На правах рукописи

Келлер Алевтина Викторовна

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

ЧЕЛЯБИНСК – 2011

Работа выполнена в Южно-Уральском государственном университете.

Научный консультант:

доктор физико-математических наук,
профессор Свиридюк Георгий Анатольевич.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Чистяков Виктор Филимонович;
доктор физико-математических наук,
профессор Кадченко Сергей Иванович;
доктор физико-математических наук,
доцент Сукачева Тамара Геннадьевна.

Ведущая организация:

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет».

Защита состоится 30 ноября 2011 года в 12.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.298.14 при Южно-Уральском государственном университете, по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, ауд. 1001.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южно-Уральского государственного университета.

Автореферат разослан « » октября 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, профессор **Л. Б. Соколинский**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация посвящена разработке новых качественных и приближенных методов исследования математических моделей экономических и технических систем, реализуемых в виде класса задач оптимального управления для вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Актуальность обусловлена наличием большого количества прикладных задач и тем, что их решение требует построения алгоритмов, трудно реализуемых в численных расчетах и базирующихся на результатах современных математических теорий. Именно развитие теорий уравнений соболевского типа и оптимального управления позволило поставить вопрос о численном исследовании как существующих задач для вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, так и новых задач в рамках сложившихся направлений математического моделирования, например, моделей межотраслевого баланса.

Балансовые модели, или модели В. Леонтьева[1], успешно разрабатывались как сложные межотраслевые модели и модельные комплексы с последующим прогнозным расчетом развития. Широко известны работы А.О. Баранова, Н.И. Ведуты, А.Г. Гранберга, Б.Л. Исаева, Ф.Н. Клоцвога, В.И. Маевского, В.К. Озерова, В.Н. Павлова, Н.Ф. Шатилова, Ю.В. Яременко и др. Впервые оптимизационные межотраслевые межрегиональные модели построил А.Г. Гранберг[2], им исследовалась задача оптимального управления для динамической балансовой модели с начальным условием Коши, где в качестве функционала качества принято потребление конечного продукта. Затем в монографии под редакцией В.Ф. Кротова[3] аналогичная задача была рассмотрена для вырожденной динамической модели.

В настоящее время теория межотраслевого баланса активно развивается. В нашей стране ведутся исследования в ИЭОПП СО РАН

---

[1] *Леонтьев, В.В.* Межотраслевая экономика / В.В. Леонтьев.– М.: Экономика, 1997.

[2] *Гранберг, А. Г.* Динамические модели народного хозяйства / А.Г. Гранберг. - М.: Экономика, 1985. - 239 с.

[3] Основы теории оптимального управления / В.Ф. Кротов, Б.А. Лагоша, С.М. Лобанов и др.; под ред. В.Ф. Кротова. – М.: Высш.шк., 1990. – 430 с.

под руководством чл.-корр. В.И. Суслова, в ставропольской школе Е.Л. Торопцевым и его учениками Т.Г. Гурнович, О.О. Бутовой, Мараховским А.С. и в др. коллективах. За рубежом исследования в области балансовых моделей ведутся К. Алмоном, Д. Найхусом, Р. Хорстом, Дж. Верлингом, Т. Хасегава, Ш. Ли, Ш. Пэном, Г. Осханом, П. Салмоном, Б. Стовером и Ф. Улрихом и др.

Отметим, что при построении динамической балансовой модели матрица удельных капитальных затрат, т.е. матрица при производной, всегда содержит нулевые строки. Таким образом, изначально динамическая система является вырожденной, но ее решение классическими методами невозможно, поэтому обычно агрегированием она сводится к невырожденной, но при этом требуются специальные методики как для построения матриц, так и для интерпретации результатов с дополнительным анализом их адекватности. Отличие данной работы состоит в том, что предлагаемые в ней подходы позволяют исследовать получаемые вырожденные динамические балансовые модели без дополнительных преобразований.

Вырожденная система обыкновенных дифференциальных уравнений является конечномерным случаем уравнения соболевского типа. Несмотря на то, что систематическое изучение начально-краевых задач для таких уравнений начал С. Л. Соболев в 40-х годах прошлого столетия, теория уравнений соболевского типа активно развивается последние 20 лет. В этой области активно работают Р.Е. Шоуолтер, А.Фавини, А.Яги, Г.В. Демиденко, С.В. Успенский, Н.В. Сидоров, М.В. Фалалеев, М.О. Корпусов, И.В. Мельникова, С.Г. Пятков, А.И. Кожанов, Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева, В.Е. Федоров и др. Данная диссертационная работа выполнена в рамках направления, возглавляемого Г.А. Свиридюком[4]. Отметим, что результаты исследования задач с начальным условием Шоуолтера–Сидорова для уравнений соболевского типа, послужившие базой для данного исследования, появились сравнительно недавно.

В работах А.Г. Гранберга показана неустойчивость решений ди-

[4] *Sviridyuk, G. A.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov.– Utrecht: VSP, 2003.– 216 pp.

намической балансовой модели, проявляющаяся в разбалансированности экономической системы. Для того, чтобы избежать этого, необходимо управлять экономической системой. Вместе с тем управление в рыночных условиях предусматривает различное целеполагание, а не только повышение потребления, как в ранее исследуемых задачах. Это актуализирует моделирование экономических систем с построением различных задач оптимального управления для вырожденной динамической балансовой модели.

Теория оптимального управления для неразрешенных относительно производной уравнений активно развивается последние десятилетия. Одной их первых работ, посвященных управлению сингулярными системами, является монография L. Dai[5], в которой рассматриваются и прикладные аспекты проблемы. В этой области широко известны работы Ж.-Л. Лионса[6], А.В.Фурсикова[7], Г.А. Куриной, С.Л. Кэмбелла, В.Д. Террела, П. Мюллера. Теоретической базой данного исследования стали работы Г.А. Свиридюка, А.А. Ефремова, О.А. Рузаковой, Н.А. Манаковой, В.Е. Федорова, М.В. Плехановой.

В настоящее время численные методы решения как начальных задач для вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, так и задач оптимального управления для этих систем находятся в стадии формирования. Здесь необходимо отметить работы представителей иркутской математической школы – Ю. Е. Бояринцева[8], В. Ф. Чистякова[9], М.В. Булатова, А.А. Щегловой, челябинской математической школы – Г.А. Свиридюка, С.В. Брычева и И.В. Бурлачко. Свиридюком Г.А. впервые было предложено вырожденные

---

[5] *Dai L.* Singular control system: Lecture notes in control and information sciences, 118./ L. Dai – Berlin, Heidelberg. N.Y.: Springler–Verlag, 1989.

[6] *Лионс, Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс.– М.: Мир, 1972.– 412 с.

[7] *Фурсиков, А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А.В. Фурсиков.– Новосибирск: Научная книга, 1999.– 350 с.

[8] *Бояринцев, Ю. Е.* Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Е. Бояринцев.– Новосибирск: Наука, 1988.– 257 с.

[9] *Чистяков, В. Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром / В. Ф. Чистяков.– Новосибирск: Наука, 1996.– 278 с.

системы обыкновенных дифференциальных уравнений называть «системами леонтьевского типа». В процессе моделирования к системе леонтьевского типа, кроме начальных, могут добавляться условия, определяемые реальным объектом, поэтому получаемую модель будем называть в данном исследовании «моделью леонтьевского типа».

Актуальность данного исследования подтверждает и то, что полученные результаты могут быть использованы как в решении существующих задач гидродинамики[10], метрологии[11], так и в решении новых, например, задач оптимального измерения, предложенных А.Л. Шестаковым и Г.А. Свиридюком. Численные исследования задачи оптимального измерения с учетом инерционности измерительного устройства в настоящее ведутся Е.И. Назаровой, работа включена в тематику направления развития «Энергосбережение в социальной сфере» программы «Национальный исследовательский университет» ЮУрГУ.

