На правах рукописи

УТКИН ПАВЕЛ БОРИСОВИЧ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИНЫ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ДЕФЕКТОМ

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Челябинск – 2010

«Проф...»

Работа выполнена в Южно-Уральском государственном университете на кафедре функционального анализа.

Научный руководитель: доктор технических наук, старший научный сотрудник Остсемин Александр Амурович.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Карачик Валерий Валентинович;
кандидат физико-математических наук, доцент Низамеев Хамид Рауфович.

Ведущая организация – Тюменский государственный университет

Защита состоится 7 апреля 2010 г. в 12 часов на заседании диссертационного совета Д 212.298.14 при Южно-Уральском государственном университете по адресу: г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Южно-Уральского государственного университета.

Автореферат разослан 17.02. 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета СОКОЛИНСКИЙ Л.Б.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Одной из основных задач современного машиностроения является снижение материалоемкости, что влечет за собой неизбежное ухудшение прочностных качеств конструкций. Частично это компенсируется применением новых материалов. Тем не менее это приводит к необходимости более точной оценки сопротивляемости конструкций разрушению, при наличии дефектов и в условиях двухосного нагружения.

В реальных условиях в структуре конструкций всегда присутствуют дефекты, некоторые из которых можно считать тонкими и заменять линейными разрезами в математических моделях. Часть же дефектов обладают формой не позволяющей заменять их разрезом, к таким дефектам можно отнести целый класс сварочных дефектов (непровар, несплавление, пора, кратер). Для них необходимо учитывать радиус кривизны дефекта в его вершине. Попытка внести влияние такой кривизны в ранее существующие модели предпринята в данной работе.

Цель работы и задачи исследования. Целью работы является математическое описание напряженно-деформированного состояния (НДС) пластины с наклонным эллиптическим дефектом для получения характеристик предельного состояния и параметров разрушения основного металла и сварных соединений. Для достижения этой цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Построение и аналитическое исследование математических моделей пластины с центральным и наклонным эллиптическим вырезом, подверженной статическому двухосному нагружению.
2. Построение математической модели пластины и цилиндрической оболочки с центральным поверхностным эллиптическим дефектом, подверженной статическому двухосному нагружению.

Методы исследования. Для описания НДС пластины с дефектом использован метод Колосова-Мусхелишвили математической теории упругости. При вычислениях использовался аппарат теории вычетов и конформные отображения.

Научная новизна работы заключаются в следующем:

1. Найдены точные и приближенные формулы для тензора напряжений, главных напряжений, интенсивности напряжений, перемещений для задачи о НДС пластины с наклонным эллиптическим вырезом при двухосном нагружении.
2. Получены системы уравнений и их решения в частном случае для определения предельных нагрузок и угла страгивания при разрушении пластины или цилиндрической оболочки с эллиптическим дефектом.
3. Проведен теоретический анализ по определению разрушающего кольцевого напряжения при вязком разрушении цилиндрической

оболочки с продольным поверхностным трехмерным дефектом на основе деформационного критерия δ_c.

Теоретическая ценность состоит в обобщении формул для компонент тензора напряжений и деформаций, используемых при оценке напряжений в окрестности вершины дефекта в пластине. **Практическая ценность.** Полученные выражения для тензора напряжений в окрестности вершины эллиптического дефекта позволяют учесть радиус кривизны трещины в ее вершине при расчете критических напряжений и угла страгивания. Формулы могут быть использованы для оценки сопротивляемости хрупкому и вязкому разрушению цилиндрических оболочек, нагруженных внутренним давлением и осевой силой, с эллиптическими поверхностными дефектами. Аналитические выражения дают возможность проверки корректности работы программ использующих численные методы.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на научных конференциях: "Проблемы и методы обеспечение надежности и безопасности систем транспорта нефти, нефтепродуктов и газа." г. Уфа, 2006, 2007 года; 59-61-й научные конференции ЮУрГУ 2007-2009 г. и научно-практической конференции "Прочность и долговечность сварных конструкций в тепловой и атомной энергетике", ЦНИИ КМ "Прометей", Санкт-Петербург. – 25-27 сентября, 2007г; на научном семинаре по функциональному анализу ЮУрГУ, на научном семинаре по вычислительной математике ЮУрГУ, на научном семинаре кафедры вычислительной математики ЧелГУ.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-12], список которых приведен в конце автореферата. Статья [1] опубликована в научном журнале "Прикладная механика и техническая физика", статья [2] опубликована в научном журнале "Изв. РАН. Механика твердого тела" включенных ВАК в перечень журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук. В работах [1-11] А.А. Остсемину принадлежит постановка задачи, П.Б. Уткину принадлежат все полученные результаты.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы. Работа содержит 109 страниц, включая библиографический список из 142 наименований.

Содержание работы.

В **первой главе** рассмотрены история вопроса и основные результаты полученные другими учеными в данной области.

Во **второй главе** строится математическая модель напряженно-деформированного состояния бесконечной пластины с центральным эллиптическим дефектом. Схематическое изображение наклонного эллиптического дефекта в пластине показано ни рис 1. Система координат привязана к осям эллипса. В такой системе координат под наклоном находятся главные оси напряжения на бесконечности, а не вырез.

