УДК 517.9

СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ПОЛУЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

С.А. Загребина, М.М. Якупов

EXISTENCE AND STABILITY OF SOLUTIONS OF ONE CLASS OF SEMILINEAR SOBOLEV-TYPE EQUATIONS

S.A. Zagrebina, M.M. Yakupov

Изучена однозначная разрешимость задачи Коши для полулинейного уравнения Соболевского типа с относительно p-секториальным оператором и устойчивость решений этого уравнения в окрестности точки нуль в случае, когда оператор при производной необратим, в частности, его ядро нетривиально. В качестве конкретной интерпретации абстрактных результатов рассмотрена задача термоконвекции для уравнения Осколкова, моделирующего динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости.

Ключевые слова: уравнение Осколкова, уравнения Соболевского типа, относительно p-секториальный оператор, существование и устойчивость решений

The authors analyses the unique solvability of the Cauchy problem for the semilinear Sobolev type equation with a relatively p-sectorial operator, and the stability of solutions of this equation about a point of the origin of coordinates in case of the irreversibility of the operator under derivative, particularly when its core is nontrivial as an example of the results, the thermoconvection problem for the Oskolkov equation modeled dynamic of incompressible visco-elastic fluid is considered.

Keywords: Oskolkov equation, Sobolev type equation, relatively p-sectorial operator, existence and stability of solutions

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства; операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линеен и непрерывен), $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линеен, замкнут и плотно определен), $N \in C^\infty(\mathfrak{U}_\alpha;\mathfrak{F})$. Здесь $\mathfrak{U}_\alpha$ – банахово пространство, причем вложение $\mathfrak{U}_\alpha \hookrightarrow \mathfrak{U}$ плотно и непрерывно. Рассмотрим полулинейное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + N(u). \tag{1}$$

Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$, то уравнение (1) тривиально редуцируется к уравнению

$$\dot{u} = Su + F(u), \tag{2}$$

где операторы $S \in L^{-1}M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U})$, $F \in L^{-1}N \in C^\infty(\mathfrak{U}_\alpha;\mathfrak{U})$. Если вдобавок

(A) оператор S секториален, то при любом $u_0 \in \mathfrak{U}_\alpha$ и некотором $\tau \in \mathbb{R}_+$, $\tau = \tau(u_0)$, существует единственное решение $u \in C^\infty((0,\tau);\mathfrak{U})$ задачи Коши $u(0) = u_0$ для уравнения (2) [1], п. 3.3;

(B) спектр $\sigma(S)$ оператора S таков, что $\sigma(S)\cap\{i\mathbb{R}\} = \emptyset$, а оператор F таков, что $F(0) = 0$ и $F_0' = \mathbb{O}$, то в некоторой окрестности точки нуль существуют устойчивое и неустойчивое многообразия уравнения (2) [1], п. 5.2.

Нашей целью является изучение однозначной разрешимости задачи Коши для уравнения (1), а также устойчивости решений уравнения (1) в окрестности точки нуль в случае, когда оператор L необратим, в частности, его ядро $\ker L \neq \{0\}$. При выборе цели мы руководствовались не столько желанием пополнить теорию, сколько стремлением осмыслить начально-краевые задачи для неклассических уравнений математической физики, возникающих в последнее время в приложениях. Именно, в качестве конкретной интерпретации общих результатов мы рассмотрим задачу термоконвекции для уравнения Осколкова, моделирующего динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости.

Трудности, которые нас ожидают как при изучении абстрактного уравнения (1), так и при изучении его конкретных интерпретаций, были отмечены еще первопроходцами [2, 3]. Это, во-первых, несуществование решений задачи Коши для уравнения (1) при любых начальных данных пусть даже из плотного в $\mathfrak{U}$ множества, а во-вторых, сильная неустойчивость решений уравнения (1). Данные трудности отмечались и преодолевались разными исследователями по-разному (см. далеко не полный перечень монографий [4 – 8], которые большей частью посвящены изучению линейных уравнений соболевского типа вида

$$L\dot{u} = Mu \tag{3}$$

в различных аспектах). Однако первое удовлетворительное объяснение несуществования и неустойчивости решений задачи Коши для линейных уравнений (3) дано в монографии [9]. Несуществование решений объясняется тем, что уравнение (3) необходимо рассматривать не на всем пространстве $\mathfrak{U}$, а на некотором его подмножестве, понимаемом как фазовое пространство. Неустойчивость объясняется расщеплением фазового пространства на инвариантные пространства, порождающие дихотомии решений. Инвариантные пространства соответствуют расщеплению L-спектра оператора M.