Цель и задачи работы Целью данной работы является разработка, исследование и реализация в виде программного комплекса методов и алгоритмов численного решения класса задач оптимального управления для моделей леонтьевского типа с начальным условием Шоуолтера – Сидорова.

Для достижения цели необходимо реализовать следующие задачи:

1. Сформировать класс задач оптимального управления для систем и моделей леонтьевского типа, определить критерии выбора задачи оптимального управления и ввести параметры, необходимые при моделировании экономической системы.

2. Разработать численный метод решения задачи Шоуолтера – Сидорова для систем леонтьевского типа с последующей адаптацией его для вырожденных динамических балансовых моделей (моделей леонтьевского типа)

3. Разработать численный метод решения задач оптимального и

---

[10] *Зильберглейт А. С.* Спектральная теория регулярных волноводов / А.С. Зильберглейт, Ю.И. Копилевич. – Л.: Изд-во АН СССР ФТИ, 1983. – 301 с.

[11] *Шестаков, А. Л.* Динамическая точность измерительного преобразователя с корректирующим устройством в виде модели датчика / А.Л. Шестаков // Метрология. – 1987. – № 2. – С. 26 – 34.

жесткого управления для систем леонтьевского типа с начальным условием Шоуолтера – Сидорова. Доказать сходимость приближенного решения к точному. Адаптировать результаты для модели леонтьевского типа

4. Разработать численный метод решения задач стартового и стартового жесткого управления для систем леонтьевского типа с начальным условием Шоуолтера – Сидорова. Доказать сходимость приближенного решения к точному. Адаптировать результаты для модели леонтьевского типа

5. Разработать методику построения модели леонтьевского типа для предприятия с учетом управления на основе метода построения балансовой модели с учетом «экспорта – импорта» и данных финансовой отчетности предприятия. Опробировать методику на одном из предприятий г. Челябинска.

6. Спроектировать и реализовать программный комплекс для решения задач Шоуолтера – Сидорова, оптимального и жесткого управления, стартового и стартового жесткого для моделей леонтьевского типа.

7. Провести вычислительные эксперименты на модельных и реальных задачах, подтверждающих эффективность предложенных алгоритмов, методов и подходов.

8. Показать возможность применения полученных результатов для моделей других предметных областей.

Методы исследования В работе используются следующие методы исследования: моделирование с использованием системного подхода, абстрактно-логический с использованием методов теории оптимального управления, теории уравнений соболевского типа, эмпирический с использованием проектного подхода.

В основе построения динамической балансовой модели для экономической системы предприятия лежат методы межотраслевого баланса с учетом экспорта и импорта. Использование системного подхода позволило поставить четыре основных вида задач оптимального управления, при этом введение в рассмотрение различных параметров моделирования дало возможность решения большего количества

видов прикладных задач.

В исследовании в качестве основных используются методы теории оптимального управления и вырожденных полугрупп. Метод численного решения задач оптимального и жесткого управления основан на представлении управления в виде вектор-многочленов.

При построении вырожденной динамической балансовой модели предприятия МУП «Производственное объединение водоснабжения и водоотведения» (ПОВВ) и проведении вычислительных экспериментов на базе этого предприятия использован эмпирический метод. При этом проводились длительные исследования, для организации которых использовались элементы проектного подхода, позволившего определить целостность эксперимента, стадии и порядок его разработки.

Научная новизна. В диссертационной работе предлагаются новые подходы в моделировании экономических и технических задач, основанные на использовании класса четырех задач оптимального управления, а основополагающим математическим объектом которых является система леонтьевского типа. Результаты диссертационной работы содержат подробное численное исследование указанных задач: представлены постановки задач, доказаны теоремы о существовании и единственности решения, разработаны и обоснованы эффективные численные методы решения. Отметим, что предлагаемые в данной работе алгоритмы, в отличие от ранее известных, не накладывают ограничения на размер и вид матриц, входящих в систему леонтьевского типа, что обусловлено использованием в качестве начального условия Шоуолтера–Сидорова. Кроме того предложенные алгоритмы могут быть адаптированы к решению задач оптимального управления для моделей леонтьевского типа. Разработан пакет прикладных программ, позволяющих проведение вычислительных экспериментов на модельных и реальных примерах.

Все результаты, выносимую на защиту, являются новыми и получены автором лично. Обоснованность научных положений и выводов, сформулированных в диссертации, подкрепляется сопоставительным анализом разработанных и уже существующих методов и моделей.

Достоверность полученных результатов обеспечена полными доказательствами всех утверждений, причем математическая строгость доказательств соответствует современному уровню. Адекватность построенных моделей, разработанных программ, основанных на подходе, предлагаемом автором, подтверждается тестовыми расчетами на реальном примере.

Теоретическая значимость. Теоретическая значимость результатов и методов диссертационной работы заключается в возможности их использования в качестве инструментария для моделирования в экономике и технике. В работе определены условия выбора задачи оптимального управления из рассматриваемого класса для экономических приложений, предложены новые параметры, необходимые при моделировании экономической системы предприятия, показаны их значимость и экономический смысл. Разработаны методы численного решения начальной задачи Шоуолтера – Сидорова для системы и модели леонтьевского типа, численного решения задач оптимального, жесткого, стартового, стартового жесткого управления, доказана сходимость по норме получаемого приближенного решения к точному для всех задач.

Практическая значимость заключается в применении полученных результатов исследования к задачам прогнозирования и планирования работы экономических систем различного уровня, и прежде всего работы экономической системы предприятия, на основании моделирования и получаемых результатов численного исследования моделей может быть оценена эффективность планирования; разработке и реализации на примере конкретного предприятия методики построения вырожденной балансовой модели предприятия. Проведенные вычислительные эксперименты с использованием полученной модели показали адекватность проведенного экономико-математического моделирования. Полученные результаты могут быть использованы для решения одной из значимых хозяйственных задач – управления транзакционными издержками при развитии предприятия, и в том числе при реализации инновационных проектов. Данная работа создает основу для развития численных исследований новых задач

теории динамических измерений. Для проведения вычислительных экспериментов численные методы и алгоритмы реализованы в виде комплекса программ (C++), причем использованы такие подходы, которые в дальнейшем позволят провести распараллеливание процессов для увеличения скорости вычислений и решения практических масштабных задач.

Результаты диссертации могут быть использованы в исследованиях, проводимых по указанным тематикам, а также при разработке специальных курсов в основных образовательных программах подготовки магистров по направлениям 010100 – математика и 010400 – прикладная математика и информатика.

Результаты, выносимые на защиту.

1. Предложена новая методология моделирования экономической системы предприятия с использованием задач оптимального управления для моделей леонтьевского типа и введением в рассмотрение параметров моделирования, позволяющих на базе одной математической модели решать различные экономические задачи.

2. Разработана методика построения модели леонтьевского типа для предприятия с учетом управления на основе метода построения балансовой модели с учетом «экспорта - импорта» и данных финансовой отчетности предприятия. Опробирована методика на предприятии г. Челябинска МУП ПОВВ.

3. Исследована устойчивость моделей леонтьевского типа. Показано в терминах относительного спектра, что решение вырожденной динамической балансовой модели всегда неустойчиво.

4. Разработан численный метод решения задачи Шоуолтера – Сидорова для систем и моделей леонтьевского типа.

5. Разработан численный метод решения задач оптимального и жесткого управления для систем и моделей леонтьевского типа с начальным условием Шоуолтера – Сидорова. Доказана сходимость по норме приближенного решения задачи оптимального и жесткого управления к точному.

6. Разработан численный метод решения задач стартового и стартового жесткого управления для систем и моделей леонтьевского ти-

па с начальным условием Шоуолтера – Сидорова. Доказана сходимость по норме приближенного решения задачи стартового и стартового жесткого управления к точному.

