МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Деркунова Елена Анатольевна

УДК 517.956.226

ЗАДАЧИ С ПОГРАНИЧНЫМИ И ВНУТРЕННИМИ СЛОЯМИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

МОСКВА – 2009

Работа выполнена в Южно-Уральском государственном университете на кафедре функционального анализа, Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова на кафедре математики физического факультета.

Научный руководитель –	доктор физико-математических наук, профессор Бутузов Валентин Федорович.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Нестеров Андрей Владимирович, кандидат физико-математических наук, с.н.с. Петров Александр Пхоун-Чжо.
Ведущая организация –	Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова.

Защита состоится 8 апреля 2009 года, в 15 ч 30 мин, на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет ВМиК, ауд. 685.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ВМиК МГУ.

Автореферат разослан "...." .... 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор Захаров Е.В. Захаров

Актуальность темы. В последние десятилетия ведется активное исследование сингулярно возмущенных задач асимптотическими методами. Это вызвано потребностями физики, химии, биологии и других наук, с одной стороны, и внутренними потребностями развития нелинейной теории дифференциальных уравнений с другой. После основополагающих работ академика А.Н. Тихонова [1–3] и последовавших за ними работ А.Б. Васильевой [4] сингулярно возмущенные задачи интенсивно изучаются. В рамках этого научного направления в последние годы ставится и решается ряд задач, связанных с построением асимптотик решений методом пограничных функций, и, в частности, рассматриваются задачи, где нарушаются условия теоремы А.Н. Тихонова об изолированности корня вырожденного уравнения.

В качестве примера первого типа задач можно указать, например, систему двух уравнений из статьи [5], в одном из которых малый параметр ε входит множителем при производной по времени, а в другом по пространственной переменной. При некоторых условиях в указанной работе построена асимптотика произвольного порядка, содержащая наряду с регулярной частью два типа пограничных функций. Другим примером может служить задача из статьи [10], асимптотика решения которой обладает рядом особенностей, в частности, главный член регулярной части асимптотики описывается уравнением, отличным от вырожденного.

Проблема, связанная с задачами второго типа, состоит в том, что не выполнено одно из требований теоремы А.Н. Тихонова. Поясним это на примере начальной задачи в скалярном случае:

$$\varepsilon\frac{du}{dt} = F(u,t,\varepsilon),\ 0 < t \leq T, \quad u(0) = u^0. \tag{1}$$

Пусть корни вырожденного уравнения

$$F(u,t,0) = 0 \tag{2}$$

неизолированы, например, корней два ($u = \varphi_1(t)$ и $u = \varphi_2(t)$), и графики их пересекаются во внутренней точке рассматриваемого отрезка $[0,T]$. Кроме того, пусть по прохождении точки пересечения корней они меняются ролями в отношении устойчивости (происходит смена знака производной F_u, взятой на каждом из корней, или, как говорят, происходит смена устойчивости). Возникает вопрос: как будет вести себя решение нашей задачи при $\varepsilon \to 0$? В работе [6], а затем в работе [7] для тихоновской системы доказана при определенных условиях теорема о предельном переходе при $\varepsilon \to 0$ от решения исходной задачи к решению вырожденной задачи, которое строится с использованием устойчивого составного (вообще говоря, негладкого) корня вырожденного уравнения. Для доказательства существования решения и предельного перехода в работе [7] был применен метод дифференциальных неравенств. В последующие годы этот метод использовался для целого ряда других сингулярно возмущеннных задач, в том числе задач со сменой устойчивости.

В последнее время возник еще один подход к исследованию уравнений с малым параметром при производной в случае пересечения корней вырожденного уравнения. Суть его состоит в том, что вместо негладкого составного корня берется гладкий корень так называемого регуляризованного вырожденного уравнения, имеющего для задачи (0.1) вид

$$F(u,t,0) + \varepsilon F_\varepsilon(u,t,0) = 0. \qquad (0.3)$$

Если функция F_ε такова, что уравнение (0.3) имеет решение (гладкое, в отличие от составного устойчивого корня уравнения (0.2)), то его можно использовать в качестве нулевого приближения решения задачи. Такой подход был предложен в статьях [8], [9].

