

УДК 629.78

ТРЕХМЕРНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ В АТМОСФЕРЕ ИЗДЕЛИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ МАССО-ЦЕНТРОВОЧНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

А.А. Суслов

В статье рассматривается трехмерная динамическая модель движения в атмосфере изделия с переменными массо-центровочными характеристиками. Управление угловым и поступательным движением осуществляется с помощью изменения положения центра масс изделия в поперечной плоскости. Итогом работы является программное средство, позволяющее моделировать движение изделия в атмосфере при различных стратегиях его поведения.

Ключевые слова: изменение положения центра масс изделия в поперечной плоскости.

При движении изделия в атмосфере одним из возможных способов создания управляющих усилий является способ, основанный на изменении положения центра масс изделия в плоскости, перпендикулярной его продольной оси. Такое измененное положение центра масс приводит к появлению аэродинамического момента, вызывающего переориентацию изделия в новое угловое положение. При таком способе управления существует ряд проблем, требующих углубленного изучения. В общем случае изменение положения центра масс может производиться по двум поперечным осям одновременно. Это приводит к сильным возмущениям по каналу крена и возможной потере устойчивости. Природа такого возмущения описана, например, в [1]. Движение изделия оказывается пространственным, поэтому возникают существенные перемещения и по дальности, и по боковой дальности. Для описания, такого взаимозависимого углового и пространственного движения была разработана трехмерная модель движения в атмосфере изделия с центром масс, имеющим возможность перемещения в поперечной плоскости. Основные положения этой модели описаны ниже.

Интегрирование движения центра масс ведется в инерциальной геоцентрической системе координат в предположении, что Земля имеет форму шара. Гравитационное поле предполагается центральным. Тогда уравнения движения центра масс имеют вид [3]:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{\vec{F}_A}{m}, \quad (1)$$

где \vec{r} – радиус-вектор центра масс ЛА, \vec{F}_A – аэродинамическая сила, действующая на ЛА, m – его масса, $\mu = 398600 \text{ м}^3/\text{с}^2$. Начальные условия формируются на любой долготе, широте и по любому пеленгу.

При формировании начальных условий на момент входа в атмосферу учитывается вращение Земли. В частности, учитывается переносная скорость вращения Земли на широте старта и связанные с этим изменения скоростного напора, углов атаки и скольжения.

Для перевода параметров движения из инерциальной системы координат в связанную систему координат и обратно вычисляются соответствующие матрица перехода.

Матрица перехода из инерциальной геоцентрической системы координат в инерциальную стартовую систему координат XX_{st} :

$$XX_{st} = E(1, -\pi - P) * E(2, -\phi) * (E(3, \lambda),$$

где ϕ, λ – углы широты и долготы точки старта, P – пеленг стрельбы, ' – знак транспонирования. Обозначение $E(n, x)$ обозначает матрицу поворота вокруг n -й оси на угол x .

Матрица перехода из инерциальной стартовой системы координат в связанную систему координат $X_{st}X_1$:

$$X_{st}X_1 = E(3, \vartheta) * E(2, \psi) * (E(1, \varphi),$$

где φ, ψ, ϑ – углы крена, рыскания и тангажа, или углы Эйлера-Крылова.

Матрица перехода из инерциальной геоцентрической системы координат в связанную систему координат XX_1 :

$$XX_1 = X_{st}X_1 * XX_{st}.$$

Параметры атмосферы задаются в виде таблицы Международной стандартной атмосферы [4] $\rho = \rho(h)$ и используются для вычисления величин скоростного напора и связанных с ним аэродинамических сил и моментов.