Успех в линейном случае был обусловлен тем обстоятельством, что фазовым пространством уравнения (3) служит подпространство в $\mathfrak{U}$. Поэтому был начат поиск таких полулинейных уравнений (1), фазовые пространства которых диффеоморфны некоторому подпространству в $\mathfrak{U}$ [10 – 13]. Затем для этих фазовых пространств при условии (L,p)-ограниченности оператора M было получено обобщение утверждения B для уравнения (1) [14, 15]. Кстати сказать, в [16] предложено утверждения вида B называть «теоремой Адамара – Перрона». Мы будем придерживаться этого термина и докажем теорему Адамара – Перрона для уравнения (1) в случае, когда оператор M (L,p)-секториален.

Статья организована следующим образом. В п. 1 представлены результаты гл. 3 и гл. 5 монографии [9], адаптированные к нашей ситуации. В п. 2 вводится понятие квазистационарной полутраектории и выясняется роль квазистационарной полутраектории в формировании фазового пространства и устойчивого и неустойчивого инвариантных многообразий. В п. 3 показывается существование устойчивого и неустойчивого инвариантных многообразий полулинейной задачи термоконвекции.

1. Относительно p-секториальные операторы

Введем в рассмотрение L-резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ и L-спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M. Нетрудно показать, что множество $\rho^L(M)$ всегда открыто, поэтому множество $\sigma^L(M)$ всегда замкнуто. Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$, тогда можно определить *правую* и *левую* p-резольвенты оператора M $R^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^{p} R^L_{\mu_q}(M)$,

$L^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^p L^L_{\mu_q}(M)$, где $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$, а точки $\mu_q \in \rho^L(M)$, $q \in \{0, 1, \dots, p\}$.

Определение 1. Оператор M называется *(L,p)-секториальным*, если

(i) существуют константы $a \in \mathbb{R}$ и $\Theta \in (\pi/2, \pi)$ такие, что сектор $S^L_{a,\Theta}(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \Theta, \quad \mu \neq a\} \subset \rho^L(M)$,

(ii) существует константа $K \in \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\max\left\{\left\|R^L_{(\mu,p)}(M)\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \left\|L^L_{(\mu,p)}(M)\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\right\} \leq \frac{K}{\prod\limits_{q=0}^{p} |\mu_q - a|}$$

при любых $\mu_q \in S^L_{a,\Theta}(M)$, $q \in \{0, 1, \dots, p\}$.

Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$, введем в рассмотрение уравнения

$$R^L_\alpha(M)\dot{u} = (\alpha L - M)^{-1}Mu, \tag{4}$$

$$L^L_\alpha(M)\dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1}f, \tag{5}$$

где $\alpha \in \rho^L(M)$.

Теорема 1. [1] *Пусть оператор M (L,p)-секториален, тогда существует аналитическая разрешающая полугруппа уравнения (4) (уравнения (5)).*

Искомые полугруппы задаются несобственными интегралами типа Данфорда - Тейлора соответственно

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \quad F^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma L^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu,$$

где $t \in \mathbb{R}_+$, контур $\Gamma \subset S^L_{a,\Theta}(M)$ такой, что $|\arg\mu| \to \Theta$ при $\mu \to \infty$, $\mu \in \Gamma$.

Введем в рассмотрение ядра полугрупп $U^\cdot = \{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ и $F^\cdot = \{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, $\ker U^\cdot = \{\varphi \in \mathfrak{U} : U^t\varphi = 0 \ \exists t \in \mathbb{R}_+\}$ и $\ker F^\cdot = \{\psi \in \mathfrak{F} : F^t\psi = 0 \ \exists t \in \mathbb{R}\}$. Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker U^\cdot$, $\mathfrak{F}^0 = \ker F^\cdot$ и через L_0 (M_0) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^0$ $(\mathfrak{U}^0 \cap \operatorname{dom} M)$.

Лемма 1. *Пусть оператор M (L,p)-секториален, тогда*

(i) оператор $L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$;

(ii) оператор $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$, причем существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$.

