w_{x\tau}^2 dx d\tau + p_2 \int\limits_0^t \int\limits_0^1 w_{xx}^2 dx d\tau + \frac{3\delta_1^2}{4}\int\limits_0^t w_{xx}^2(0,\tau)d\tau +$$

$$+ \frac{3}{2}\int\limits_0^t w_\tau^2(0,\tau)d\tau + \frac{3}{4}\int\limits_0^t w^2(0,\tau)d\tau, \tag{25}$$

где $\delta_1 > 0$,
$p_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\max\limits_{[0,T]} q_1(t) + \frac{1}{2\delta_1^2}\max\limits_{\overline{Q}} a_x^2(x,t) + \max\limits_{\overline{Q}} a_{xt}^2(x,t) + \frac{1}{2}\max\limits_{\overline{Q}} b_x^2(x,t)$,
$p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\max\limits_{[0,T]} q_1(t) + \frac{1}{4\delta_1^2}\max\limits_{\overline{Q}} a_x^2(x,t) + \frac{1}{2}\max\limits_{\overline{Q}} a_{xt}^2(x,t) + \frac{1}{4}\max\limits_{\overline{Q}} b_x^2(x,t)$ – некоторые ограниченные величины.

Умножим равенство (22) на $w_t$, проинтегрируем по $Q_t$.

Используя условия (24), получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 [w_t^2(x,t) + w_x^2(x,t) + w^2(x,t)]dx \le p_3 \int\limits_0^t \int\limits_0^1 w_\tau^2 dx d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \int\limits_0^1 w^2 dx d\tau +$$

$$+ \frac{\delta_1^2}{2}\int\limits_0^t w_{xx}^2(0,\tau)d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_0^t w^2(0,\tau)d\tau + \int\limits_0^t w_\tau^2(0,\tau)d\tau, \tag{26}$$

где $p_3 = \frac{1}{2} + \max\limits_{[0,T]} q_1(t) + \frac{1}{2\delta_1^2}\max\limits_{\overline{Q}} a^2(x,t) + \max\limits_{\overline{Q}} a_t^2(x,t) + \frac{1}{2}\max\limits_{\overline{Q}} b^2(x,t)$ – некоторая ограниченная величина.

Сложим соотношения (25) и (26). Применяя неравенство (16), взяв $\delta_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}$, имеем

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 [w_t^2(x,t) + w_x^2(x,t) + w^2(x,t)]dx + \frac{1}{4}\int\limits_0^1 [w_{xt}^2(x,t) + w_{xx}^2(x,t)]dx +$$

$$+ \frac{1}{8}\int\limits_0^t [w_{xx}^2(0,\tau)]d\tau + \frac{1}{4}\int\limits_0^t w_{xx}^2(1,\tau)]d\tau \le s \int\limits_0^t \int\limits_0^1 [w^2 + w_x^2 + w_\tau^2 + w_{x\tau}^2 + w_{xx}^2]dx d\tau,$$

где $p_4 = \frac{9}{4} + \frac{5}{2d_0^2}$, $p_5 = \frac{5}{2}d_0^2$, $p_6 = p_3 + \frac{5}{2} + \frac{5}{d_0^2}$, $p_7 = p_1 + 5d_0^2$, $s = \max\{p_2, p_4, p_5, p_6, p_7\}$ – некоторые ограниченные величины.

Из этого неравенства и леммы Гронуолла следует оценка

$$\int_0^1 [w_t^2(x,t) + w_x^2(x,t) + w^2(x,t) + w_{xx}^2(x,t) + w_{xt}^2(x,t)]dx \leq 0.$$

Отсюда $w(x,t) \equiv 0$ в $Q$. Следовательно, с учетом вида функции $w(x,t)$, $w(x,t) = v(x,t) - v_0(x,t) \equiv 0$, т.е. $v(x,t) \equiv v_0(x,t)$.

При $x = 0$ имеем $v_0(0,t) \equiv 0$, а значит и $v(0,t) \equiv 0$.

Таким образом, получаем, что функция $v(x,t)$ является решением уравнения

$$v_{tt} - v_{xx} + q_1(t)v_t = 0,$$

и для нее выполняются условия

$$v_x(0,t) = v_x(1,t) = 0, \quad v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = 0.$$

Решением этой задачи является тождественно нулевая функция: $v(x,t) \equiv 0$. Это равносильно тому, что $u_{xx}(x,t) \equiv 0$. Граничные условия (21) дают тождество $u(x,t) \equiv 0$. Таким образом $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$. При этом $q_1(t) \equiv q_2(t)$. Теорема доказана. □

Сделаем несколько замечаний.

**Замечание 1.** Точное значение чисел $r_1$, $r$ и т.д. во многом определяется тем, как автор подбирает коэффициенты в неравенстве Юнга. При ином, нежели у автора, выборе эти числа изменятся.

**Замечание 2.** Условия $\varphi_0''(t) + A(t)\varphi_0'(t) - f_x(0,t) \equiv 0$, $\psi_0''(t) + A(t)\psi_0'(t) - f_x(1,t) \equiv 0$ не являются принципиальными; если эти функции не тождественно нулевые, то лишь незначительно изменятся выкладки.

**Замечание 3.** Переход от неравенства (18) к неравенству (19) выполнен лишь для удобства (именно, для точного определения числа $T^*$). На самом деле вполне возможно сразу к неравенству (18) применить обобщенную лемму Гронуолла.

**Замечание 4.** Выбор параметра $M_0$ при построении функции $G(\varepsilon)$ определяется желанием получить неизвестный коэффициент $q(t)$ неотрицательным (что соответствует свойству неотрицательности диссипации). От условия неотрицательности $q(t)$ можно отказаться, параметр $M_0$ можно считать произвольным, при получении неравенства (18) нужно будет учитывать большее число слагаемых в правой части, и число $T^*$, вообще говоря, увеличится.