Угловое движение описывается уравнениями вида [5]:

$$\begin{aligned} J_{xx}\dot{\omega}_{x1} + (J_{zz} - J_{yy})\omega_{y1}\omega_{z1} &= M_{Ax} + M_{хупр}, \\ J_{yy}\dot{\omega}_{y1} + (J_{xx} - J_{zz})\omega_{z1}\omega_{x1} &= M_{Ay}, \\ J_{zz}\dot{\omega}_{z1} + (J_{yy} - J_{xx})\omega_{x1}\omega_{y1} &= M_{Az}, \end{aligned} \quad (2)$$

где J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} – главные моменты инерции относительно центра масс ЛА, $\omega_{x1}, \omega_{y1}, \omega_{z1}$ – угловые скорости вращения вокруг осей x, y, z , соответственно, M_A – момент, создаваемый действием аэродинамической силы относительно центра масс ЛА:

$$\vec{M}_A = (\vec{r}_A - \vec{r}_c) \times \vec{F}_A,$$

где $F_{Ax} = C_x S \frac{\rho V^2}{2}$, $F_{Ay} = \alpha C_y^\alpha S \frac{\rho V^2}{2}$, $F_{Az} = \beta C_y^\beta S \frac{\rho V^2}{2}$ – компоненты аэродинамической силы, $C_x, C_y^\alpha, C_y^\beta$ – аэродинамические коэффициенты, α – угол атаки, т.е. угол между вектором скорости и плоскостью X_1OZ_1 , β – угол скольжения, т.е. угол между вектором скорости и плоскостью X_1OY_1

связанной с ЛА системы координат, \vec{r}_A - радиус точки приложения аэродинамической силы, \vec{r}_c – радиус центра масс ЛА, имеющий компоненты x_c, y_c, z_c . $M_{хупр}$ – момент, создаваемый управляющими двигателями.

Угловые координаты, задающие положение объекта в пространстве, могут быть вычислены двумя путями. Первый путь состоит в том, чтобы выразить производные этих углов через угловые скорости и их интегрировать. В этом случае производные углов Эйлера-Крылова могут быть выражены следующим образом [3]:

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = X_1 X_{st} * \begin{pmatrix} \omega_{x1} \\ \omega_{y1} \\ \omega_{z1} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $X_1 X_{st}$ – матрица перехода из связанной системы координат в стартовую систему координат. Второй путь состоит в том, чтобы интегрировать направляющие косинусы, содержащиеся в матрице $X_1 X_{st}$, а потом из элементов матрицы вычислять углы Эйлера-Крылова. В таком случае уравнения для интегрирования направляющих косинусов имеют вид:

$$\dot{\vec{e}}_k = \vec{\omega} \times \vec{e}_k, \quad (4)$$

где \vec{e}_k ($k = 1, 2, 3$) – вектор столбец матрицы перехода $X_1 X_{st}$. В каждом случае есть свои достоинства и недостатки. Первый путь, заключающийся в интегрировании системы уравнений (4), оказывается предпочтительнее по двум обстоятельствам: можно интегрировать углы в широком диапазоне их изменения, в том числе и по модулю больше 180 градусов; не возникает сингулярностей, т.е. ситуаций, в которых приходится делить на бесконечно малое число. Интегрирование направляющих косинусов по формуле (5) имеет преимущество, связанное с тем, что перед вычислением углов элементы матрицы можно нормировать, повышая тем самым точность вычислений. Однако, разрывность значений углов при переходе через значение 180 градусов делает второй путь менее ценным.

Углы атаки α и скольжения β вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \alpha &= -\operatorname{atan}\left(\frac{V_{y1}}{V_{x1}}\right), \\ \beta &= -\operatorname{atan}\left(\frac{V_{z1}}{V_{x1}}\right), \end{aligned} \quad (5)$$

где V_{x1}, V_{y1}, V_{z1} – координаты вектора скорости в связанной системе координат. Данные формулы дают возможность вычислять углы атаки и скольжения в диапазоне $\pm 90^\circ$, что вполне достаточно, т.к. вряд ли будет расчетным даже случай достижения этими углами хотя бы половины указанного диапазона.