В **первом и втором параграфах** находятся комплексные потенциалы для задачи о пластине с наклонным эллиптическим вырезом

$$\varphi(\zeta)=\frac{\sigma}{4m}\left(-(1-\varepsilon)e^{2i\beta}z+\left[m(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)e^{2i\beta}\right]\sqrt{z^2-d^2}\right)$$

$$\psi(\zeta)=\frac{\sigma(1-\varepsilon)}{4m}\left(z\left(me^{-2i\beta}+\frac{e^{2i\beta}}{m}\right)+\sqrt{z^2-d^2}\left(\left(me^{-2i\beta}-\frac{e^{2i\beta}}{m}\right)\right)\right)-$$

$$-\frac{\sigma}{2}\left((1+\varepsilon)m+(1-\varepsilon)e^{2i\beta}\right)\frac{(1+m^2)}{m(1+m)^2}\frac{a^2}{\sqrt{z^2-d^2}} \qquad (1)$$

где $R=(a+b)/2$; $m=(a-b)/(a+b)$; $0\le m\le 1$; $d=\sqrt{a^2-b^2}$, a,b - большая и малая полуоси выреза и проводятся вспомогательные вычисления.

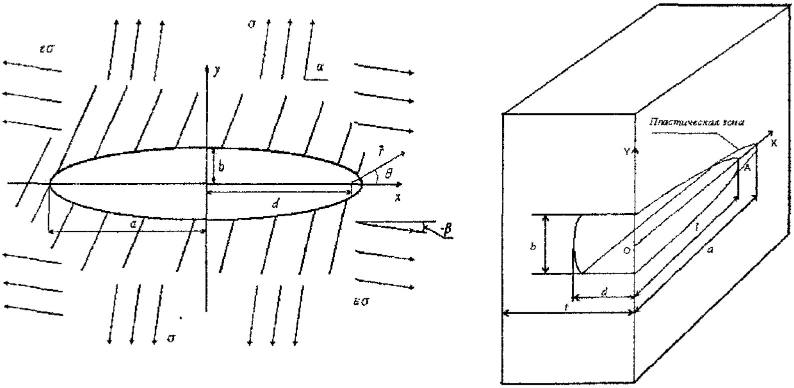

Рис.1-2. Слева(рис.1) - схематическое изображение рассматриваемой задачи, справа(рис.2) – схематическое изображение поверхностного эллиптического дефекта

В **третьем параграфе** рассматривается вопрос о коэффициентах интенсивности напряжений, находятся аналитические формулы для КИН эллиптического выреза

$$K_I=\sqrt{\pi d}\,\frac{\sigma(m(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)\cos 2\beta)}{2m}=$$

$$=\sqrt[4]{\frac{4m}{(1+m)^2}}\left(\sqrt{\pi a}\,\frac{\sigma(m(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)\cos 2\beta)}{2m}\right) \qquad (2)$$

$$K_{II}=-\sqrt{\pi d}\,\frac{\sigma(1-\varepsilon)\sin 2\beta}{2m}=-\sqrt[4]{\frac{4m}{(1+m)^2}}\left(\sqrt{\pi a}\,\frac{\sigma(1-\varepsilon)\sin 2\beta}{2m}\right)$$

где $\sigma, \varepsilon\sigma$ - напряжения на бесконечности, β - угол наклона первой оси к большой полуоси выреза. Зависимость полученных теоретических формул показана на рис. 3. Для линейной трещины (m=1) формулы (2) совпадают с формулами[1].

В **параграфах с четвертого по седьмой** находятся приближенные формулы для тензора напряжений с регулярными членамив декартовых и полярных координатах, перемещений, максимального касательного напряжения и главных напряжений около вершины центрального эллиптического выреза, разложенные по степеням расстояния от точки пластины до фокуса эллипса r. Данные формулы обобщают ранее полученные формулы для центральной трещины.

$$\sigma_x \approx -\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\left(\frac{r}{a}\right)^{-1}\frac{(1-m)^2}{4\sqrt{m}(1+m)}K_I\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)+\frac{1}{4\sqrt{2\pi r}}A_1K_I -$$
$$-\left(\frac{r}{a}\right)^{-1/2}\sigma(1+\varepsilon)\frac{(1-m)(1+m)^{1/2}}{4m^{3/4}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)-\sigma(1-\varepsilon)\left(\frac{1+m}{2m}\right)^2$$

$$\sigma_y \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\left(\frac{r}{a}\right)^{-1}\frac{(1-m)^2}{4\sqrt{m}(1+m)}K_I\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)+\frac{1}{4\sqrt{2\pi r}}B_1K_I +$$
$$+\left(\frac{r}{a}\right)^{-1/2}\sigma(1+\varepsilon)\frac{(1-m)(1+m)^{1/2}}{4m^{3/4}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sigma(1-\varepsilon)\left(\frac{1-m}{2m}\right)^2 \qquad (3)$$

$$\tau_{xy} \approx -\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\left(\frac{r}{a}\right)^{-1}\frac{(1-m)^2}{4\sqrt{m}(1+m)}K_I\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)+\frac{1}{4\sqrt{2\pi r}}C_1K_I -$$
$$-\left(\frac{r}{a}\right)^{-1/2}\sigma(1+\varepsilon)\frac{(1-m)(1+m)^{1/2}}{4m^{3/4}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

(формулы для коэффициентов приведены ниже)
Для линейной трещины (m=1) формулы (3) совпадают с формулами[2]. Формулы для перемещений можно использовать в деформационных критериях разрушения, что в более общем случае (для поверхностного эллиптического дефекта) проделаны в главе 4. Формулы для максимального касательного напряжения использованы при определении пластической зоны около вершины дефекта.