Цель работы. Исследование асимптотического поведения решений ряда сингулярно возмущенных задач для уравнений в частных производных первого порядка, в том числе задач с разномасштабными пограничными слоями и задач с внутренними слоями, обусловленными пересечением корней вырожденного уравнения.

Методы исследования. В диссертации к рассматриваемым задачам применяется метод пограничных функций теории сингулярных возмущений; используются методы и результаты теории уравнений с частными производными, теории интегральных уравнений; для доказательства теорем существования применяется асимптотический метод дифференциальных неравенств.

Научная новизна. В работе получены новые результаты об асимптотическом поведении решений ряда задач для сингулярно возмущенных уравнений и систем в частных производных первого порядка, в частности, некоторых задач в случае смены устойчивости. Среди них следует выделить начальную задачу из §3 гл. 2, где рассмотрен случай (не имеющий аналога для ОДУ), когда линия пересечения корней вырожденного уравнения выходит на начальный отрезок.

Практическая значимость. Основные результаты диссертационной работы имеют теоретическое значение. Они могут служить основой для построения асимптотик решений произвольного порядка в рассматриваемых задачах.

Апробация работы. Основные результаты докладывались и обсуждались на пятнадцатых математических чтениях РГСУ (Руза, 2006г.), на международной конференции "Тихонов и современная математика", посвященной 100-летию со дня рождения академика А.Н. Тихонова (Москва, 2006г.), на 60-й юбилейной конференции ЮУрГУ (Челябинск, 2008г.), на научно-исследовательском семинаре кафедры вычислительной математики математического факультета Челябинского государственного университета (руководитель академик А.М. Ильин), на семинаре по асимптотическим методам кафедры математики физического факультета МГУ.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [10]-[17], список которых приводится в конце автореферата. Постановки задач принадлежат научному руководителю В.Ф. Бутузову.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Работа содержит 117 страниц, включая библиографический список из 57 наименований.

Содержание работы. Диссертация посвящена изучению сингулярно возмущенных уравнений и систем уравнений в частных производных первого порядка, решения которых обладают пограничными и внутренними слоями.

Во **введении** содержатся постановки задач, обоснование их актуальности, сделан краткий обзор результатов, полученных другими авторами в данной области. Излагаются основные результаты диссертации и дается их сравнение с известными результатами.

В первой главе построена асимптотика решения системы двух уравнений в частных производных первого порядка, содержащих различные степени малого параметра $\varepsilon > 0$ при производных:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon b_1(x) \frac{\partial u}{\partial x} = a_{11}(x,t)u + a_{12}(x,t)v + f_1(x,t,\varepsilon),$$

$$\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon^2 b_2(x) \frac{\partial v}{\partial x} = a_{21}(x,t)u + a_{22}(x,t)v + f_2(x,t,\varepsilon).$$

Система решается в области $G = (0 < x \leq X) \times (0 < t \leq T)$ с начально-краевыми условиями

$$u\Big|_{t=0} = u\Big|_{x=0} = v\Big|_{t=0} = v\Big|_{x=0} = 0.$$

Особенностями асимптотики решения этой задачи являются четыре типа обыкновенных и три типа угловых пограничных функций с разными масштабами растянутых переменных. Установлено, что стандартный процесс построения асимптотики прерывается на пятом шаге. Для получения оценки остаточного члена порядка $O(\varepsilon^5)$ вводится модифицированная угловая пограничная функция. В целом задача решается путем применения известных погранслойных методов, а при доказательстве оценки остаточного члена используется принцип максимума.

Первый параграф начинается с постановки задачи и формулировки условий, достаточных для существования классического решения и построения асимптотики до четвертого порядка включительно.

Во втором параграфе приводится вид асимптотики решения задачи, включающей регулярную и погранслойные части, и строятся ее главные члены.