Управление угловым движением, как известно, разделяется на две подзадачи:

- построение программного углового движения, т.е. задание программных значений углов крена $\varphi_{пр}$, рыскания $\psi_{пр}$, тангажа $\vartheta_{пр}$, а также программных угловых скоростей $\omega_{x1пр}$, $\omega_{y1пр}$, $\omega_{z1пр}$ в зависимости от времени;
- стабилизация относительно выбранного программного движения, которая осуществляется в отклонениях относительно связанных осей: $\Delta\varphi_{св}$, $\Delta\psi_{св}$, $\Delta\vartheta_{св}$. Указанные отклонения вычисляются через соотношения:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \varphi - \varphi_{пр}, \\ \Delta\psi &= \psi - \psi_{пр}, \\ \Delta\vartheta &= \vartheta - \vartheta_{пр}.\end{aligned}\tag{6}$$

Для этого используется матрица перехода $X_{st}X_1$. Формула пересчета имеет вид:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\varphi_{св} \\ \Delta\psi_{св} \\ \Delta\vartheta_{св} \end{Bmatrix} = X_{st}X_1 * \begin{Bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\psi \\ \Delta\vartheta \end{Bmatrix}.\tag{7}$$

Отклонения относительно программных угловых скоростей имеют вид:

$$\begin{aligned}\Delta\omega_{x1} &= \omega_{x1} - \omega_{x1пр}, \\ \Delta\omega_{y1} &= \omega_{y1} - \omega_{y1пр}, \\ \Delta\omega_{z1} &= \omega_{z1} - \omega_{z1пр}.\end{aligned}\tag{8}$$

Массо-центровочные и моментные характеристики были взяты для гипотетического объекта конической формы высотой 1,3 м и диаметром основания 0,35 м. Масса объекта принята равной 200 кг. Моменты инерции вычислены, исходя из предположения, что масса объекта равномерно распределена по объему конуса. При таком условии момент инерции $J_{xx} = \frac{3}{10}m * R^2$, а поперечные моменты инерции $J_{yy} = J_{zz} = \frac{1}{10}m * H^2 + \frac{3}{20}m * R^2 - \frac{1}{16}m * H^2$. В последней формуле учтено, что центр масс конуса расположен на расстоянии $\frac{1}{4}H$ от основания, и в связи с этим моменты инерции пересчитываются в соответствии с теоремой Гюйгенса [6].

Центр давления предполагался расположенным за центром масс объекта на расстоянии 0,01 Н от него. Для острого конуса считаем что $C_x = 0,06$, а $C_y^\alpha = C_y^\beta = 2$ в соответствии с [7].

С целью сравнения описанной выше математической модели с упрощенной плоской моделью движения изделия [2] проведены расчеты спуска изделия в атмосфере на балансировочных углах атаки при равных начальных условиях. Для этого в расширенной модели был проведен расчет с широтой и долготой старта, равными нулю и пеленгом стрельбы, равным 90°. Угловая скорость вращения Земли также была равна 0. Аэродинамиче-

ское качество K изменялось в диапазоне от 0 до 1. Для движения центра масс в упрощенных условиях расчетов такое совпадение получено.

Далее изучалась возможность осуществления управляющего воздействия с помощью изменения положения центра масс объекта. В общем случае, как известно, для создания управления по трем каналам стабилизации необходимо иметь три независимых параметра для создания управляющего воздействия. Значит, для канала крена нужно использовать другие управляющие возможности, например, реактивные двигатели малой тяги. Такое управление может быть организовано с помощью четырех двигателей малой тяги, векторы тяг которых расположены в плоскости, перпендикулярной продольной оси объекта. Управляющий момент по крену создается перетягом по закону:

$$\begin{aligned} P_+ &= P_0(1 + \delta), \\ P_- &= P_0(1 - \delta), \end{aligned} \quad (10)$$