7. Спроектирован и реализован программный комплекс (три программы) для решения задач Шоуолтера – Сидорова, оптимального и жесткого управления, стартового и стартового жесткого для моделей леонтьевского типа с начальным условием Шоуолтера – Сидорова. Показана эффективность предложенных алгоритмов на основании вычислительных экспериментов, проведенных на модельных и реальных задачах.

Полученные результаты соответствуют следующим областям исследования специальности:

1) разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений;

2) развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей;

3) разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий;

4) реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов.

Апробация работы. Результаты, изложенные в диссертации были представлены на Воронежской зимней математической школе С.Г. Крейна (Воронеж, 1995, 1997, 1998, 2010), Всесоюзной научно-технической конференции «Алгоритмический и численный анализ некорректных задач» (Екатеринбург, 1995, 1998, 2009), Сибирской конференции по неклассическим уравнениям математической физики (Новосибирск, 1995), VI межвузовской конференции «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 1996), Третьем Сибирском конгрессе по прикладной и индустриальной математике (Новосибирск, 1998), Ninth International Colloquim on Differential Equations (Bulgaria, 1998), 10-й международной конференции «Математика. Компьютер. Образование» (Москва, 2003), Международной конферен-

ции, посвященной 100-летию со дня рождения И.Н. Векуа «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения» (Новосибирск, 2007), Международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы» (Стерлитамак, 2008), Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений» (Новосибирск, 2008), XIV Байкальской школе-семинаре (Северобайкальск, 2008), X-XII, XV Всероссийских симпозиумах по прикладной и промышленной математике (Санкт-Петербург, Сочи, Казань, 2009 - 2011), Третьей Международной конференции «Математическое моделирование социальной и экономической динамики» (Москва, 2010), Всероссийском научном семинаре «Неклассические уравнения математической физики», посвященный 65-летию со дня рождения В.Н. Врагова (Якутск, 2010), Международной конференции «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория эксперимент, практика», посвященная 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко (Новосибирск, 2011), Международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» (Самара, 2011)

Также результаты докладывались на семинарах по уравнениям соболевского типа профессора Г. А. Свиридюка в ЮУрГУ (г. Челябинск), на семинаре ИММ УрО РАН под руководством чл.-корр. РАН В.В. Васина (г. Екатеринбург), на семинарах ИПУ РАН под руководством академика С.Н. Васильева и профессора В.Ф. Кротова (г. Москва), на семинаре МаГУ под руководством профессора С.И. Кадченко (г. Магнитогорск), на семинаре ИМ СО РАН под руководством профессора А.И. Кожанова (г. Новосибирск).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 34 научных работах и приведены в конце автореферата, в том числе 10 – в изданиях, включенных в перечень российских рецензируемых научных журналов ВАК РФ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, шести глав, списка литературы и приложений. Объем диссертации составляет 249 страниц. Библиография содержит 212 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во введении обосновывается актуальность темы **исследования**, дается обзор литературы по исследуемой проблематике, **определяется** цель работы.

Первая глава состоит из семи параграфов и содержит формулировки теорем и определения, которые используются для получения основных результатов диссертации. Первый параграф содержит определения и теоремы об относительно p-ограниченных операторах, теорему об относительном спектре. В п.1.2 приводятся определения и теоремы об инвариантных пространствах линейного уравнения соболевского типа и дихотомиях решений такого уравнения. В п.1.3 приводятся определения и теоремы об относительно p-радиальных операторах. В п.1.4. приводятся постановки класса задач оптимального управления для линейного уравнения соболевского типа и теоремы о существовании и единственности решений таких задач. В п.1.5. содержатся определения и теоремы об относительно p-регулярных матрицах. Пусть L и M – квадратные матрицы порядка n, $detL = 0$, матрица M называется (L,p)-регулярной, если существует $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что $det(\lambda L - M) \neq 0$, а ∞ является полюсом порядка $p \in \{0\} \bigcup \mathbb{N}$. В п.1.6 ставится задача Шоуолтера – Сидорова

$$\left[R_\mu^L(M)\right]^{p+1}(x(0) - x_0) = 0 \tag{1}$$

для системы леонтьевского типа

$$L\dot{x} = Mx + y, \tag{2}$$

где $detL = 0$, а вектор-функция $y : [0;\tau] \to \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{R}_+$. На основании существования и единственности решения задачи Шоуолтера – Сидорова (1) для уравнения соболевского типа вида (2) в банаховых пространствах справедлива

Теорема 1.(1.6.1)[12]. *Пусть матрица M (L,p)–регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, кроме того $detM \neq 0$. Тогда для любой вектор–функции*

[12]В скобках указана нумерация в диссертации.

$y \in \mathbb{C}^{p+1}([0;\tau],\mathbb{R}^n)$ и любого вектора $x_0 \in \mathbb{R}^n$ такого, что существует единственное решение $x = x(t)$ задачи (1), (2), *которое к тому же имеет вид*

$$x(t) = \lim_{k\to\infty} x_k(y,t) = \lim_{k\to\infty}\left[-\sum_{q=0}^{p}\left(M^{-1}(I-Q_k)L\right)^q M^{-1}(I-Q_k)y^q(t)+\right.$$

$$\left.+X_k^t x_0 + \int_0^t R_k^t\left(kL_k^L(M)\right)^{p+1} y(s)ds\right]. \qquad (3)$$

Здесь $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ – левая L–резольвента матрицы M, $Q_k = \left(kL_k^L(M)\right)^{p+1}$, $X_k^t = \left(\left(L - \frac{t}{k(p+1)}M\right)^{-1} L\right)^{k(p+1)}$, $R_k^t = \left[\left(L - \frac{t-s}{k(p+1)}M\right)^{-1} L\right]^{k(p+1)-1}\left(L - \frac{t-s}{k(p+1)}M\right)^{-1}$, а I – единичная матрица порядка n.

При нахождении приближенного решения для вычисления определенного интеграла используется квадратная формула Гаусса. С учетом этого в условиях теоремы 1 приближенное решение задачи (1), (2) примет вид

$$\widetilde{x}_k(y,t) = -\sum_{q=0}^{p}\left(M^{-1}(I-Q_k)L\right)^q M^{-1}(I-Q_k)y^{(q)}(t)+$$

$$+X_k^t x_0 + \frac{\tau}{2}\sum_{j=1}^{\eta} R_k^{t-t_j} Q_k y(t_j)\omega_j, \qquad (4)$$

где $t_j = \frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2}s_j$, ω_j – веса, s_j – узлы квадратурной формулы Гаусса, а $k > K$, такого что $K = max\{k_1;k_2\}$, где $t \in [0,1]$,

$$k_1 > \frac{1}{|a_q|}\sum_{l=0}^{q}|a_l| + 1, \quad k_2 > \frac{1}{|a_q|\,p^p}\sum_{l=0}^{q}|a_l|(p+1)^{n-l} + 1,$$

a_l – коэффициенты многочлена $det(\mu L - M)$, q – степень многочлена.

В седьмом параграфе представлен алгоритм численного решения задачи (1), (2). Отметим, что результаты, представленные в параграфах 1.6. и 1.7. являются новыми, выносятся на защиту, но являются вспомогательными для численного исследования задач оптимального управления.