В третьем параграфе построение асимптотики завершается. Здесь наряду с постановками задач для пограничных функций и получением решений этих задач мы приводим доказательство некоторых соотношений (Лемма 1.1), связывающих пограничные функции, с тем, чтобы использовать их при проверке условий согласования краевых данных. Для утверждения об экспоненциальных оценках угловых пограничных функций также потребовалось особое доказательство (Лемма 1.2).

В четвертом параграфе доказана теорема об остаточном члене, дающая обоснование построенного разложения.

Вторая глава посвящена рассмотрению трех задач Коши в случае смены устойчивости.

В первом параграфе дается определение нижнего и верхнего решений скалярной начальной задачи, формулируется и доказывается теорема о дифференциальных неравенствах для уравнений в частных производных первого порядка. Пусть рассматривается уравнение

$$\varepsilon^r \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(u, x, t, \varepsilon), \tag{0.4}$$

с начальным условием

$$u(x, 0, \varepsilon) = u^0(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{0.5}$$

$\varepsilon > 0$, $r > 0$. Решение ищется в области

$$D = \{(x,t) : x_0(t) \le x \le x_1(t), 0 \le t \le T\}, \tag{0.6}$$

где $x = x_0(t)$ и $x = x_1(t)$ - характеристики, выходящие соответственно из точек $(0,0)$ и $(1,0)$ и определяемые уравнением $\dfrac{dx}{dt} = \Lambda(x,t)$. (считаем, что $\Lambda(x,t)$ - гладкая функция и все характеристики, выходящие из точек начального отрезка $\{t = 0,\ 0 \le x \le 1\}$ существуют при $0 \le t \le T$).

Определение 2.1. Функции $\underline{U}(x,t,\varepsilon)$ и $\overline{U}(x,t,\varepsilon)$ называются *нижним* и *верхним* решениями задачи (0.4), (0.5), если выполнены неравенства

1^0. $L_\varepsilon \underline{U} \equiv \varepsilon^r \left(\dfrac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \Lambda(x,t) \dfrac{\partial \underline{U}}{\partial x} \right) - f(\underline{U}, x, t, \varepsilon) \le 0 \le L_\varepsilon(\overline{U})$, $(x,t) \in D$;

2^0. $\underline{U}(x,0,\varepsilon) \le u^0(x) \le \overline{U}(x,0,\varepsilon), \quad 0 \le x \le 1.$

Нижнее и верхнее решения называются упорядоченными, если

$$\underline{U}(x,t,\varepsilon) \le \overline{U}(x,t,\varepsilon), \quad (x,t) \in D.$$

Доказывается следующее утверждение:

Теорема 2.1. *Если существуют упорядоченные нижнее и верхнее решения* $\underline{U}$ *и* $\overline{U}$ *задачи (4), (5), то эта задача имеет решение* $u(x,t,\varepsilon)$, *удовлетворяющее неравенствам*

$$\underline{U}(x,t,\varepsilon) \le u(x,t,\varepsilon) \le \overline{U}(x,t,\varepsilon), \quad (x,t) \in D.$$

Во втором параграфе изучается задача

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f(u,x,t,\varepsilon), \tag{7}$$

$$u(x,0,\varepsilon) = u^0(x), \quad 0 \le x \le 1. \tag{8}$$

Решение задачи (7), (8) ищется в области вида (6). Основное условие, накладываемое на входные данные задачи, таково:

Условие B_2. Пусть уравнение

$$f(u,x,t,0) = 0 \tag{9}$$

имеет относительно u два корня $u = \varphi_1(x,t)$, $u = \varphi_2(x,t)$, удовлетворяющих соотношениям

$$\varphi_1(x,t) = \varphi_2(x,t) \quad \text{при} \quad t = \psi(x),$$

где $\psi(x)$ – гладкая функция, $0 < \psi(x) < T$;

$$\varphi_1(x,t) > \varphi_2(x,t) \quad \text{при} \quad 0 \le t < \psi(x);$$
$$\varphi_1(x,t) < \varphi_2(x,t) \quad \text{при} \quad \psi(x) < t \le T.$$