---

[1] Eftis J., Subramonian N. The inclined crack under biaxial load // Engineering Fract. Mech., 1978. V. 10. P. 43-67.

[2] Eftis J., Subramonian N., Liebowitz H.. Crack border stress and displacement equations revisited // Engineering Fract. Mech., 1977. V. 9. № 1. P. 189-210.

В **восьмом параграфе** найденные приближенные формулы используются для определения коэффициента интенсивности напряжений для центрального трещиноподобного дефекта методом голографической интерферометрии. Полученные результаты показывают хорошее совпадение экспериментальных данных с теорией.

В **девятом параграфе** рассматривается вопрос о НДС для коррозионно-притупленной трещины и сварных дефектов. Получены формулы обобщающие формулы Кригера-Париса для центральной трещины при I и II модах.

В **третьей главе** строится математическая модель напряженно-деформированного состояния бесконечной пластины с наклонным эллиптическим дефектом.

В **первом параграфе** находятся приближенные формулы для тензора напряжений около вершины наклонного эллиптического выреза, разложенные по степеням расстояния от точки пластины до фокуса эллипса r. Данные формулы обобщают ранее полученные формулы для центральной трещины.

$$\sigma_x \approx -\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\left(\frac{r}{a}\right)^{-1}\left(\frac{(1-m)^2}{4\sqrt{m}(1+m)}\right)\left[K_I\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)-K_{II}\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]+\frac{[A_1K_I+A_2K_{II}]}{4\sqrt{2\pi r}}-$$
$$-\frac{\sigma(1-\varepsilon)}{2\sqrt{2}}\left(\frac{r}{a}\right)^{-1/2}\left(\sqrt{\frac{2\sqrt{m}}{(1+m)}}\right)\left[\frac{1-m^2}{2m^2}\cos(2\beta)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+\frac{1+m^2}{2m^2}\sin(2\beta)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]-$$
$$-\frac{\sigma(1-\varepsilon)\cos(2\beta)(1+m)^2}{4m^2}.$$
$$\sigma_y \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\left(\frac{r}{a}\right)^{-1}\left(\frac{(1-m)^2}{4\sqrt{m}(1+m)}\right)\left[K_I\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)-K_{II}\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]+\frac{[B_1K_I+B_2K_{II}]}{4\sqrt{2\pi r}}+$$
$$+\frac{\sigma(1-\varepsilon)}{2\sqrt{2}}\left(\frac{r}{a}\right)^{-1/2}\left(\sqrt{\frac{2\sqrt{m}}{(1+m)}}\right)\left[\frac{1-m^2}{2m^2}\cos(2\beta)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+\frac{1+m^2}{2m^2}\sin(2\beta)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]+ \qquad (4)$$
$$+\frac{\sigma(1-\varepsilon)\cos(2\beta)(1-m)^2}{4m^2}$$
$$\tau_{xy} \approx -\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\left(\frac{r}{a}\right)^{-1}\left(\frac{(1-m)^2}{4\sqrt{m}(1+m)}\right)\left[K_I\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)+K_{II}\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]+\frac{[C_1K_I+C_2K_{II}]}{4\sqrt{2\pi r}}-$$
$$-\frac{\sigma(1-\varepsilon)}{2\sqrt{2}}\left(\frac{r}{a}\right)^{-1/2}\left(\sqrt{\frac{2\sqrt{m}}{(1+m)}}\right)\left[\frac{1-m^2}{2m^2}\cos(2\beta)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)-\frac{1+m^2}{2m^2}\sin(2\beta)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]+$$
$$+\frac{\sigma(1-\varepsilon)\sin(2\beta)}{2}\frac{1-m^2}{2m^2}$$

$$A_1=\cos\left(\frac{5\theta}{2}\right)+\frac{-1+26m-m^2}{8m}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), A_2=-\sin\left(\frac{5\theta}{2}\right)-\frac{-1+26m-m^2}{8m}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$B_1=-\cos\left(\frac{5\theta}{2}\right)+\frac{1+38m+m^2}{8m}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), B_2=\sin\left(\frac{5\theta}{2}\right)-\frac{1+38m+m^2}{8m}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$C_1=\sin\left(\frac{5\theta}{2}\right)-\frac{1+6m+m^2}{8m}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right), C_2=\cos\left(\frac{5\theta}{2}\right)-\frac{1+6m+m^2}{8m}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Для линейной трещины (m=1) формулы (4) совпадают с формулами[1].