## Литература

1. Валитов, И.Р. Обратные задачи для гиперболических уравнений: случай неизвестных коэффициентов, зависящих от времени / И.Р. Валитов, А.И. Кожанов // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. – 2006. – Т. 6, № 1. – С. 3–18.
2. Валитов, И.Р. О разрешимости двух обратных задач для гиперболических уравнений / И.Р. Валитов // Тр. Стерлитамак. филиала Акад. наук республики Башкортостан. Сер. Физико-математические и технические науки. – 2006. – № 3. – С. 64–73.
3. Павлов, С.С. Нелинейные обратные задачи для многомерных гиперболических уравнений с интегральным переопределением / С.С. Павлов // Мат. заметки ЯГУ. – 2011. – Т. 19, № 2. – С. 128–154.

4. Якубов, С.Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения / С.Я. Якубов. – Баку: Элм, 1985.

5. Кожанов, А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи / А.И. Кожанов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44, № 4. – С. 694–716.

6. Кожанов, А.И. О разрешимости некоторых нелинейных обратных задач для уравнений составного типа / А.И. Кожанов // Тр. III междун. конф. «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы биологии, информатики, физики». – Нальчик, 2006. – № 5. – С. 42–51.

7. Треногин, В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980. – 488 с.

8. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

9. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1973. – 578 с.

Регина Рафаиловна Сафиуллова, кандидат физико-математических наук, кафедра «Алгебра, геометрия и методика обучения математике», Башкирский государственный университет (г. Стерлитамак, Российская Федерация), regina-saf@yandex.ru.

**Bulletin of the South Ural State University.**
**Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»,**
**2013, vol. 6, no. 4, pp. 73–86.**

**MSC 35R30**

# Inverse Problems for the Second Order Hyperbolic Equation with Unknown Time Depended Coefficient

***R.R. Safiullova,*** Bashkortostan State University, Sterlitamak, Russian Federation, regina-saf@yandex.ru

We analyze the solvability of the inverse problem with an unknown time depended coefficient for a second-order hyperbolic equation. We also study uniqueness of the problem solution. The problem is stated as follows: it is required to find a solution and an unknown coefficient of the equation. Here the problem is considered in a rectangle area, with a set conditions being typical of the first boundary-value problem and an overdetermination condition being necessary of the unknown coefficient searching. To study solvability of the inverse problem, we realize a conversion from the initial problem to a some direct supplementary problem with trivial boundary conditions. We prove the solvability of the supplementary problem in the class of the functions considered above. Then we realize a conversion to the first problem again and as a result we receive the solvability of the inverse problem. To prove solvability of the problem, we use the method of continuation on a parameter, fixed point theorem, cut-off functions, and the method of regularization. In the article we prove the theorems of the existence and the uniqueness of the problem solution in the class of the functions considered above.

*Keywords: inverse problem; hyperbolic equation; weighted equation; continuation method on parameter; method of a motionless point; regularization method.*

## References


1. Valitov I.R., Kozhanov A.I. Inverse Problems for Hyperbolic Equations: Unknown Time Depended Coefficients Case [Obratnye zadachi dlya giperbolicheskikh uravneniy: sluchay neizvestykh koeffitsientov, zavisyashchikh ot vremeni]. *Vestnik NGU, Ser. Matematika, mekhanika, informatika*, 2006, vol. 6, no. 1, pp. 3–18.
2. Valitov I.R. On Solvability Two Inverse Problems for Hyperbolic Equations [O razreshimosti dvukh obratnykh zadach dlya giperbolicheskikh uravneniy]. *Trudy Sterlitamakskogo filiala Akademii nauk respubliki Bashkortostan, Ser. Fiziko-matematicheskie i tekhnicheskie nauki*, 2006, no. 3, pp. 64–73.
3. Pavlov S.S. Nolinear Inverse Problems for Many-Dimensional Hyperbolic Equations with Integral Overdetermination [Nelineynye obratnye zadachi dlya mnogomernykh giperbolicheskikh uravneniy s integral'nym pereopredeleniem]. *Matematicheskie zametki YaGU*, 2011, vol. 19, no. 2, pp. 128–154.
4. Yakubov S.Ya. *Lineynye differentsial'no-operatornye uravneniya i ikh prilozheniya* [Linear Differential-Operated Equations and It's Applications]. Baku, ELM, 1985. 220 p.
5. Kozhanov A.I. Nonlinear Weighted Equations and Inverse Problems [Nelineynye nagruzhennye uravneniya i obratnye zadachi]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*, 2004, vol. 44, no. 4, pp. 694–716.
6. Kozhanov A.I. On Solvability Some Nonlinear Inverse Problems for Composite Type Equations [O razreshimosti nekotorykh nelineynykh obratnykh zadach dlya uravneniy sostavnogo tipa]. *Trudy mezhdunarodnoy konferentsii ≪Nelokal'nye kraevye zadachi i rodstvennye problemy biologii, informatiki, fiziki≫*. Nalchik, 2006, no. 5, pp. 42–51.
7. Trenogin V.A. *Funktsianal'nyy analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka, 1980, 488 p.
8. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti* [Lectures on the Mathematical Theory of Stability]. Moscow, Nauka, 1967, 472 p.
9. Ladyzhenskaya, O.A., Ural'tseva N.N. *Lineynye i kvazilineynye uravneniya ellipticheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Elliptic Equations]. Moscow, Nauka, 1973, 578 p.


*Поступила в редакцию 24 июля 2013 г.*