И пусть

$$f_u(\varphi_1(x,t),x,t,0) < 0 \quad f_u(\varphi_2(x,t),x,t,0) > 0 \quad \text{при} \quad 0 \le t < \psi(x),$$
$$f_u(\varphi_1(x,t),x,t,0) > 0 \quad f_u(\varphi_2(x,t),x,t,0) < 0 \quad \text{при} \quad \psi(x) < t \le T.$$

С использованием корней φ_1 и φ_2 определяется составной устойчивый корень вырожденного уравнения (9):

$$\breve{u}(x,t) = \begin{cases} \varphi_1(x,t), & 0 \le t \le \psi(x), \\ \varphi_2(x,t), & \psi(x) \le t \le T; \end{cases}$$

Вблизи начального отрезка асимптотика решения ищется в виде:

$$u(x,t,\varepsilon) = \check{u}(x,t) + \Pi_0(x,\tau) + O(\varepsilon), \tag{10}$$

где $\check{u}(x,t)$ – функция регулярной части асимптотики, $\Pi_0(x,\tau)$ – пограничная функция, $\tau = \dfrac{t}{\varepsilon}$ – погранслойная переменная. При Условии B_2, а также при некоторых дополнительных условиях, в малой окрестности кривой $t = \psi(x)$ строятся нижнее и верхнее решения:

$$\underline{U} = \check{u}(x,t) - A\varepsilon, \quad \overline{U} = \check{u}(x,t) + A\sqrt{\varepsilon}, \tag{11}$$

постоянная A выбирается достаточно большой.

В результате доказана следующая

Теорема 2.2. *При достаточно малых ε существует единственное решение $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (7), (8), удовлетворяющее предельному равенству*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,t,\varepsilon) = \check{u}(x,t)$$

для всех $(x,t) \in D$, кроме начального отрезка $\{t = 0, 0 \le x \le 1\}$.

Это утверждение основывается на теореме, которую можно доказать, исходя из представлений (10) и (11):

Теорема 2.3. *При достаточно малых ε задача (7), (8) имеет единственнное решение $u(x,t,\varepsilon)$, и для него справедливо асимптотическое представление*

$$u(x,t,\varepsilon) = \check{u}(x,t) + \Pi_0(x,t/\varepsilon) + w(x,t,\varepsilon),$$

где $\Pi_0(x,\tau)$ – пограничная функция, $w(x,t,\varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon})$ в малой δ-окрестности кривой $t = \psi(x)$, $w(x,t,\varepsilon) = O(\varepsilon)$ в остальной части области D.

В третьем параграфе рассматривается уравнение

$$\varepsilon^p\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f(u,x,t,\varepsilon), \tag{12}$$

с начальным условием (8), где $p = 1 + q$, $q > 0$. Решение ищется в области D вида (6) при следующих требованиях

Условие D_1. Функция $f(u,x,t,\varepsilon)$ имеет вид

$$f(u,x,t,\varepsilon) = -k(x,t)\,(u-\varphi_1(x,t))\,(u-\varphi_2(x,t)) + \varepsilon f_1(u,x,t,\varepsilon),$$

Условие D_2. Корни φ_1 и φ_2 уравнения (9) удовлетворяют соотношениям

$$\varphi_1(x,t) = \varphi_2(x,t) \quad \text{при} \quad x = \psi(t), \quad 0 \le t \le T,$$

где $\psi(t)$ – гладкая функция, $x_0(t) < \psi(t) < x_1(t)$ при $0 \le t \le T$;

$$\begin{array}{llll} \varphi_1(x,t) > \varphi_2(x,t) & \text{при} & x_0(t) \le x < \psi(t), & 0 \le t \le T; \\ \varphi_1(x,t) < \varphi_2(x,t) & \text{при} & \psi(t) < x \le x_1(t), & 0 \le t \le T. \end{array}$$