Во **втором параграфе** приближенные формулы для тензора напряжений используются для вычисления компонент тензора напряжений в полярных координатах, с последующим использованием полученных выражений для решения задачи об угле страгивания трещины. Использование формулы для σ_θ, в совокупности с критерием максимального окружного напряжения, позволило численными методами найти теоретические значения для угла страгивания.

$$\begin{aligned}\sigma_\theta=&\frac{1}{4\sqrt{2\pi a}}\left(\frac{r}{a}\right)^{-3/2}\frac{(1-m)^2}{\sqrt{m}(1+m)}\left[K_I\cos\left(\frac{7\theta}{2}\right)-K_{II}\sin\left(\frac{7\theta}{2}\right)\right]+\\&+\frac{[A_1'K_I-A_2'K_{II}]}{4\sqrt{2\pi a}}\left(\frac{r}{a}\right)^{-1/2}+\frac{\sigma(1+\varepsilon)}{4}\left(\frac{r}{a}\right)^{-1/2}\frac{(1-m)(1+m)^{1/2}}{m^{3/4}}\cos\left(\frac{5\theta}{2}\right)+\\&+\frac{\sigma(1-\varepsilon)}{4m^2}\left[m^2\cos(2\beta+2\theta)-2m\cos2\beta+\cos(2\beta-2\theta)\right]+\frac{3r^{1/2}}{16a\sqrt{2\pi}}\frac{1+m}{2\sqrt{m}}\times\\&\times[B_1'K_I+B_2'K_{II}]+\frac{r^{1/2}\sigma(1-\varepsilon)}{4\sqrt{2a}}\sqrt{\frac{1+m}{2\sqrt{m}}}\left(\cos\left(\frac{5\theta}{2}-2\beta\right)-\frac{1}{m^2}\cos\left(\frac{5\theta}{2}+2\beta\right)\right)\end{aligned}\qquad(5)$$

$$A_1'=\left(3\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+\frac{17m^2+6m-15}{8m}\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right), A_2'=\left(3\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+\frac{15m^2-6m+15}{8m}\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right)$$

$$B_1'=\left(5\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+\frac{3m^2-10m+3}{16m}\cos\left(\frac{5\theta}{2}\right)\right), B_2'=\left(5\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+\frac{3m^2-10m+3}{16m}\sin\left(\frac{5\theta}{2}\right)\right)$$

Сравнение с экспериментальными данными и результатами применения критериев для трещины сведены в таблицу и графики и показали удовлетворительные результаты. Для линейной трещины (m=1) формулы (5) совпадают с формулами[1]. На рис. 4 показана зависимость угла страгивания θ_C трещины от угла наклона β полученная по одному

---

[1] Eftis J., Subramonian N. The inclined crack under biaxial load // Engineering Fract. Mech., 1978. V. 10. P. 43-67.

из критериев при двух разных значениях параметра эллиптического выреза $(1\text{-}m=1,\ 2\text{-}m=0.7)$.

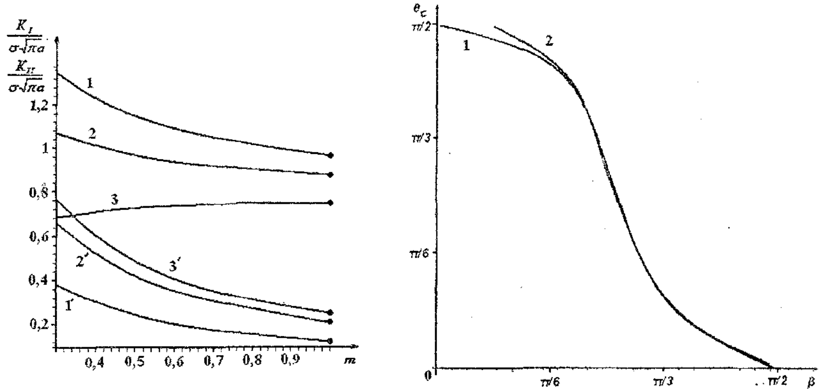

Рис. 3-4. Слева(рис.3) – теоретические зависимости КИН от параметра эллипса (1,1'- $\beta=15^\circ$;2,2'- $\beta=30^\circ$;3,3'- $\beta=45^\circ$,), справа(рис.4) - теоретическая зависимость угла страгивания от угла наклона

В **третьем параграфе** получены приближенные формулы для перемещений, которые могут быть использованы в деформационном критерии разрушения.

В **четвертом параграфе** рассматривается вопрос о соответствии полученных приближенных формул для тензора напряжений формулам Кригера-Париса[1] для притупленных трещин, учитывающих радиус кривизны дефекта ρ в его вершине. Формулы для компонент тензора напряжений обобщают формулы Кригера-Париса и имеют вид

$$\sigma_x \approx -\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\left(\frac{2r}{\rho}\right)^{-1}\left(\frac{(1+m)}{2\sqrt{m}}\right)\left[K_I\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)-K_{II}\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]+\frac{1}{4\sqrt{2\pi r}}\left[A_1K_I+A_2K_{II}\right]-$$
$$-\frac{\sigma(1-\varepsilon)}{2}\left(\frac{2r}{\rho}\right)^{-1/2}\left(\sqrt{\frac{2\sqrt{m}}{(1+m)}}\right)\frac{(1+m)^2}{2m^2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)-\frac{\sigma(1-\varepsilon)(1+m)^2}{2m^2}$$

$$\sigma_y \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\left(\frac{2r}{\rho}\right)^{-1}\left(\frac{(1+m)}{2\sqrt{m}}\right)\left[K_I\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)-K_{II}\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]+\frac{\left[B_1K_I+B_2K_{II}\right]}{4\sqrt{2\pi r}}-$$
$$+\frac{\sigma(1-\varepsilon)}{2}\left(\frac{2r}{\rho}\right)^{-1/2}\left(\sqrt{\frac{2\sqrt{m}}{(1+m)}}\right)\frac{(1+m)^2}{2m^2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+\frac{\sigma(1-\varepsilon)(1+m^2)}{2m^2} \qquad (6)$$