где P_+ – тяга двигателей, создающих положительный момент по крену, а P_- – тяга двигателей, создающих отрицательный момент по крену. Параметр перетяга δ для обеспечения управляющего воздействия будем вычислять по формуле:

$$\delta = C_1 * \Delta\varphi_{св} + C_2 * \Delta\omega_{x1}. \quad (11)$$

Управление перемещением по поперечным каналам будем осуществлять в соответствии с формулами:

$$\begin{aligned} z_c &= C_{1\psi} * \Delta\psi_{св} + C_{2\psi} * \Delta\omega_{y1}, \\ y_c &= C_{1\vartheta} * \Delta\vartheta_{св} + C_{2\vartheta} * \Delta\omega_{z1}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $C_{1\psi}, C_{2\psi}, C_{1\vartheta}, C_{2\vartheta}$ – некоторые коэффициенты, предназначенные для организации обратной связи между отклонениями параметров углового движения и перемещением центра масс в соответствующих каналах управления. Отклонения углов $\Delta\varphi_{св}, \Delta\psi_{св}, \Delta\vartheta_{св}$ и угловых скоростей $\Delta\omega_{x1}, \Delta\omega_{y1}, \Delta\omega_{z1}$ вычисляются относительно их программных значений, которые задаются исходя из поставленной перед объектом задачи. Для гипотетического осесимметричного объекта программные значения задают достаточно простую стратегию полета, позволяющую показать принципиальную возможность осуществления выбранного способа стабилизации.

Для объекта со смещением центра масс сразу в двух направлениях была реализована стабилизация одновременно по каналам крена по закону (11), а тангажа и рыскания по закону (12). Предполагалось, что смещение центра масс не может превышать 0.1 м (при диаметре Миделя 0,35 м).

Стабилизация по всем трем каналам отражена на рисунках 1–6. Программные значения по углам крена и рыскания были равны нулю, по тангажу поддерживалось программное значение $\vartheta_{пр} = -110$ град. При этом,

в связи с тем, что вектор линейной скорости из-за торможения опускается круче вниз, появляется стабильное значение угла атаки, примерно равное 5 градусам.