Построим оператор $G = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$. Нетрудно показать, что оператор G нильпотентен степени p. Введем в рассмотрение образы $\operatorname{im} U^\cdot = \{u \in \mathfrak{U} : \lim\limits_{t\to 0+} U^t u = u\}$ и $\operatorname{im} F^\cdot = \{f \in \mathfrak{F} : \lim\limits_{t\to 0+} F^t f = f\}$ полугрупп $U^\cdot$ и $F^\cdot$ соответственно. Положим $\mathfrak{U}^1 = \operatorname{im} U^\cdot$, $\mathfrak{F}^1 = \operatorname{im} F^\cdot$ и через L_1 (M_1) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^1$ $(\mathfrak{U}^1 \cap \operatorname{dom} M)$.

Лемма 2. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален, тогда*

(i) оператор $L_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$, оператор $M_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$.

(ii) $\overline{\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\overline{\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$.

Рассмотрим линейное уравнение (3). *Решением уравнения (3)* назовем вектор-функцию $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathfrak{U})$, удовлетворяющую ему. Как нетрудно убедиться, полугруппа $U^\cdot$ (см (6)) является разрешающей полугруппой уравнения (3).

Определение 2. Множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ называется *фазовым пространством* уравнения (3), если

(i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (3) лежит в $\mathfrak{P}$ как полутраектория (т.е. $u(t) \in \mathfrak{P}$, $t \in \mathbb{R}_+$);

(ii) для любого $u_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное ослабленное решение задачи Коши $u(0) = u_0$ для уравнения (3).

Теорема 2. *Пусть оператор M (L,p)-секториален, тогда фазовое пространство уравнения (3) совпадает с образом разрешающей полугруппы $U^{\cdot}$.*

Очевидно, $\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 \subset \mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1 \subset \mathfrak{F}$.

Теорема 3. [17] *Оператор M сильно (L,p)-секториален точно тогда, когда выполняются следующие условия: оператор M (L,p)-секториален,*

$$\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}, \ \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}, \tag{7}$$

$$\textit{существует оператор} \quad L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1). \tag{8}$$

Заметим, что из (7) вытекает существование единиц $P = s - \lim\limits_{t\to 0+} U^t$ и $Q = s - \lim\limits_{t\to 0+} F^t$ полугрупп $U^{\cdot}$ и $F^{\cdot}$ соответственно.

Теорема 4. *Пусть оператор M (L,p)-секториален и выполнено (7), (8). Тогда оператор $S = L_1^{-1}M_1 \in Cl(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$ секториален.*

Пусть далее L-спектр оператора M

$$\sigma^L(M) \cap \{i\mathbb{R}\} = \emptyset. \tag{9}$$

Тогда разрешающую полугруппу уравнения (3) можно представить в виде $U^t = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{\Gamma_1} R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu + (2\pi i)^{-1} \int\limits_{\Gamma_2} R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu = U_1^t + U_2^t$, где Γ_1 – контур, целиком лежащий в левой полуплоскости и имеющий такой же вид, как в (6), а Γ_2 – замкнутый контур, целиком лежащий в правой полуплоскости и ограничивающий часть L-спектра $\sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, \mu > 0\}$. Нетрудно заметить, что полугруппа $\{U_2^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ продолжима до аналитической группы $\{U_2^\tau : \tau \in \mathbb{C}\}$, значит, существует ее единица $P_2 = U_2^0$, являющаяся, очевидно, проектором. Пусть выполнено (7), тогда существует проектор $P_1 = s - \lim\limits_{t\to 0+} U_1^t = P - P_2$. Положим, $\mathfrak{U}^{1k} = \mathrm{im}\, P_k$, $k \in \{0,1\}$, очевидно $\mathfrak{U}^{11} \oplus \mathfrak{U}^{12} = \mathfrak{U}^1$.