[1] Creager M., Paris P. Elastic field equations for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking // Int. Journal of Fracture Mechanics, 1967, v4 №3, p. 247-252.

$$\tau_{xy} \approx -\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\left(\frac{2r}{\rho}\right)^{-1}\left(\frac{(1+m)}{2\sqrt{m}}\right)\left[K_I \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)+K_{II}\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]+\frac{\left[C_1K_I+C_2K_{II}\right]}{4\sqrt{2\pi r}}-$$

$$-\frac{\sigma(1-\varepsilon)}{2}\left(\frac{2r}{\rho}\right)^{-1/2}\left(\sqrt{\frac{2\sqrt{m}}{(1+m)}}\right)\frac{(1+m)^2}{2m^2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

В **пятом и шестом параграфах** находятся приближенные формулы для интенсивности напряжений, максимального касательного напряжения и главных напряжений. Полученная формула используется для нахождения пластических зон около вершины дефекта. Результат показан на рис. 5 (параметры вырезов – $1-m=1,2-m=0.9,3-m=0.7$, двухосное нагружение с коэффициентом $\varepsilon=0.5$, нагрузкой $\sigma=0.3\sigma_T$, с углом $\beta=0$; показаны вершины вырезов для $m=0.7;0.9$).

В **седьмом параграфе** полученные формулы для главных напряжений и максимального касательного напряжения проверяются на экспериментальных данных при определении КИН методом голографической интерферометрии. Полученные результаты показывают удовлетворительное согласование теоретических формул с экспериментальными данными.

В **восьмом параграфе** полученные формулы для тензора напряжений используются для нахождения коэффициента концентрации напряжений около вершины эллиптического выреза.

$$\alpha_\sigma=\frac{NK_I}{\sigma\sqrt{\pi\rho}} \tag{7}$$

$$N=\left(\frac{(1+m)}{2\sqrt{m}}A^{3/2}+\frac{17m^2+30m-15}{32m}A^{1/2}\right)+\left[\frac{(1+m)}{2\sqrt{m}}\right]^{1/2}\frac{2m}{(m(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon))}\times$$

$$\times\frac{1-m}{1+m}\left\{(1+\varepsilon)\left[\frac{(1+m)}{2\sqrt{m}}\right]^{3/2}A^{1/2}+(1-\varepsilon)\left(\frac{1-m}{2m}\right)^2\right\};\quad A=\frac{(1+\sqrt{m})^2}{2(1+m)}$$

Полученный коэффициент N для линейной трещины $m=1$ равен 2, что обобщает ранее используемые формулы[1]. Методика вычисления ККН внутренних технологических дефектов стыкового шва подтверждается результатами полученными МКЭ.

Теоретические зависимости для коэффициента концентрации напряжений от параметра эллипса показаны на рис 6.

---

[1] Панасюк В.В„ Андрейкив А.Е., Ризнычук Р.В. Деформационный критерий локального разрушения упругопластических тел с щелевыми дефектами // Доклады АН СССР, 1987, Т. 296, № 4, стр. 808-811.

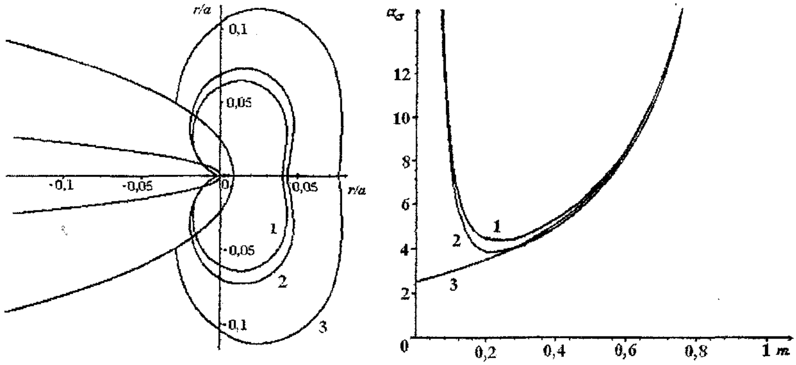

Рис. 5-6. Слева(рис.5) – теоретические пластические зоны для эллиптических вырезов с разным параметром эллипса, справа(рис.6) – теоретические зависимости коэффициента концентрации напряжений от параметра эллипса при трех вариантах приближения (1,2 – приближенные формулы, 3- точная формула).