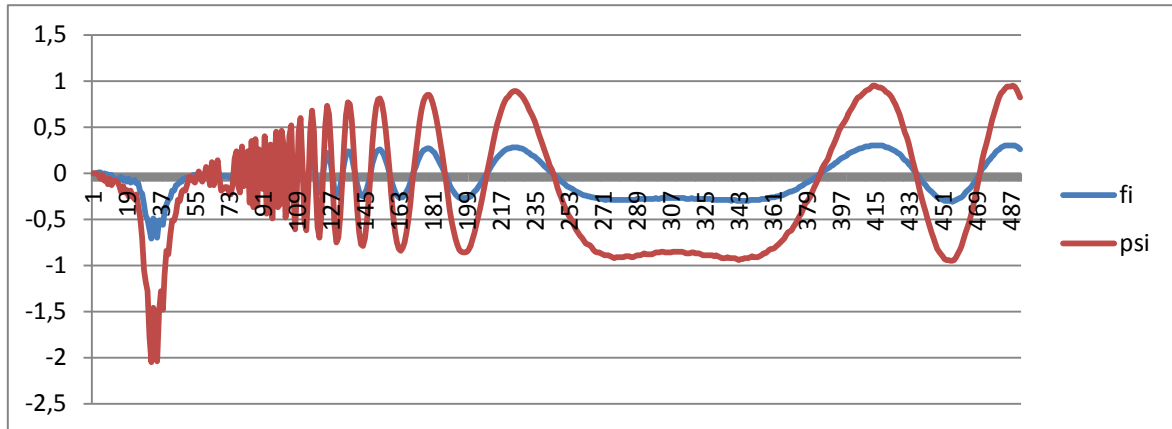


Рис. 1. Изменение углов крена и рыскания

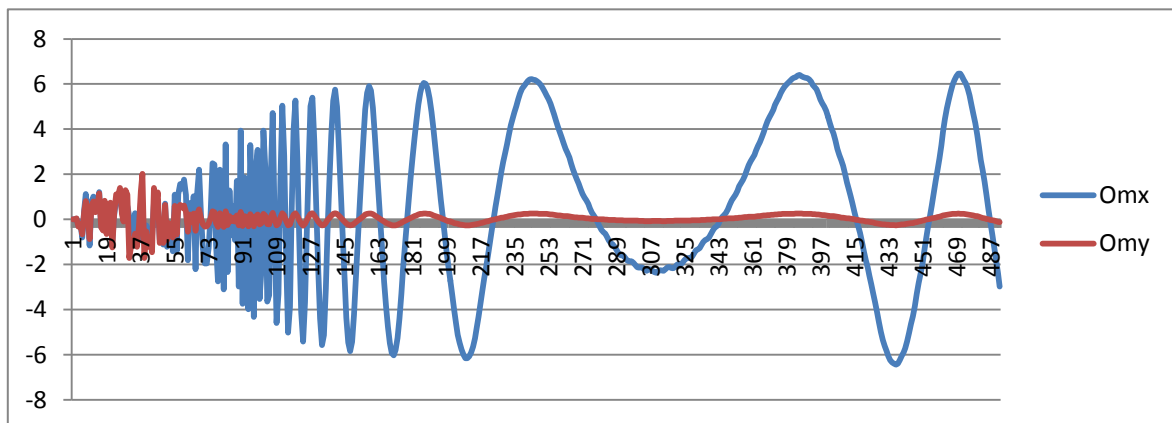


Рис. 2. Изменение угловых скоростей в каналах крена и рыскания

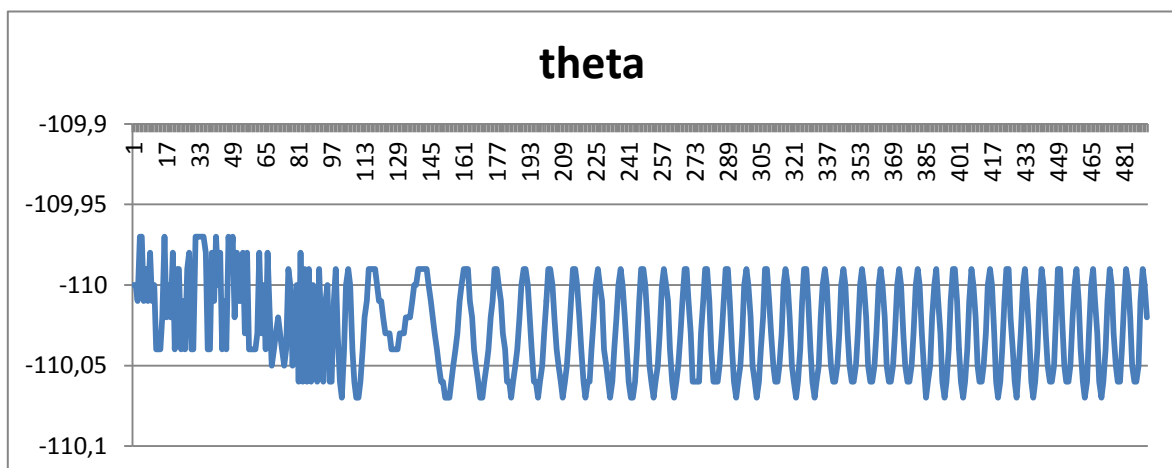


Рис. 3. Изменение угла тангажа

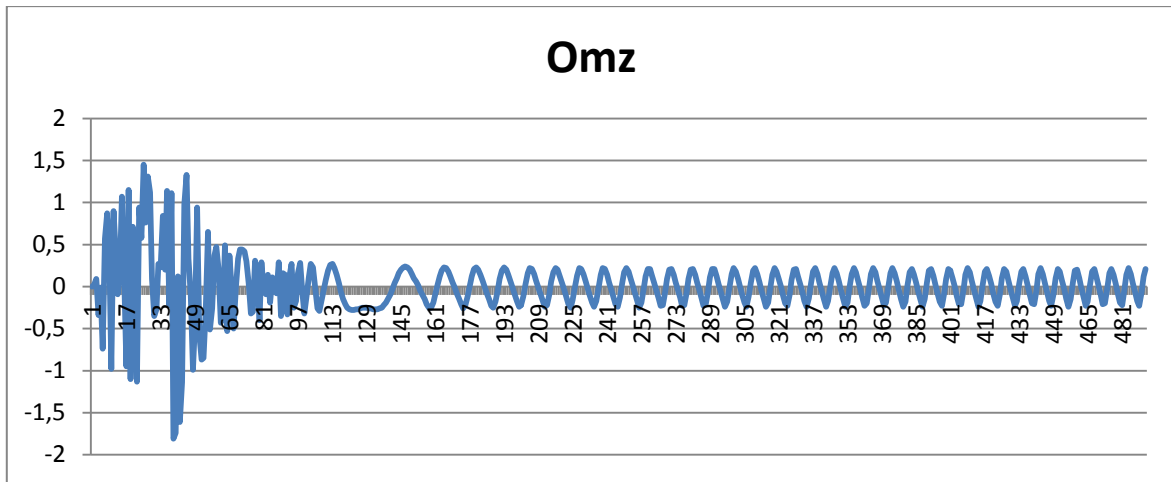


Рис. 4. Изменение угловой скорости в канале тангажа

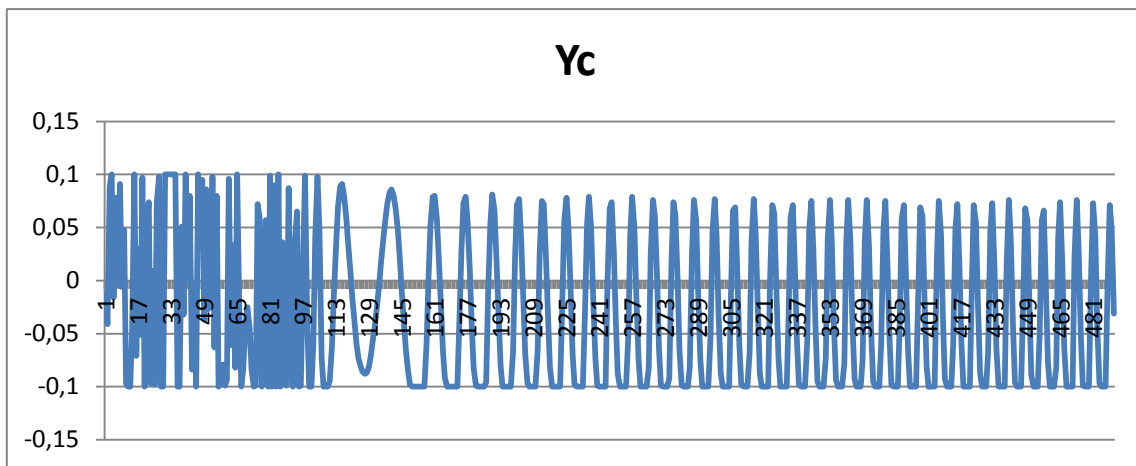


Рис. 5. Изменение поперечного смещения центра масс Y_c

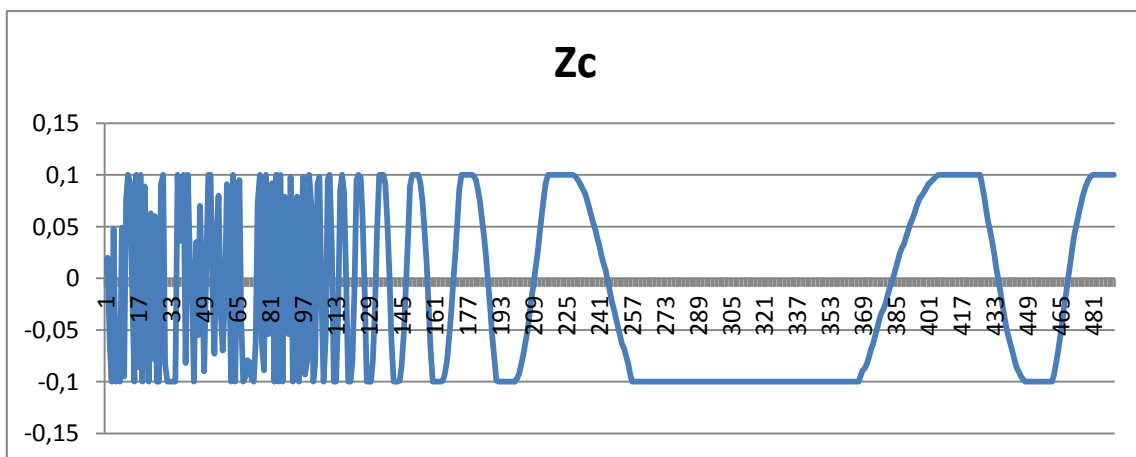


Рис. 6. Изменение поперечного смещения центра масс Z_c

Таким образом, показано, что разработанная математическая модель движения объекта позволяет численно моделировать его движение при наличии управляющего воздействия на угловое движение посредством попе-

речного смещения центра масс. Можно ожидать, что изменение моментов инерции не будет значительно влиять на динамику объекта управления. В дальнейшем такое изменение моментов инерции несложно учесть в формулах (3), используя теорему Гюйгенса [6] о сложении моментов инерции относительно параллельных осей, либо еще более подробную модель с вычислением перекрестных моментов инерции.