Определение 3. Пусть $\mathfrak{P}$ – фазовое пространство уравнения (3). Подмножество $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{P}$ называется *инвариантным пространством* уравнения (3), если при любом $u_0 \in \mathfrak{J}$ вектор-функция $u(t) = U^t u_0 \in \mathfrak{J}$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Теорема 5. *Пусть оператор M (L,p)-секториален и выполнено (7), тогда подпространства $\mathfrak{U}^{1k}$, $k \in \{0,1\}$ являются инвариантными пространствами уравнения (3).*

Определение 4. Пусть $\mathfrak{J}$ – инвариантное пространство уравнения (3). Пусть $u(t,u_0) = U^t u_0$ – решение задачи Коши для уравнения (3) с начальным значением $u_0 \in \mathfrak{J}$. Пространство $\mathfrak{J}$ называется *устойчивым (неустойчивым)*, если существуют константы $\alpha, C \in \mathbb{R}_+$ такие, что $||u(t,u_0)||_{\mathfrak{U}} \le Ce^{-\alpha t}||u_0||_{\mathfrak{U}}$ при $t \in \mathbb{R}_+$ $(||u(t,u_0)||_{\mathfrak{U}} \le Ce^{\alpha t}||u_0||_{\mathfrak{U}}$ при $t \in \mathbb{R}_-)$.

Теорема 6. *Пусть оператор M (L,p)-секториален, и выполнено (7) – (9). Тогда $\mathfrak{U}^{11}$ – устойчивое, а $\mathfrak{U}^{12}$ – неустойчивое инвариантные пространства уравнения (3).*

Если выполнены условия (7) – (9), то пространства $\mathfrak{U}^{1k}$, $k \in \{0,1\}$ являются инвариантными пространствами секториального оператора $S = L_1^{-1}M_1 \in Cl(\mathfrak{U}^1)$. Поскольку спектр $\sigma(S) = \sigma^L(M)$, то пространство $\mathfrak{U}^{11}$ ($\mathfrak{U}^{12}$) является устойчивым (неустойчивым) пространством уравнения $\dot{u}^1 = Su^1$. Заметим еще, что если $\sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\mu \geq 0\} = \emptyset$, то неустойчивое инвариантное пространство $\mathfrak{U}^{12} = \{0\}$. В таком случае фазовое пространство $\mathfrak{U}^1 \equiv \mathfrak{U}^{11}$ и называется *асимптотически экспоненциально устойчивым пространством.*

2. Квазистационарные полутраектории

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства; операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M \in Cl(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем оператор M (L,p)-секториален, и выполнены (7) – (9). Тогда, полагая $\mathfrak{U}^1_0 = \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{U}^1_1 = \mathrm{dom}\, M \cap \mathfrak{U}^1$ с «нормой графика», аналогично [18] построим интерполяционные пространства $\mathfrak{U}^1_\alpha = [\mathfrak{U}^1_0, \mathfrak{U}^1_1]_\alpha$, $\alpha \in [0,1]$. Далее, положим $\mathfrak{U}^0_1 = \mathrm{dom}\, M \cap \mathfrak{U}^0$ с «нормой графика» и построим пространства $\mathfrak{U}_\alpha = \mathfrak{U}^0_1 \oplus \mathfrak{U}^1_\alpha$, $\alpha \in [0,1]$. Имеют место непрерывное и плотное вложение $\mathfrak{U}_\alpha \hookrightarrow \mathfrak{U}$, $\alpha \in [0,1]$, и равенство $\mathfrak{U}_1 = \mathrm{dom}\, M$ с «нормой графика». Фиксируем $\alpha \in [0,1)$, и пусть оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{U}_\alpha;\mathfrak{F})$. Рассмотрим полулинейное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + N(u). \tag{10}$$

Вектор-функцию $u \in C^\infty((0,T);\mathfrak{U}_1)$, удовлетворяющую при некотором $T \in \mathbb{R}_+$ этому уравнению, назовем *решением уравнения* (10). Решение $u = u(t)$ уравнения (10), удовлетворяющее соотношению $\lim\limits_{t\to 0+} ||u(t) - u_0||_{\mathfrak{U}_\alpha} = 0$ при некотором $u_0 \in \mathfrak{U}_\alpha$, назовем *решением задачи Коши*

$$u(0) = u_0 \tag{11}$$

для уравнения (10) (или просто *решением задачи* (10), (11)).

Поскольку оператор M (L,p)-секториален и выполнены (7), (8), то уравнение (10) эквивалентно системе из двух уравнений

$$G\dot{u}^0 = u^0 + M_0^{-1}N(u), \tag{12}$$

$$\dot{u}^1 = Su^1 + L_1^{-1}N(u), \tag{13}$$

где оператор $G = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}_0)$ нильпотентен степени p, а оператор $S = L_1^{-1}M_1 \in Cl(\mathfrak{U}^1)$ секториален. О трудностях, возникающих при решении уравнений (12), (13), сказано уже немало (см. напр. [19]).