В **девятом, десятом и одиннадцатом параграфах** рассматривается вопрос о точных формулах для тензора напряжений. Точные аналитические формулы для тензора напряжений в рассматриваемой задаче имеют вид:

$$\sigma_x = A_0 \cos 2\beta \left\{ -\frac{(1-m)^2}{m} - 4 \right\} + \left\{ 2A_1 + A_0 \frac{1-m^2}{m} \cos 2\beta \right\} F_1 + A_2 F_2 \times$$

$$\times \left\{ -\frac{(1-m)^2}{m} - 4 \right\} - (r\cos\theta + d) \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}} \frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} G_2 - r\sin\theta \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}} G_1$$

$$\sigma_y = A_0 \frac{(1-m)^2}{m} \cos 2\beta + \left\{ 2A_1 - A_0 \frac{1-m^2}{m} \cos 2\beta \right\} F_1 + A_2 F_2 \frac{(1-m)^2}{m} + \qquad (8)$$

$$+(r\cos\theta + d) \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}} \frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} G_2 + r\sin\theta \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}} G_1$$

$$\tau_{xy} = A_0 \frac{1-m^2}{m} \sin 2\beta + 2r\sin\theta \frac{a^2}{(rr')^{3/2}} G_2 - A_0 F_2 \frac{1-m^2}{m} \cos 2\beta -$$

$$- A_0 F_1 \frac{1+m^2}{m} \sin 2\beta - 2(r\cos\theta + d) \frac{a^2}{(rr')^{3/2}} \frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} G_1$$

$$A_0 = \frac{\sigma(1-\varepsilon)}{4m};\ A_1 = \frac{\sigma[m(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)\cos 2\beta]}{4m};\ A_2 = \frac{\sigma(1-\varepsilon)\sin 2\beta}{4m};\ B_1 = \frac{1+m^2}{(1+m)^2}$$

$$G_1 = A_1 \sin\frac{3(\theta+\theta')}{2} - A_2 \cos\frac{3(\theta+\theta')}{2},\quad G_2 = A_1 \cos\frac{3(\theta+\theta')}{2} + A_2 \sin\frac{3(\theta+\theta')}{2}$$

$$F_1 = \frac{(r\cos\theta+d)\cos\frac{\theta+\theta'}{2}+r\sin\theta\sin\frac{\theta+\theta'}{2}}{\sqrt{rr'}},\ F_2 = \frac{-(r\cos\theta+d)\sin\frac{\theta+\theta'}{2}+r\sin\theta\cos\frac{\theta+\theta'}{2}}{\sqrt{rr'}}$$

Все основные параметры взяты из задачи и совпадают с аналогичными для приближенных формул. Для определения r', θ' требуется решить систему

$$\begin{cases} r'\cos\theta' = 2d + r\cos\theta \\ r'\sin\theta' = r\sin\theta \end{cases}$$

Полученные формулы сравниваются с приближенными для определения зон применимости приближенных выражений. Для линейной трещины ($m=1$) формулы (8) совпадают с формулами[1]. Проверка точных формул на экспериментальных данных для определения КИН методом голографической интерферометрии показывают хорошее совпадение теоретических формул с данными эксперимента.

В **четвертой главе** рассматривается математическая модель роста усталостных трещин в упрочняющихся упругопластических материалах. В уточненной модели получены формулы для размера пластической зоны

$$\frac{p\pi}{2\sigma_T} = k_2 m \arccos\left(\frac{l}{L}\right) - \frac{(k_1 - k_2 m)}{(L-l)}\left(l \arccos\left(\frac{l}{L}\right) - \sqrt{L^2 - l^2}\right) \tag{9}$$

здесь l - длина трещины, L - длина трещины с пластической зоной, $k_1 = 0.94, k_2 = 0.93$ - коэффициенты учитывающие упрочнение материала, $m = \sigma_B / \sigma_T$, p - внешняя нагрузка. Формула для перемещения берегов трещины

$$\begin{aligned} v(x,l,L) = \frac{\sigma_T}{\pi E}\Big\{k_2 m\big((x-l)\Gamma(L,x,l) - (x+l)\Gamma(L,x,-l)\big) + \frac{(k_1 - k_2 m)}{(L-l)} \times \\ \times\left[\frac{1}{2}(x-l)^2\Gamma(L,x,l) + \frac{1}{2}(x+l)^2\Gamma(L,-x,l) + 2\sqrt{L^2-x^2}\sqrt{L^2-l^2}\right]\Big\} \end{aligned} \tag{10}$$

$$\Gamma(L,x,\xi) = \ln\left(\frac{L^2 - x\xi - \sqrt{(L^2-x^2)(L^2-\xi^2)}}{L^2 - x\xi + \sqrt{(L^2-x^2)(L^2-\xi^2)}}\right)$$

---

[1] Theocaris P.S., Michopoulos J.G. A closed-form solution of a slant crack under biaxial loading // Engineering Fract. Mech., 1983. V. 17. № 2. P. 97-123.

здесь x - переменная вдоль оси трещины.

При коэффициентах $k_1 = 1, k_2 = 1$ формулы (9) и (10) соответствуют формулам[1].