В настоящей работе показана лишь принципиальная возможность стабилизации углового движения объекта стабилизации с помощью поперечного смещения центра масс. Однако, получаемое качество переходных процессов при осуществлении стабилизации – это предмет отдельного изучения. Множество параметров оказывают на него влияние, начиная от процента аэродинамической устойчивости, который был принят постоянным и равным 1 %, величины скоростного напора, и кончая надлежащим выбором коэффициентов в законах управления (11) и (12).

Программные значения углов предполагались постоянными. Однако, даже по результатам такого моделирования можно сделать вывод, что объект вполне способен выполнять задачу компенсации перелета или недолета до цели.

Программное приложение, осуществляющее компьютерное моделирование приведенных математических моделей движения объекта (1-3), выполнено в виде 32-битовых консольных приложений в Microsoft Visual Studio Professional 2012, .NET Framework, v. 4.5 на языке программирования C++.

Библиографический список

1. Афанасьев, В.А. Аналитическое исследование динамики полета ЛА в атмосфере при управлении реактивными двигателями / В.А. Афанасьев // Изв. вузов. Авиационная техника. – 2008. – № 3. – С 19–23.
2. Афанасьев, В.А. Аналитическое конструирование траекторий полета возвращаемых космических аппаратов / В.А. Афанасьев, А.С. Мещанов, В.Р. Хайруллин // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2010. – № 4. – С. 161–170.
3. Дмитриевский, А.А. Внешняя баллистика / А.А. Дмитриевский. – М.: Машиностроение, 1972.
4. ГОСТ 4401-81, Атмосфера стандартная. Параметры. – М.: ИПК Издательство стандартов, 1981.
5. Лурье, А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М.: ГИФМЛ, 1961.
6. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики. Учеб. для втузов / С.М. Тарг. – 10-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1986.
7. Сидельников, Р.В. Аэродинамика ракет / Р.В. Сидельников, А.Б. Тропин. – Челябинск: ЮУрГУ, 1997.

[К содержанию](#)