Определение 5. Решение $u = u(t)$ уравнения (10) называется *квазистационарной полутраекторией*, если

$$G(\mathbb{I} - P)\dot{u}(t) \equiv 0, \quad t \in (0,T). \tag{14}$$

Решение задачи (10), (11) называется *квазистационарной полутраекторией уравнения (10), выходящей из точки* u_0, если выполнено (14).

Понятие квазистационарной полутраектории естественным образом обобщает понятие квазистационарной траектории [19]. Если ограничиться рассмотрением только квазистационарных полутраекторий, то мы с необходимостью придем к рассмотрению множества $\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U}_\alpha : (\mathbb{I} - Q)(Mu + N(u)) = 0\}$, на котором они лежат.

Пусть $\mathfrak{M} \neq \emptyset$; будем говорить, что множество $\mathfrak{M}$ в точке $u_0 \in \mathfrak{M}$ является *банаховым C^∞-многообразием*, если существуют окрестности $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{O}_1 \subset \mathfrak{U}^1_\alpha$ точек u_0 и $u^1_0 = Pu_0 \in \mathfrak{U}^1_\alpha$ соответственно и C^∞-диффеоморфизм $D : \mathfrak{O}_1 \to \mathfrak{O}$ такой, что D^{-1} есть сужение проектора P на $\mathfrak{M}$. Множество $\mathfrak{M}$ называется *банаховым C^∞-многообразием*, если оно является таковым в каждой своей точке. Связное банахово C^∞-многообразие называется *простым.*

Теорема 7. *Пусть в точке $u_0 \in \mathfrak{M}$ множество $\mathfrak{M}$ является банаховым C^∞-многообразием, тогда существует квазистационарная полутраектория уравнения (10), выходящая из точки u_0.*

Приведем набросок доказательства. В условиях теоремы уравнение (13) можно привести к виду

$$\dot{u}^1 = Su^1 + F(u^1), \tag{15}$$

в окрестности $\mathfrak{O}_1 \hookrightarrow \mathfrak{U}^1_\alpha$ точки u^0_1, где оператор $F = L_1^{-1}M_1D \in C^\infty((\mathfrak{O}_1; \mathfrak{U})$. Пользуясь результатом [1], найдем решение $u^1 \in C^\infty((0,T); \mathfrak{U}^1_\alpha)$ задачи Коши $u^1(0) = u^1_\alpha$ для уравнения (15). Вектор-функция $u(t) = Du^1(t))$ будет решением задачи (10), (11), причем будет выполнено (14).

Определение 6. Множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}_\alpha$ называется *фазовым пространством* уравнения (10), если

(i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (10) лежит на $\mathfrak{P}$, т.е. $u(t) \in \mathfrak{P}$, $t \in (0,T)$;

(ii) для любого $u_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (10), (11).

В дальнейшем нас будут интересовать случаи, когда фазовое пространство $\mathfrak{P}$ уравнения (10) будет совпадать со множеством его квазистационарных полутраекторий $\mathfrak{M}$. Отметим, что такой случай заведомо имеет место, если оператор $N \equiv \mathbb{O}$ (см. теорему 4), или если $p = 0$ [18], [19].

Положим теперь $\mathfrak{U}^{1k}_\alpha = \mathfrak{U}^{1k} \cap \mathfrak{U}^1_\alpha$, $k \in \{1, 2\}$. Пусть множество $\mathfrak{M}$ – простое банахово C^∞-многообразие, а фазовое пространство $\mathfrak{P} = \mathfrak{M}$. Через $u(t, u_0)$ обозначим квазистационарную полутраекторию уравнения (10), выходящую из точки u_0.

Определение 7. Множество $\mathfrak{M}^{s(u)} = \{u_0 \in \mathfrak{M} : \|P_{1(2)}u_0\|_\mathfrak{U} \le R_1, \|u(t, u_0)\|_\mathfrak{U} \le R_2,\ t \in \mathbb{R}_{+(-)}\}$ такое, что

(i) $\mathfrak{M}^{s(u)}$ диффеоморфно замкнутому шару в $\mathfrak{U}^{11(12)}_\alpha$ с центром в начале координат радиуса R_1;

(ii) $\mathfrak{M}^{s(u)}$ касается $\mathfrak{U}^{11(12)}_\alpha$ в начале координат;

(iii) при любом $u_0 \in \mathfrak{M}^{s(u)}$ $\|u(t, u_0)\|_\mathfrak{U} \to 0$ при $t \to +\infty(-\infty)$

называется *устойчивым (неустойчивым) инвариантным многообразием уравнения* (10).