Следуя обобщенной энергетической концепции Г.П. Черепанова рассмотрено удлинение трещины от l до $l+\Delta l$. Работа деформирующих сил в пластической зоне связана с константой материала γ_*. Получено уравнение на связь длины l с безразмерной величиной $\beta = (p\pi)/(2\sigma_T)$

$$\frac{\partial\beta}{\partial\lambda} = \left(1 - \frac{1}{2}\lambda\left[I_1\Big/\left(\frac{\sigma_T^2 l}{\pi E}\right)\right]\right)\Big/\frac{1}{2}\lambda^2\left[I_2\Big/\left(\frac{\sigma_T^2 l^2}{\pi E}\right)\right] = \Phi(\varphi,\lambda,m) \qquad (11)$$

Формулы для значений I_1 и I_2 не приводятся ввиду громоздкости. Для $m = 1, k_1 = k_2 = 1, L/l = \sec\alpha$ (модель без упрочнения) полученное уравнение совпадает с известными[2].

В **пятой главе** рассматривается вопрос о разрушении цилиндрической оболочки с осевым поверхностным эллиптическим дефектом. Схематическое изображение эллиптического дефекта дано на рис. 2. Используя предположение о суперпозиции комплексных потенциалов для поверхностного дефекта, деформационный критерий разрушения и полученные в первой главе формулы для эллиптического выреза найдена система уравнений для вычисления разрушающего кольцевого напряжения σ_θ

$$\delta_c = \frac{4l\sigma}{\pi E}\left[\frac{J_a}{a}\pi\left(1-\frac{d}{t}\right)\left(k_1\frac{\sigma_B}{\sigma_T} - k_2\right)\sum_{i=1}^{k} a_i A_i + \frac{2d}{t}\ln tg\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + \right.$$
$$+\pi\frac{d}{t}\frac{1-m}{1+m}\frac{\sin(2\alpha)}{2} - \frac{J_a}{a}\pi\left(1-\frac{d}{t}\right)\left\{k_1\frac{\sigma_B}{\sigma_T}\left(1-\sum_{i=1}^{k} a_i A_i\right) + k_2\sum_{i=1}^{k} a_i A_i\right\}\frac{1-m}{1+m}\times \qquad (12)$$
$$\left.\times\frac{m(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)+(1+\varepsilon)m} - 2\alpha\cos(\alpha)\frac{d}{t}\frac{1-m}{1+m}\frac{m(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)+(1+\varepsilon)m}\right]$$

$$\left(1-\frac{d}{t}\right)\left(k_1\frac{\sigma_B}{\sigma_T}\left(1-\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i C_{2i}^i}{2^{2i}}\right) + k_2\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i C_{2i}^i}{2^{2i}} - \frac{\sigma_\theta}{\sigma_T}\right)\cos(\alpha) + \frac{2\alpha}{\pi}\frac{d}{t} = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_T}\frac{d}{t} \qquad (13)$$

здесь d–глубина, $2l$–длина трещины, a - длина трещины с пластической зоной, t–толщина стенки трубы, $l = a\cos(\alpha)$, $k_1 = 0.94$, $k_2 = 0.93$ - коэффициенты учитывающие упрочнение материала, m - параметр эллипса, $\sigma(x) = (k_1\sigma_B - (k_1\sigma_B - k_2\sigma_T)(\sum_{i=1}^{k} a_i (x/l)^{2i}))$ - распределение

---

[1] Каминский А.А. Разрушение вязко-упругих тел с трещинами. Неклассические проблемы механики разрушения. Киев: Наук. Думка, 1990. Т.1. 310 с.

[2] Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М. : Наука, 1974. 640 с.

напряжений в пластической зоне, $A_i = \frac{1}{2^{2i}} \sum_{m=0}^{i-1} C_{2i}^{m} (-1)^{i-m} \left(\frac{1}{2i-2m+1} + \frac{1}{2i-2m-1} \right)$ - числовой коэффициент, $J_a = a \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 x + \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^2 \cos^2 x}\, dx$ - четверть длины эллипса с параметром m и большой полуосью a, δ_c - критическое раскрытие трещины. Формулы (12), (13) для линейного случая $(m=1)$ позволяют получить явную аналитическую формулу для окружного напряжения σ_θ:

$$\alpha = 2tg^{-1}\left(\exp\left(\frac{t}{d} \left(\frac{\delta_c \pi E}{8l\sigma_T} - \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{d}{t}\right)\left(k_1 \frac{\sigma_B}{\sigma_T} - k_2\right) \sum_{i=1}^{k} a_i A_i \right)\right)\right) - \frac{\pi}{2} \qquad (14)$$

$$\frac{\sigma_\theta}{\sigma_T} = \frac{\frac{2\alpha}{\pi}\frac{d}{t} + \cos(\alpha)\left(1 - \frac{d}{t}\right)\left(k_1 \frac{\sigma_B}{\sigma_T}\left(1 - \sum_{i=1}^{k} a_i \frac{C_{2i}^{i}}{2^{2i}}\right) + k_2 \sum_{i=1}^{k} a_i \frac{C_{2i}^{i}}{2^{2i}}\right)}{(d/t) + (1 - d/t)\cos\alpha} \qquad (15)$$

Система (12), (13) не решается аналитическими методами, но может быть решена численно. Система была опробована на экспериментальных данных[1] и показала удовлетворительные результаты, близкие к результатам[2], на относительно небольших глубинах дефектов $d/t < 0.7$.