Вторая глава состоит из пяти параграфов и посвящена численному решению задач оптимального и жесткого управления для систем леонтьевского типа с начальным условием Шоуолтера – Сидорова. В п.2.1 приводится постановка этих задач, определяются их решения, для чего вводятся в рассмотрение пространства управлений

$$\mathfrak{U} = \{u \in L_2((0,\tau);\mathbb{R}^n) : u^{(p+1)} \in L_2((0,\tau);\mathbb{R}^n), \quad p \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$$

и состояний

$$\mathcal{X} = \{x \in L_2((0,\tau);\mathbb{R}^n) : \dot{x} \in L_2((0,\tau);\mathbb{R}^n)\}.$$

В пространстве $\mathfrak{U}$ выделим компактное выпуклое множество $\mathfrak{U}_\partial$ – множество допустимых управлений.

Задача оптимального управления для системы леонтьевского типа заключается в нахождении пары $(v, x(v)) \in \mathfrak{U}_\partial \times \mathcal{X}$, почти всюду на $(0,\tau)$, удовлетворяющей системе леонтьевского типа

$$L\dot{x} = Mx + f + Bu \tag{5}$$

с начальным условием Шоуолтера–Сидорова (1), **при этом**

$$J(v) = \min_{u \in \mathfrak{U}_\partial} J(u), \tag{6}$$

$$\boldsymbol{J(u)} = \sum_{q=0}^{1} \int_0^\tau \left\| Cx^{(q)}(u,t) - Cx_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt +$$

$$+ \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^\tau \left\langle N_q u^{(q)}(t), u^{(q)}(t) \right\rangle dt. \tag{7}$$

Здесь $\|\cdot\|$ и $\langle\cdot\rangle$ – норма и скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ соответственно, C – квадратная матрица порядка n, N_q – симметричные положительно определенные матрицы, $q = 0, 1, ..., p+1$, $\theta = 0, 1, ..., p+1$.

В качестве множества допустимых управлений принимается

$$\sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \left\| u^{(q)}(t) \right\|^2 dt \le d. \tag{8}$$

Задача жесткого управления заключается в нахождении пары $(v, x(v)) \in \mathfrak{U}_\partial \times \mathcal{X}$ почти всюду на $(0, \tau)$, удовлетворяющей системе леонтьевского типа (5) с начальным условием Шоуолтера–Сидорова (1), при этом выполняется (6), где функционал качества имеет вид

$$J(u) = \beta \sum_{q=0}^{1} \int_0^\tau \left\| Cx^{(q)}(u,t) - Cx_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt. \tag{9}$$

На основании результатов о существовании и единственности решения задач оптимального и жесткого управления для уравнений соболевского типа вида (5) в гильбертовых пространствах справедливы теоремы 2 и 3. В отличие от более общих результатов в данной работе приводится вид решения исследуемых задач.

Теорема 2 (2.1.1). *Пусть матрица M (L,p)-регулярна, $p \in \mathbb{N}_0$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, причем $detM \neq 0$. Тогда для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f \in H^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ существует единственное решение $(v, x(v)) \in \mathfrak{U}_\partial \times \mathcal{X}$ задачи оптимального управления (1), (5) – (7), где v – точка минимума функционала качества (7), а $x(v)$ определяется формулой*

$$\boldsymbol{x}(v) = \lim_{k \to +\infty} x_k(v,t) =$$

$$\lim_{k \to +\infty} \left[-\sum_{q=0}^{p} (M^{-1}(I - Q_k)L)^q M^{-1}(I - Q_k)(f + \boldsymbol{Bv})^{(q)}(t) + \right.$$

$$\left. + X_k^t \boldsymbol{x}_0 + \int_0^\tau R_k^{t-s} Q_k (f(s) + Bv(s)) ds \right]. \tag{10}$$

Теорема 3 (2.1.2). *Пусть матрица M (L,p)-регулярна, $p \in \mathbb{N}_0$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, причем $detM \neq 0$. Тогда для любых $x_0 \in \mathcal{X}$, $f \in H^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ существует единственное решение $(v, x(v)) \in \mathfrak{U}_\partial \times \mathcal{X}$ задачи жесткого управления (1), (5), (6), (9), где v – точка минимума функционала качества (9), а $x(v)$ определяется формулой (10).*

В п.2.2 обосновываются непрерывность, ограниченность функционалов качества задач оптимального и жесткого управления. Дается определение сильно выпуклой функции на выпуклом ограниченном множестве и доказывается, что функционалы качества (7) и (9) задач оптимального и жесткого управления являются сильно выпуклыми функциями на множестве допустимых управлений, т.е. для любых $u, w \in A$, для любого $\alpha \in [0,1]$ и для некоторого числа $T > 0$ выполняется неравенство

$$J(\alpha u + (1-\alpha)w) \leq \alpha J(u) + (1-\alpha)J(w) - \alpha(1-\alpha)T \left\|u - w\right\|^2 .$$

В п.2.3 приводятся основные идеи, формулы и этапы алгоритма численного решения задач оптимального и жесткого управления. На примере задачи оптимального управления для систем леонтьевского типа изложим суть метода. Пусть выполнены условия теоремы о существовании и единственности решения, пространство управлений $\mathfrak{U}$ заменяется на конечномереное пространство $\mathfrak{U}^l$ вектор-многочленов u^l вида

$$u^l(t) = col\left(\sum_{k=0}^{l} a_{1k}t^k, \sum_{k=0}^{l} a_{2k}t^k, ..., \sum_{k=0}^{l} a_{nk}t^k\right). \tag{11}$$

Подставив $u^l = u^l(t)$ вместо u в (7), используя представление (10) и квадратурную формулу Гаусса, получим

$$J(\tilde{v}_k^l) = \min_{u^l \in \mathfrak{U}_\partial} J_k(u^l)$$

$$J_k(u^l) = \sum_{q=0}^{1}\left(\frac{\tau}{2}\sum_{j=1}^{\eta}\left\|Cx_k^{(q)}(u^l, t_j) - Cx_0^{(q)}(t_j)\right\|^2 \omega_j\right) +$$

$$+\sum_{q=0}^{\theta}\left(\frac{\tau}{2}\sum_{j=1}^{\eta}\left\langle N_q(u^l)^{(q)}(t_j), (u^l)^{(q)}(t_j)\right\rangle \omega_j\right). \tag{12}$$

Вычислив необходимые для нахождения приближенного решения константы p и K, задачу нахождения оптимального управления в виде (11) сводим к задаче минимизации функционала качества (12) при условиях

$$\sum_{q=0}^{p+1}\int_0^{\tau}\left\|(u^l)^{(q)}(t)\right\|^2 dt \le d, \tag{13}$$

относительно неизвестных коэффициентов a_{ij}.

Затем, зная $\tilde{v}_k^l$, получаем $\tilde{x}_k^l = x_k(\tilde{v}_k^l, t)$. В результате пара $(\tilde{v}_k^l, \tilde{x}_k^l)$ является численным решением задачи (1), (5)–(7).

Алгоритм численного решения задачи жесткого управления аналогичен алгоритму задачи оптимального управления, отличие которого заключается в рассмотрение функционала качества (9).

Сложность алгоритма, вид функционала качества не позволили использовать стандартные численные методы выпуклого программирования, например градиентные, а разработать собственный численный метод для поиска точки минимума и минимума функционала качества.

В п.2.4 доказывается теорема о сходимости по норме приближенных решений задачи оптимального управления.