Теорема 8. *Пусть оператор N таков, что $N(0) = 0$, $N'_0 = \mathbb{O}$. Тогда при некоторых R_k, $k \in \{1, 2\}$, существуют устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия уравнения (10). Причем, если для некоторого $u_0 \in \mathfrak{M}$ имеет место $\|P_1u_0\|_\mathfrak{U} \le R_1$ или $\|P_2u_0\|_\mathfrak{U} \le R_1$ и $\|u(t, u_0)\|_\mathfrak{U} \le R_2$ при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$, то $u_0 \in \mathfrak{M}^s \cup \mathfrak{M}^u$.*

Приведем набросок доказательства. На первом этапе показывается, что уравнение (15) удовлетворяет условиям теоремы Адамара – Перрона. Действительно, оператор $S \in Cl(\mathfrak{U}^1)$ секториален, и его спектр $\sigma(S) = \sigma^L(M)$. Далее, по построению $F(0) = 0$ и $F'_0 \equiv \mathbb{O}$. Итак, существует устойчивое $\mathfrak{N}^s$ и неустойчивое $\mathfrak{N}^u$ инвариантные многообразия уравнения (15). Положим

$$\mathfrak{M}^s = \{u \in \mathfrak{M} : u = (\mathbb{I} + \delta)(u^1),\ u^1 \in \mathfrak{N}^s\},$$

и покажем, что $\mathfrak{M}^s$ – искомое устойчивое многообразие уравнения (10). Прежде всего заметим, что для любого $u_0 \in \mathfrak{M}^s$ $\|P_1u_0\|_\mathfrak{U} = \|P_1u^1_0\|_\mathfrak{U} \le \rho(2M)^{-1}$, где $u^1_0 \in \mathfrak{N}^s$. Отсюда, если положить $R_1 = \rho(2M)^{-1}$, то требуемый C^k-диффеоморфизм шара в $\mathfrak{U}^{11}_\alpha$ и $\mathfrak{M}^s$ задается формулой $D = \mathbb{I} + \delta(\mathbb{I} + \sigma)$. Далее, поскольку любое решение $u(t, u_0)$ уравнения (10) имеет вид $u(t, u_0) = (\mathbb{I} + \delta)u^1(t, Pu_0)$, причем $\delta(u) = o(u)$ при $\|u\|_\mathfrak{U} \to 0$, то $\|u(t, u_0)\|_\mathfrak{U} = \|(\mathbb{I}+\delta)u^1(t, Pu_0)\|_\mathfrak{U} \to 0$ при $t \to -\infty$. Кроме того, отсюда вытекает существование константы

R_2 такой, что $\|u(t,u_0)\|_{\mathfrak{U}} \le R_2$, $t \in \mathbb{R}_+$. Наконец, касание $\mathfrak{M}^s$ пространства $\mathfrak{U}^l$ в начале координат вытекает из того, что $(\mathbb{I} - D)(u) = o(u)$ при $\|u\|_{\mathfrak{U}} \to 0$.

Существование неустойчивого инвариантного многообразия $\mathfrak{M}^u$ доказывается аналогично.

Аналогично п. 1 заметим, что если $\sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\mu \ge 0\} = \emptyset$, то фазовое пространство уравнения (10) совпадает с устойчивым инвариантным многообразием.

3. Полулинейная задача термоконвекции

Гибрид системы уравнений Осколкова [21] и уравнения теплопроводности в приближении Обербека – Буссинеска

$$\begin{cases} (\lambda - \nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)v - \nabla p + g\gamma S, \ \nabla\cdot v = 0, \\ S_t = \delta\nabla^2 S - v\cdot\nabla S + \gamma\cdot v, \end{cases} \tag{16}$$

моделирует термоконвекцию вязкоупругой несжимаемой среды Кельвина - Фойгта [20]. Если одна из горизонтальных компонент скорости равна нулю, то система (16) превращается в систему

$$\begin{cases} (\lambda - \Delta)\Delta\dfrac{\partial\psi}{\partial t} = \nu\Delta^2\psi - \dfrac{\partial(\psi,\Delta\psi)}{\partial(x,y)} + \alpha\dfrac{\partial\theta}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial t} = \delta\Delta\theta - \dfrac{\partial(\psi,\theta)}{\partial(x,y)} + \beta\dfrac{\partial\psi}{\partial x}, \end{cases} \tag{17}$$

моделирующую плоскопараллельную термоконвекцию в слое вязкоупругой несжимаемой среды Кельвина – Фойгта.