В **заключении** суммируются основные результаты диссертационной работы, выносимые на защиту, приводятся данные о публикациях и апробациях автора по теме диссертации, и рассматриваются направления дальнейших исследований.

Основные результаты диссертационной работы

На защиту выносятся следующие новые научные результаты.

1. Построена математическая модель НДС пластины с центральным эллиптическим отверстием при двухосном нагружении. Получены приближенные формулы для тензора напряжений и перемещений около вершины отверстия, которые в частном случае превращаются в ранее известные формулы для линейной трещины. В компонентах тензора напряжений появилось новое слагаемое, меняющее асимптотику поведения компонент тензора напряжений и значений перемещений.

---

[1] Красовский А.Я., Красико В.Н. Трещиностойкость сталей магистральных трубопроводов. Киев: Наук. Думка, 1990. 171 с.

[2] Красовский А.Я., Орыняк И.В., Тороп В.М. Вязкое разрушение цилиндрических тел с аксиальными трещинами, нагруженных внутренним давлением // Проблемы прочности. 1990. №2. С. 16-20.

2. Получены точные и приближенные аналитические формулы для тензора напряжений и перемещений около вершины отверстия для задачи о двухосном нагружении пластины с наклонным эллиптическим отверстием, которые обобщают формулы для линейной трещины.

3. Предложен метод определения разрушающего кольцевого напряжения при вязком разрушении цилиндрической оболочки с продольным поверхностным эллиптическим дефектом на основе деформационного критерия (раскрытия трещины). Показано хорошее соответствие аналитических формул и экспериментальных гидравлических испытаний, полученных иностранными и российскими ученых. Погрешность составила не более 6%.

В заключении автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю д.т.н. Остсемину А.А. за постановку задач, поддержку, полезные замечания и обсуждения, помощь в работе.

Публикации по теме диссертации

Статьи, опубликованные в журналах из списка ВАК

1. Остсемин А.А. Напряженное состояние наклонного эллиптического дефекта и коэффициенты интенсивности напряжений при двухосном нагружении пластины / А.А. Остсемин, П.Б. Уткин // Приклад. механика и техн. физика. – 2009. – №1. – С. 118-128.
2. Остсемин А.А. Теоретические и экспериментальные исследования по механике разрушения трещиноподобных дефектов при двухосном нагружении / А.А. Остсемин, П.Б. Уткин // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2009. – №2. – С. 130-142.

Другие публикации

3. Остсемин А.А. Применение критериев упруго-пластической механики разрушения при оценке свойств сварных соединений / А.А. Остсемин, П.Б. Уткин // Вопросы материаловедения. – 2007. – №3(51). – С. 151-160.
4. Остсемин А.А. Расчет коэффициентов концентрации напряжений внутренних технологических сварочных дефектов / А.А. Остсемин, П.Б. Уткин // Вестник машиностроения. – 2008. – №12. – С. 14-17.
5. Остсемин А.А. Математическая модель НДС цилиндрической оболочки с осевым трехмерным дефектом / А.А. Остсемин, П.Б. Уткин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2008. – Вып.2. – №27(127). – С. 71-77.
6. Остсемин А.А. Упруго-пластическое разрушение труб с поверхностной трещиной / А.А. Остсемин, П.Б. Уткин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2006. – Вып.7. – №7(84). – С. 130-136.

7. Остсемин, А.А. К вопросу о предельном равновесии пластин с трещиноподобными дефектами / А.А. Остсемин, П.Б. Уткин // Изв. Челяб. научного центра. – 2006. – №4(34). – С. 1-6.
8. Остсемин А.А. Нормы отбраковки осевых поверхностных трещиноподобных дефектов магистральных газонефтепроводов / А.А. Остсемин, П.Б. Уткин // Материалы конференции "Проблемы и методы обеспечения надежности и безопасности систем транспорта нефти, нефтепродуктов и газа.": тез. докл. – Уфа, 2006. – С. 69-71.
9. Остсемин А.А. Вязкое разрушение трубопроводов с поверхностной трещиной / А.А. Остсемин, П.Б. Уткин // Материалы конференции "Проблемы и методы обеспечения надежности и безопасности систем транспорта нефти, нефтепродуктов и газа.": тез. докл. – Уфа, 2006. – С. 77-78.
10. Остсемин А.А. Деформационный критерий разрушения сварных соединений с трещиноподобными дефектами / А.А. Остсемин, П.Б. Уткин // Материалы конференции "Проблемы и методы обеспечения надежности и безопасности систем транспорта нефти, нефтепродуктов и газа.": тез. докл. – Уфа, 2006. – С. 383-385.
11. Остсемин А.А., Уткин П.Б. Применение критериев упруго-пластической механики разрушения при оценке свойств сварных соединений // Тезисы докладов научно-практической конференции "Прочность и долговечность сварных конструкций в тепловой и атомной энергетике", ЦНИИ КМ "Прометей", Санкт-Петербург, 25-27 сент., 2007г. – СПб., 2007. – С. 58.
12. Уткин П.Б. Напряженное состояние и коэффициенты интенсивности напряжения пластины с наклонным эллиптическим вырезом // Наука ЮУрГУ, материалы 60-й юбилейной научной конференции. – 2008. – Т.2. – С. 155-158.