Теорема 4 (2.4.1). *Пусть матрица M (L,p)-регулярна, $p \in \mathbb{N}_0$, $detM \neq 0$. Функционал (7) является непрерывной, сильно выпуклой, ограниченной на выпуклом компактном множестве $\mathfrak{U}_\partial \subset \mathfrak{U}$. Пусть $(v, x(v))$ – точное, а $(\tilde{v}_k^l, \tilde{x}_k^l)$ – приближенное решение задачи оптимального управления (1), (5) – (7). Тогда последовательность $\{\tilde{v}_k^l\}$ сходится к v по норме $\mathfrak{U}$, последовательность $\{\tilde{x}_k^l\}$ сходится к $x(v)$ по норме $\mathcal{X}$ при $k \to \infty$, $l \to \infty$ так, что $J_k(\tilde{v}_k^l) \to J(v)$, причем выполняется неравенство*

$$q\left\|\tilde{v}_k^l - v\right\|^2 \le J_k(\tilde{v}_k^l) - J(v).$$

Доказывается существование повторных пределов $v = \lim\limits_{k\to\infty}\lim\limits_{l\to\infty}\tilde{v}_k^l$, $x = \lim\limits_{k\to\infty}\lim\limits_{l\to\infty}\tilde{x}_k^l$. Из (10) следует, что достаточно показать сходимость $\tilde{v}_k^l \to v$ при $k, l \to \infty$. Сходимость $\tilde{v}_k^l \to v^l$ и $v^l \to v$ доказывается на

основании указанных свойств множества допустимых управлений и функционала качества.

В п. 2.5. доказывается теорема о сходимости по норме приближенных решений задачи жесткого управления.

Теорема 5 (2.5.1). *Пусть матрица M (L,p)-регулярна, $p \in \mathbb{N}_0$, $detM \neq 0$. Функционал (9) является непрерывной, сильно выпуклой, ограниченной на выпуклом компактном множестве $\mathfrak{U}_\partial$. Пусть $(v, x(v))$ – точное, а $(\tilde{v}_k^l, \tilde{x}_k^l)$ – приближенное решение задачи жесткого управления (1), (5), (6), (9). Тогда последовательность $\{\tilde{v}_k^l\}$ сходится к v по норме $\mathfrak{U}$, последовательность $\{\tilde{x}_k^l\}$ сходится к $x(v)$ по норме $\mathcal{X}$ при $k \to \infty$, $l \to \infty$ так, что $J_k(\tilde{v}_k^l) \to J(v)$, причем выполняется неравенство*

$$q\left\|\tilde{v}_k^l - v\right\|^2 \leq J_k(\tilde{v}_k^l) - J(v).$$

Третья глава состоит из пяти параграфов и посвящена численному решению задач стартового и стартового жесткого управления для систем леонтьевского типа с начальным условием Шоуолтера – Сидорова. В п.3.1 приводится постановка этих задач, определяются их решения, для чего вводятся в рассмотрение пространства

$$\mathfrak{Y} = \{y \in L_2\left((0,\tau);\mathbb{R}^n\right) : y^{(p+1)} \in L_2\left((0,\tau);\mathbb{R}^n\right), \quad p \in \{0\} \cup \mathbb{N}\},$$

состояний

$$\mathcal{X} = \{x \in L_2\left((0,\tau);\mathbb{R}^n\right) : \dot{x} \in L_2\left((0,\tau);\mathbb{R}^n\right)\}$$

и управлений $\mathfrak{U} = \mathbb{R}^n$. В пространстве $\mathfrak{U}$ выделим замкнутое выпуклое множество $\mathfrak{U}_\partial^0$ – множество допустимых управлений

$$\|u_0\|^2 \leq d.$$

Задача стартового управления заключается в нахождении пары $(v_0, x(v_0)) \in \mathfrak{U}_\partial^0 \times \mathcal{X}$ почти всюду на $(0,\tau)$, удовлетворяющей системе леонтьевского типа (2) с начальным условием Шоуолтера–Сидорова

$$\left[R_\mu^L(M)\right]^{p+1}(x(0) - u_0) = 0, \tag{14}$$

при этом

$$J(v_0) = \min_{u_0 \in \mathfrak{U}_\partial^0} J(u_0), \tag{15}$$

$$J(u_0) = \sum_{q=0}^{1} \int_0^\tau \left\| Cx^{(q)}(y, u_0, t) - Cx_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt + \|u_0\|^2 . \tag{16}$$

Задача стартового жесткого управления заключается в нахождении пары $(v_0, x(v_0)) \in \mathfrak{U}_\partial^0 \times \mathcal{X}$ почти всюду на $(0, \tau)$, удовлетворяющей системе леонтьевского типа (2) с начальным условием Шоуолтера–Сидорова (14), при этом выполняется (15), а функционал качества имеет вид

$$J(u_0) = \sum_{q=0}^{1} \int_0^\tau \left\| Cx^{(q)}(y, u_0, t) - Cx_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt. \tag{17}$$

На основании результатов о существовании и единственности решения задач стартового и стартового жесткого для уравнений соболевского типа вида (2) в гильбертовых пространствах справедливы теоремы 6 и 7. В отличие от более общих результатов в данной работе приводится вид решения исследуемых задач.

Теорема 6 (3.1.1). *Пусть матрица M (L, p)-регулярна, $p \in \mathbb{N}_0$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, причем $detM \neq 0$. Тогда для любой $y \in \mathfrak{Y}$ существует единственное решение $(v_0, x(v_0)) \in \mathfrak{U}_\partial^0 \times \mathcal{X}$ задачи стартового управления (2), (14) - (16), где v_0 - точка минимума функционала качества (14), а $x(v_0)$ определяется формулой*

$$x(v_0) = \lim_{k \to +\infty} x_k(y, v_0, t) =$$

$$\lim_{k \to +\infty} \left[-\sum_{q=0}^{p} \left(M^{-1}(I - Q_k)L \right)^q M^{-1}(I - Q_k) y^{(q)}(t) + \right.$$

$$\left. + X_k^t v_0 + \int_0^\tau R_k^{t-s} Q_k y(s) ds \right]. \tag{18}$$

Теорема 7 (3.1.2). *Пусть матрица M (L,p)-регулярна, $p \in \mathbb{N}_0$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, причем $detM \neq 0$. Тогда для любой $y \in \mathfrak{Y}$ существует единственное решение $(v_0, x(v_0)) \in \mathfrak{U}_\partial^0 \times \mathcal{X}$ задачи стартового жесткого управления (2), (14), (15), (17), где v_0 – точка минимума функционала качества (17), а $x(v_0)$ определяется формулой (18).*

В п.3.2 обосновываются непрерывность, ограниченность функционалов качества задач стартового и стартового жесткого управления. Доказывается, что функционалы качества задач стартового и стартового жесткого управления являются сильно выпуклыми функциями на множестве допустимых управлений. В п.3.3 приводятся основные этапы алгоритма численного решения задач стартового и стартового жесткого управления. В п.3.4 доказывается теорема о сходимости по норме приближенных решений задачи стартового управления.

Теорема 8 (3.4.1). *Пусть матрица M (L,p)-регулярна, $p \in \mathbb{N}_0$, $detM \neq 0$. Функционал (16) является непрерывной, сильно выпуклой, ограниченной на выпуклом компактном множестве $\mathfrak{U}_\partial^0 \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $(v_0, x(v_0))$ – точное, а $(\tilde{v}_k, \tilde{x}_k)$ – приближенное решение задачи стартового управления (1), (14) – (16). Тогда последовательность $\{\tilde{v}_k\}$ сходится к v_0 по норме $\mathbb{R}^n$, последовательность $\{\tilde{x}_k\}$ сходится к $x(v_0)$ по норме $\mathcal{X}$ при $k \to \infty$ так, что $J_k(\tilde{v}_k) \to J(v_0)$ и выполняется неравенство*

$$q \left\|\tilde{v}_k - v\right\|^2 \leq J_k(\tilde{v}_k) - J(v).$$

В п.3.5 доказывается теорема о сходимости по норме приближенных решений задачи стартового жесткого управления.