Пусть $\Omega = (0;a)\times(0;b) \subset \mathbb{R}^2$. Нас интересует фазовое пространство, а также устойчивое и неустойчивое инвариантные пространства *задачи Бенара*

$$\psi(x,0,t) = \Delta\psi(x,0,t) = \psi(x,b,t) = \Delta\psi(x,b,t) = 0, \tag{18}$$

$$\theta(x,0,t) = \theta(x,b,t) = 0, \tag{19}$$

$$\text{функции } \psi \text{ и } \theta \text{ периодичны по } x \text{ с периодом } a \tag{20}$$

в цилиндре $\Omega\times\mathbb{R}_+$. Положим [22] $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}\times\mathfrak{W}$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}\times\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{V} = \{v \in W_2^4(\Omega) :$ v удовлетворяет (18), (20)$\}$, $\mathfrak{W} = \mathfrak{G} = \mathfrak{H} = L_2(\Omega)$; операторы

$$L = \begin{pmatrix} (\lambda-\Delta)\Delta & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \nu\Delta^2 & \alpha\dfrac{\partial}{\partial x} \\ \beta\dfrac{\partial}{\partial x} & \delta\Delta \end{pmatrix}.$$

Очевидно, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, а оператор $M \in Cl(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $\mathrm{dom}\,M = \mathfrak{V}\times\{w \in W_2^2(\Omega) :$ w удовлетворяет (19), (20)$\}$. Причем оператор M $(L,0)$-секториален [22].

Положим $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_0$, а через $\mathfrak{U}_1$ обозначим линеал $\mathrm{dom} M$, снабженный «нормой графика». В качестве $\mathfrak{U}_N$ возьмем пространство $\mathfrak{U}_N = \mathfrak{V}\times\{w \in W_2^1(\Omega) : w$ удовлетворяет (19), (20)$\}$. Очевидно $\mathfrak{U}_1 \hookrightarrow \mathfrak{U}_N \hookrightarrow \mathfrak{U}_0$, причем все вложения плотны и непрерывны. Формулой $N : u \longrightarrow \mathrm{col}\left(\dfrac{\partial(\Delta v,v)}{\partial(x,y)}, \dfrac{\partial(v,w)}{\partial(x,y)}\right)$ определим оператор $N : \mathfrak{U}_N \to \mathfrak{F}$. Нетрудно показать, что оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ [23], кроме того легко заметить, что $N(0) = 0$, $N_0' = \mathbb{O}$. Построим множество $\mathfrak{M}$, на котором находятся все квазистационарные траектории задачи Бенара для уравнения (11).

(i) $\mathfrak{M} = \mathfrak{U}_\alpha$, если $\lambda \ne \lambda_j$;

(ii) $\mathfrak{M} = \left\{ u \in \mathfrak{U}_\alpha : \iint_\Omega \frac{\partial(\Delta v, v)}{\partial(x,y)} \varphi_j \, dxdy + \nu\lambda^2 = 0 \right\}$, если $\lambda = \lambda_j$;

(iii) $\mathfrak{M} = \left\{ u \in \mathfrak{U}_\alpha : \iint_\Omega \frac{\partial(\Delta v, v)}{\partial(x,y)} \varphi_{mn}^k \, dxdy + \nu\lambda^2 = 0,\ k = 1,2 \right\}$, если $\lambda = \lambda_{mn}$.

Здесь символами φ_{mn}, φ_{kl}, φ_j обозначены нормированные функции каждого семейства собственных функций оператора Лапласа Δ, определенного в области Ω и удовлетворяющих условиям (18), (20), а символами λ_{mn}, λ_{kl}, λ_j – соответствующие собственные значения (см. [22]).

Теорема 9. [23] *При любых $\nu \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in \mathbb{R}$ множество $\mathfrak{M}$ является простым банаховым C^∞-многообразием, моделируемым пространством $\mathfrak{U}_N^1$.*

Отсюда в силу теорем 8 и 9 вытекает следующая

Теорема 10. *При любых $\alpha, \beta, \delta, \nu \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in \mathbb{R}$ существует бесконечномерное устойчивое и не более чем конечномерное неустойчивое инвариантные многообразия задачи Бенара для уравнений (17).*

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить свою искреннюю благодарность Г.А. Свиридюку за постановку задачи и интерес к работе.

Литература

1. Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. – М.: Мир, 1985.
2. Coleman, B.N. Instability, uniqness and nonexistence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xxt}$ on a strip / B.N. Coleman, R.J. Duffin, V.J. Mizel // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1965. – V.19. – P. 100 – 116.
3. Levine, H.A. Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Du_t = -Au + F(u)$ / H.A. Levine // Arch. Rat. Mach. anal. – 1973. – V.51, №5. – P. 371–386.
4. Showalter, R. E. Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations / R. E. Showalter. – London; San Francisco; Melbourne: Pitman, 1977.
5. Favini, A. Degenerate differential equations in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi. – New York; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker Inc, 1999.
6. Pyatkov, S.G. Operator theory. Nonclassical problems / S.G. Pyatkov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2002.
7. Lyapunov – Shmidt method in nonlinear analysis and applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinithyn, M. Falaleev. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2002.
8. Demidenko, G.V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest – order derivative / G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. – New York; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003.
9. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
10. Свиридюк, Г.А. Многообразие решений одного операторного сингулярного псевдопараболического уравнения / Г.А. Свиридюк // Докл. акад. наук СССР. – 1986. – Т.289, №6. – С. 1315 – 1318.

11. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для системы Осколкова / Г.А. Свиридюк, М.М. Якупов // Дифференц. уравнения. - 1996. - Т. 32, №11. - С. 1538 - 1543.

12. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, В.О. Казак // Мат. заметки. - 2002. - Т. 71, №2. - С. 292 - 297.

13. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство задачи Коши-Дирихле для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Изв. вузов. Математика. - 2003. - №9. - С. 36 - 41.

14. Китаева, О.Г. Устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия уравнения Осколкова / О.Г. Китаева, Г.А. Свиридюк // Неклассические уравнения математической физики: тр. семинара, посвященного 60-летию проф. В.Н. Врагова / Ин-т математики им. С.Л. Соболева СО РАН. - Новосибирск, 2005. - С. 161 - 166.

15. Китаева, О.Г. Устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия уравнения Хоффа / О.Г. Китаева // Вестн. МаГУ. Сер. Математика. - Магнитогорск, 2005. - Вып. 8. - С. 96 - 112.

16. Арнольд, В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд, Ю.С. Ильяшенко // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальное направление. - М., 1985. - Т. 1. - С.7 - 149.

17. Федоров, В.Е. О некоторых соотношениях в теории вырожденных полугрупп / В.Е. Федоров // Вестн. ЮУрГУ. Мат. моделирование и программирование. - 2008. №15 (115). - С. 89 - 99.

18. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором / Г.А. Свиридюк // Алгебра и анализ. - 1994. - Т.6, №5. С. 252 - 272.

19. Свиридюк, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк// Изв. РАН. Сер. матем. - 1993. - Т.57, №3. - С. 192 - 207.

20. Свиридюк, Г.А. Некоторые математические задачи динамики вязкоупругих несжимаемых сред / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Вестн. МаГУ. Сер. Математика. Магнитогорск, 2005. - Вып. 8. - С. 5 - 33.

21. Осколков, А.П. Нелокальные задачи для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С.Л. Соболева / А.П. Осколков // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. - 1991. - Т.198. - С. 31 - 48.

22. Загребина, С.А. Задача Шоуолтера - Сидорова - Веригина для линейных уравнений Соболевского типа / С.А. Загребина // Неклассические уравнения математической физики: сб. тр. междунар. конф. «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения:», посвящ. 100-летию со дня рождения акад. И.Н.Векуа. - Новосибирск, 2007. - С. 150 - 157.

23. Якупов, М.М. Фазовые пространства некоторых задач гидродинамики: дис. ... канд. физ.-мат. наук./ М.М. Якупов. - Челябинск, 1999.

Кафедра «Уравнения математической физики»,
Южно-Уральский государственный университет
zsophiya@mail.ru

Поступила в редакцию 21 августа 2008 г.