Теорема 9 (3.5.ы). *Пусть матрица M (L,p)-регулярна, $p \in \mathbb{N}_0$, $detM \neq 0$. Функционал (17) является непрерывной, сильно выпуклой, ограниченной на выпуклом компактном множестве $\mathfrak{U}_\partial^0 \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $(v_0, x(v_0))$ – точное, а $(\tilde{v}_k, \tilde{x}_k)$ – приближенное решение задачи стартового жесткого управления (1), (14), (15), (17). Тогда последовательность $\{\tilde{v}_k\}$ сходится к v_0 по норме $\mathbb{R}^n$, последовательность $\{\tilde{x}_k\}$ сходится к $x(v_0)$ по норме $\mathcal{X}$ при $k \to \infty$ так, что $J_k(\tilde{v}_k) \to J(v_0)$ и выполняется неравенство*

$$q \left\|\tilde{v}_k - v_0\right\|^2 \leq J_k(\tilde{v}_k) - J(v_0).$$

Четвертая глава состоит из семи параграфов и посвящена моделям леонтьевского типа. В п.4.1 представлено общее описание моделей леонтьевского типа, имеющих экономическое и техническое приложения. В п.4.2 представлены основные положения методики составления вырожденной динамической балансовой модели для предприятия. В п.4.3 с использованием методики, изложенной в предыдущем параграфе, на примере МУП ПОВВ построена модель леонтьевского типа. В качестве производительных видов деятельности в модели приняты: очистка стоков, водоотведение, водоочистка, доставка воды. К обслуживающим видам деятельности в модели отнесены: перекачка сточных вод, подъем воды, отопление (котельные), услуги транспорта и спецтехники, услуги по ремону оборудования, автоматизация производства, диспетчерские службы, анализ качества воды (лаборатории), услуги охраны, столовая, обслуживание зданий и сооружений, работа с клиентами (СП Водосбыт), информационные услуги (СП вычислительный центр), газоспасательная служба, социальная сфера (дом культуры, база отдыха, и пр.), приведение в порядок территорий после ремонта, энергообеспечение, Администрация (инженерные службы, картографические службы, финансово-управленческие службы и т.д. в том числе договорные работы со сторонними организациями). К внешним отраслям отнесены домашние хозяйства и корпоративные клиенты. Таким образом, квадратные матрицы, входящие в состав системы, имеют порядок равный 24.

В п.4.4 представлены отличия в постановке и решении задачи Шоуолтера – Сидорова для моделей леонтьевского типа, имеющей экономический смысл, по сравнению с результатами п.1.6 и 1.7. Так, необходимо добавить условия

$$x(t) \geq 0, \ f(t) \leq 0, \ t \in [0, \tau]. \tag{19}$$

Неотрицательность валового выпуска $x(t)$ обусловлена экономическим смыслом, а неположительность $f(t)$ – редукцией динамической балансовой модели к системе леонтьевского типа и учитывается при задании вектор-функции конечного спроса.

В п.4.5 представлены отличия в постановке, решении и алгоритме решения задач оптимального и жесткого управления для моделей

леонтьевского типа, имеющих экономический смысл, по сравнению с результатами второй главы. Рассматривая в (1), (5)–(7) модель леонтьевского типа – динамическую балансовую модель предприятия – будем полагать:

(C1) рассмотрение уже работающего предприятия, начальное состояние системы – есть валовый выпуск продукции предшествующего периода;

(C2) критерием эффективности управления является достижение плановых значений некоторого показателя $Cx_0(t)$ с учетом величины управляющего воздействия.

В силу экономического смысла функционал качества примет вид

$$J(u) = \beta \sum_{q=0}^{1} \int_0^{\tau} \left\| Cx^{(q)}(u,t) - Cx_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt +$$

$$+(1-\beta) \sum_{q=0}^{\hat{\theta}} \int_0^{\tau} \left\langle N_q u^{(q)}(t), u^{(q)}(t) \right\rangle dt, \tag{20}$$

β – весовые коэффициенты целей управления, $\hat{\theta} = 0, 1$. Кроме того, добавляются условия

$$x_i(v,t) \geq w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{21}$$

$$f(t) \leq 0. \tag{22}$$

Именно ограничения (21) обусловили необходимость введения дополнительных операций в вычислительный алгоритм.

Так как значения управления могут быть как отрицательными, так и положительными (отрицательные показывают прибыльную, а положительные убыточную отрасль или вид деятельности), значение d не является величиной с точной экономической интерпретацией, хотя общий смысл заключается в ограничении средств, выделяемых для управления. Учитывая (13), определение величины d при рассмотрении экономико-математических моделей является самостоятельной экономической задачей.

Рассматривая задачу жесткого управления (1), (5), (6), (9) для модели леонтьевского типа будем полагать выполнение (C1) и

(C3) критерием эффективности управления является только достижение плановых значений показателя $Cx_0(t)$, при этом величина управляющего воздействия в текущий момент времени может быть любой, обеспечивающей план.

С учетом экономического смысла добавляются условия (21) и (22).

Кроме того, для задачи жесткого управления имеет место техническое приложение, открывающее перспективное направление исследований в теории и практике динамических измерений.

В п.4.6 представлены отличия в постановке, решении и алгоритме решения задач стартового и стартового жесткого управления для моделей леонтьевского типа, имеющих экономический смысл, по сравнению с результатами третьей главы.

Рассматривая задачу стартового управления (2), (14)–(16) для модели леонтьевского типа будем полагать выполнение (C2) и

(C4) рассмотрение либо вновь созданного предприятия, либо выходящего из кризисного состояния, тогда начальное состояние системы – есть внешнее воздействие, обеспечивающее необходимый на предстоящий период запас материальных благ для работы предприятия, которого у него нет.

В силу экономического смысла добавляются условия (21) и (22), а функционал качества примет вид

$$J(u_0) = \beta \sum_{q=0}^{1} \int_0^{\tau} \left\| Cx^{(q)}(y, u_0, t) - Cx_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt + (1-\beta) \left\| Nu_0 \right\|^2 . \quad (23)$$

Рассматривая задачу стартового жесткого управления (2), (14), (15), (17) для модели леонтьевского типа будем полагать выполнение (C3) и (C4). С учетом экономического смысла добавляются условия (21) и (22).

В п.4.7 представлены результаты исследования устойчивости решений вырожденной динамической замкнутой балансовой модели на основании исследования относительного спектра.

Теорема 10 (4.7.1). *Пусть матрица M (L,p)-регулярна, $p \in \mathbb{N}_0$, $detM \neq 0$, матрица LM^{-1} положительна и $\tilde{\mu}$ наибольшее по модулю среди точек относительного спектра число ($\tilde{\mu} = \max\limits_{l} |\mu_l|$). Тогда*

(i) $\tilde{\mu}$ является вещественным и строго положительным;

(ii) $\tilde{\mu}$ является простым корнем многочлена $det(\mu L - M)$;

(iii) $\min\limits_{j} \tilde{L}_j \leq \tilde{\mu} \leq \max\limits_{j} \tilde{L}_j$.

Причем величина $1/\tilde{\mu}$ есть технологический темп прироста в модели леонтьевского типа как межотраслевой динамической модели. Кроме того, показано, что для такой модели всегда существует хотя бы одна точка относительного спектра, находящаяся в правой полуплоскости. Известно, для устойчивости решений необходимо и достаточно, чтобы все точки спектра находились в левой полуплоскости. Следовательно, решения начальных задач для модели леонтьевского типа как динамической балансовой модели неустойчивы, причем при наличии точек относительного спектра и в левой и правой полуплоскости решения имеют экспоненциальную дихотомию.

Пятая глава содержит описание комплекса программ и состоит из четырех параграфов. В п. 5.1 представлено описание программы, реализующей алгоритм численного решения задачи Шоуолтера – Сидорова для моделей леонтьевского типа, приведены обобщенная блок-схема алгоритма и блок-схемы основных процедур. В п.5.2 приведено описание программы, реализующей алгоритм численного решения задач оптимального и жесткого управления для моделей леонтьевского типа. Приведены обобщенная блок-схема алгоритма и блок-схема основных процедур поиска приближенного решения, описан модуль ввода начальных данных. В п.5.3 приведено описание программы, реализующей алгоритм численного решения задач стартового и стартового жесткого управления для моделей леонтьевского типа. Приведены обобщенная блок-схема алгоритма и блок-схема основных процедур поиска приближенного решения, описан модуль ввода начальных данных.

В п.5.4 приводится анализ эффективности алгоритма вычисления на основании изменения входных параметров расчета. Проведены расчеты для примера Гранберга при различных параметрах из-

менения шага прямой схемы расчета по строкам матрицы коэффициентов вектор-многочленов: $r = 0,5$, $r = 0,2$ $r = 0,1$; и при $r = 0,5$ обратной схемы. Результаты, отличаясь на более чем на 0,1 процента, показывают высокую эффективность предложенного алгоритма.

Шестая глава состоит из пяти параграфов и посвящена обзору ряда результатов, полученных в ходе вычислительных экспериментов. В п.6.1 приводятся результаты решения задачи Шоуолтера – Сидорова для трех примеров: Гранберга, небольшого предприятия и основного (для МУП ПОВВ). В каждом из примеров показано разбалансирование модели с течением времени. Рассмотрим пример Гранберга, матрицы удельных капитальных затрат L и удельных прямых затрат M имеют вид:

$$L = \begin{pmatrix} 1,5 & 1,6 & 0,9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,116 & -0,075 \\ -0,5 & 0,452 & -0,425 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определены начальное состояние системы $x_0 = col(18,\ 50,\ 32)$ и значения валового продукта $y(t) = col(0,\ 0,\ -35 - 10t)$. На рис. 1. приведено решение задачи Шоуолтера–Сидорова для примера Гранберга.

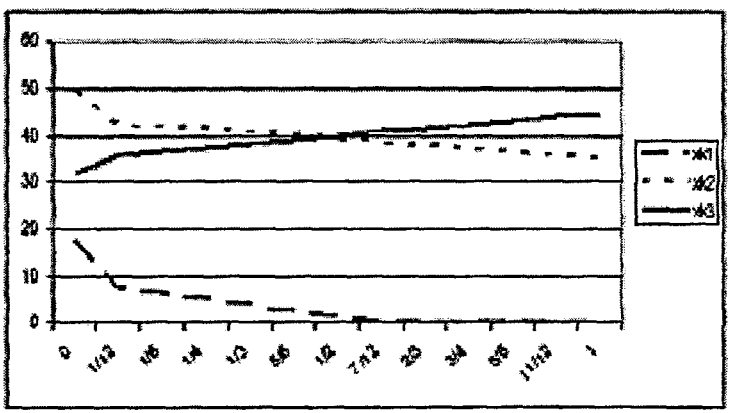

Рис.1. Решение задачи Шоуолтера– Сидорова (пример Гранберга)

На оси абсцисс отмечены значения в рамках периода, равного 1 году, значение 1/12 соответствует первому месяцу и т.д. На оси ординат отмечены значения валового выпуска продукции в усл. ден. ед.

В п.6.2 приводятся результаты вычислительных экспериментов при решении задачи оптимального управления для двух примеров: Гранберга и основного. На рис. 2. представлены плановые значения $x_0(t)$ и приближенные решения $\tilde{x}_k(v^l, t)$ задачи оптимального управления для модели леонтьевского типа (пример Гранберга).

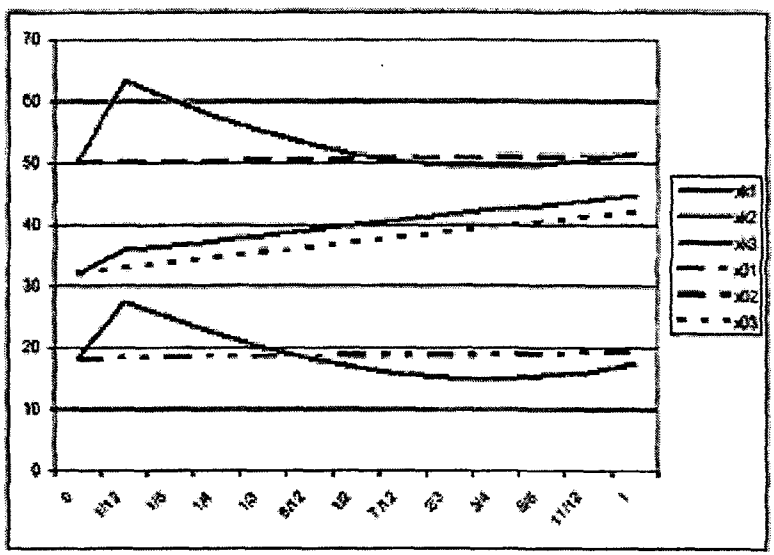

Рис.2. Результаты решения задачи оптимального управления для модели леонтьевского типа (пример Гранберга)

Вектор-многочлены управления имеют вид

$$\tilde{v}^l_{k1} = 0,001316071 - 2,539654t + 5t^2 - 0,502224t^3 + 0,2392578t^4 -$$

$$-0,01852036t^7,$$

$$\tilde{v}^l_{k2} = -0,00007629395 + 4,374523t - 0,3449441t^3 + 0,135498t^4 +$$

$$+0,15625t^6 - 0,02653122t^7,$$

$$\tilde{v}^l_{k3} = -0,021286011t + 0,625t^2 - 0,7441521t^3 +$$

$$+0,2758789t^4 - 0,0094604491t^7.$$

Для обоих примеров дается интерпретация полученного решения. Затем на примере Гранберга приводятся и интерпретируются результаты для задачи оптимального управления с единичной и отличной от нее матрицы B. Однако определение элементов матрицы B для реальной модели требует самостоятельной экономической методики. В п.6.3 приводятся результаты вычислительных экспериментов при решении задачи жесткого управления для двух примеров: Гранберга и основного. Для каждого из примеров дается интерпретация полученного решения. В п.6.4 на базе основного примера проводится сравнение результатов решения задачи оптимального и жесткого управления для каждого из 22 видов деятельности, построены графики решения, позволяющих наглядно сопоставить и решения и их интерпретации, поясняются особенности практического использования решений задач. Так, значимым аспектом при моделировании является выбор плановых значений. Результаты эксперимента показывают, что для нескольких видов деятельности плановые значения определены руководством некорректно и требуют изменения, т.е. для достижения плановых показателей производительных видов деятельности необходимо предполагать большее, а не пропорциональное увеличение работ в обслуживающих видах деятельности. В п. 6.5 приводятся результаты вычислительных экспериментов при решении задачи стартового и стартового жесткого управления для примера Леонтьева. Для него дается интерпретация полученных решений.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК:

1. *Келлер, А.В.* Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса лин. уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, А.В. Келлер // Изв. ВУЗов. Матем. – 1997. – № 5(420). – С. 60–68.

2. *Келлер, А.В.* Алгоритм численного решения задачи Шоуолтера–Сидорова для систем леонтьевского типа / А.В. Келлер // Вестник Юж.-Урал. гос. ун-та. Серия Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2009. – № 26, Вып.10. – С. 82–86.

3. *Келлер, А.В.* Свойство регуляризуемости и численное решение задачи динамического измерения / А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Вестник Юж.-Урал. гос. ун-та. Серия Мат. моделирование и программирование. – Челябинск, 2010.– № 16(192), Вып. 5. – С. 32–38.

4. *Келлер, А.В.* Алгоритм решения задачи Шоуолтера–Сидорова для моделей леонтьевского типа / А.В. Келлер // Вестник Юж.-Урал. гос. ун-та. Серия Мат. моделирование и программирование. – Челябинск, 2011. – № 4, Вып. 7. – С. 40–46.

5. *Келлер, А.В.* О сходимости численных решений задач оптимального управления для систем уравнений леонтьевского типа / Г.А. Свиридюк, А.В. Келлер // Вестник СамГТУ: серия Физ.-мат. науки. – 2011. – № 2(23). – С. 22–31.

6. *Келлер, А. В.* Задача стартового управления для моделей леонтьевского типа. Численное решение и вычислительный эксперимент / А. В. Келлер // Наука и бизнес: пути развития (раздел Математические методы и модели). – Москва, 2011. – № 4.– С. 65–72.

7. *Келлер, А. В.* Об алгоритме решения задач оптимального и жесткого управления / А. В. Келлер // Программные продукты и системы. – Тверь, 2011. – № 3.– С. 170-174.

8. *Келлер, А.В.* Численное решение задачи стартового жесткого управления для моделей леонтьевского типа. Вычислительный эксперимент / А.В. Келлер // Естественные и технические науки. – 2011. – № 4.– С. 476–482.

9. *Келлер, А. В.* Алгоритм численного решения задачи жесткого управления для моделей леонтьевского типа / А. В. Келлер // Глобальный научный потенциал (раздел Математические методы и модели). – Санкт-Петербург, 2011. – № 8. – С. 84–92.

10. *Келлер, А.В.* Задача оптимального измерения: численное решение, алгоритм программы / А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Известия ИГУ. Серия математика. – Иркутск, 2011. – Т.4, № 3. – С.74–82.

11. *Келлер, А.В.* SHOWOLTER–SIDOROV PROBLEM (SHOSID PROBLEM) / А. В. Келлер // Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2010616865. – 14 октября 2010.

12. *Келлер, А.В.* Численное решение обобщенной задачи Шоуолтера–Сидорова для системы леонтьевского типа / А.В. Келлер // Диф. уравнения, теория функций и приложения. Межд. конф., тез. докладов. – Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2007. – С. 193.

13. *Келлер, А.В.* Алгоритм численного решения задачи стартового управления для системы леонтьевского типа / А.В. Келлер // Диф.ур-ния. Функциональные пространства. Теория приложений. Межд. конф., ИМ СО РАН. – С. 157–158.

14. *Келлер, А.В.* Алгоритм решения задачи оптимального управления системой леонтьевского типа с начальным условием Шоуолтера–Сидорова / А.В. Келлер // Дифференциальные и смежные проблемы: труды межд. конф. – Стерлитамак, 2008. – Т. III. С 31–36.

15. *Келлер, А.В.* Численное решение задачи стартового управления для системы уравнений леонтьевского типа / А.В. Келлер // Обозрение прикладной и промышленной математики.– М., 2009.– Т.16, Вып.2.– С.345–346.

16. *Келлер, А.В.* Численное решение задачи жесткого управления для системы уравнений леонтьевского типа / А.В. Келлер // Обозрение прикладной и промышленной математики. – М., 2009. – Т. 16, Вып. 4. – С. 666–667.

17. *Келлер, А.В.* Численное решение задачи стартового жесткого управления для системы уравнений леонтьевского типа / А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Обозрение прикладной и промышленной математики.–М., 2009.– Т.16, Вып.6. – С.1099–1100.

18. *Келлер, А.В.* Об устойчивости решений систем леонтьевского типа / А.В. Келлер // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2010: тез. докл. – Воронеж, 2010. – С. 78–79.

19. *Келлер, А.В.* Системы леонтьевского типа: классы задач с начальным условием Шоуолтера–Сидорова и численные решения / А.В. Келлер // Известия ИГУ. Серия Матемематика. – Иркутск,

2010.–№ 2.–С.30–43.

20. *Келлер, А. В.* О динамике замкнутой системы уравнений леонтьевского типа / А. В. Келлер // Обозрение прикладной и промышленной математики. – М., 2010. – Т. 17, выпуск 2. – С. 271–272.

21. *Келлер, А. В.* Динамическая балансовая модель как задача оптимального управления / А. В. Келлер // Труды Третьей межд. конф. «Математическое моделирование социальной и экономической динамики». – М.: ЛЕНАНД, 2010. – С. 131–133.

22. *Келлер, А. В.* О численном решении задачи динамического измерения как задачи жесткого оптимального управления / А. В. Келлер, Е. И. Назарова // Всероссийский научный семинар «Неклассические уравнения математ. физики», Часть I: Тез. докл. / Якутск: Филиал Изд-ва СВФУ:ИМИ, 2010. – С. 67–69.

23. *Келлер, А. В.* Исследование устойчивости в моделях леонтьевского типа / А. В. Келлер, Е. И. Назарова // Неклассические уравнения математической физики: Сб.науч. работ. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010. – С.129–135.

24. *Келлер, А.В.* О численном решении класса задач оптимального управления для систем леонтьевского типа / А.В. Келлер // Межд. конф. «Совр. проблемы приклад. математики и механики: теория, эксперимент, практика», Тез. Докл. – Новосибирск, 2011. – С.119.

25. *Келлер, А. В.* О сильной выпуклости функционала качества в задачах оптимального управления для систем леонтьевского типа / А. В. Келлер // Межд. конф. «Дифференциальные уравнения и их приложения». Тез.докл. – Самара, 2011. – С. 68.

26. *Келлер, А. В.* Инвариантные пространства линейных уравнений типа Соболева с относительно p-секториальными оператором / Г. А. Свиридюк, А. В. Келлер // Тез. докл. Всесоюзной науч.-тех. конф. «Алгоритмический и численный анализ некорректных задач». – Екатеринбург, 1995. – С. 111.

27. *Келлер, А. В.* Линейные неавтономные уравнения типа Соболева / Г. А. Свиридюк, А. В. Келлер // Тез.докл. Сибирской конф. по неклассическим уравн. мат. физики. – Новосибирск, 1995. – С. 86.

28. *Келлер, А. В.* Относительная спектральная теорема / А. В.

Келлер // Вестник Челяб. гос. уни
– № 1(3). – С. 62–66.

29. *Келлер, А. В.* Об оптимал
тьевского типа / А. В. Келлер //
лект.– Иркутск, Ин-т динамики сис
–2006. – № 1(12). – С. 82–89.

30. *Келлер, А. В.* Численное решение задачи оптимального управления вырожденной линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями Шоуолтера–Сидорова / А. В. Келлер // Вестник Юж.-Урал. гос. ун-та. Серия Мат. моделирование и программирование. – Челябинск, 2009. – №27 (127), Выпуск 2. – С.50–56.

31. *Келлер, А. В.* Задача Коши для неавтономных уравнений типа Соболева / А. В. Келлер // Тез. Докл. VI межвуз. Конф. «Матем. Моделирование и краевые задачи». – Самара, 1996. – С. 50–51.

32. *Келлер, А. В.* Задача Коши для линейного неавтономного уравнения типа Соболева с относительно p-секториальным оператором / А. В. Келлер // Вестник Челяб.гос.пед. университета, сер. Физ.-мат. науки. – 1998. – № 2. – С. 103–105.

33. *Келлер, А. В.* Об ограниченности решений одного класса нестационарных уравнений соболевского типа / А. В. Келлер // Тез. докл. Третьего Сибирского конгресса по прикладной и индустриальной математике. – Новосибирск, 1998. – С. 22.

34. *Keller, A. V.* The Cauchy problem and bounded Solutions of Sobolev-type equations / A. V. Keller // Ninth International Colloquim on Differential Equations, Bulgaria. – 1998.–P.145.

Типография «Два комсомольца»

Подписано в печать 18.10.11. Формат 60 × 84 1/16.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 1,87. Уч.-изд. л. 2.
Тираж 140 экз. Заказ 142/456

Отпечатано в типографии «Два комсомольца».
454008, г. Челябинск, Комсосольский пр., 2