Это условие означает, что графики корней вырожденного уравнения (9) пересекаются, но, в отличие от случая, рассмотренного в предыдущем параграфе, где проекция линии пересечения корней на плоскость (x,t) лежала целиком выше начального отрезка, в данном случае проекция Γ линии пересечения корней выходит на начальный отрезок. Это приводит к тому, что классическая теория здесь не применима даже в малой окрестности начального отрезка. Вместо уравнения (9) рассматриваем регуляризованное вырожденное уравнение

$$f(u,x,t,0) + \varepsilon f_\varepsilon(u,x,t,0) = 0,$$

которое в данном случае имеет вид

$$-k(x,t)\,(u-\varphi_1(x,t))\,(u-\varphi_2(x,t)) + \varepsilon f_1(u,x,t,0) = 0, \tag{13}$$

Условие D_3.

$$f_1(\breve{u}(x,t),x,t,0) > 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \Gamma,$$

где

$$\breve{u}(x,t) = \begin{cases} \varphi_1(x,t), & x_0(t) \le x \le \psi(t), \quad 0 \le t \le T; \\ \varphi_2(x,t), & \psi(t) \le x \le x_1(t), \quad 0 \le t \le T. \end{cases}$$

При этом условии уравнение (13) имеет два гладких корня φ и φ^*, причем

$$\varphi(x,t,\varepsilon) = \breve{u}(x,t) + \sqrt{g(\breve{u}(x,t),x,t)} \cdot \sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon), \quad (x,t) \in \Gamma,$$

$$\varphi*(x,t,\varepsilon) = \hat{u}(x,t) - \sqrt{g(\check{u}(x,t),x,t)} \cdot \sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon), \quad (x,t) \in \Gamma,$$

где $g(u,x,t) = k^{-1}(x,t) f_1(u,x,t,0)$;

$$\varphi(x,t,\varepsilon) = \check{u}(x,t) + O(\sqrt{\varepsilon}), \varphi*(x,t,\varepsilon) = \hat{u}(x,t) + O(\sqrt{\varepsilon}), (x,t) \in \Gamma_\delta,$$

$$\varphi(x,t,\varepsilon) = \check{u}(x,t) + O(\varepsilon), \varphi*(x,t,\varepsilon) = \hat{u}(x,t) + O(\varepsilon), (x,t) \in D \backslash \Gamma_\delta,$$

где Γ_δ – сколь угодно малая, но не зависящая от ε, δ–окрестность кривой Γ,

$$\hat{u}(x,t) = \begin{cases} \varphi_2(x,t), & x_0(t) \le x \le \psi(t), \quad 0 \le t \le T; \\ \varphi_1(x,t), & \psi(t) \le x \le x_1(t), \quad 0 \le t \le T. \end{cases}$$

Условие D_4. $u^0(x) > \hat{u}(x,0)$ при $0 \le x \le 1$.

Доказана

Теорема 2.4. *Если выполнены условия D_1 - D_4, то для достаточно малых ε существует единственное решение $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (12), (8) и для него имеет место асимптотическое представление*

$$u(x,t,\varepsilon) = \varphi(x,t,\varepsilon) + \Pi_0(x, \frac{t}{\varepsilon^p}, \varepsilon) + w(x,t,\varepsilon), \tag{14}$$

в котором остаточный член $w(x,t,\varepsilon)$ имеет следующие асимптотические оценки при $\varepsilon \to 0$:

1) если $p = 1 + q \le \frac{3}{2}$, то

$w(x,t,\varepsilon) = O(\varepsilon^\gamma)$ в δ-окрестности кривой $x = \psi(t)$, где в качестве γ можно взять любое число из интервала $\frac{1}{2} < \gamma < \frac{1}{2} + q$, а $\delta > 0$ – сколь угодно малое, но фиксированное при $\varepsilon \to 0$ число;

2) если $p > \frac{3}{2}$, то

$w(x,t,\varepsilon) = O(\varepsilon)$ равномерно в области D.

Фигурирующая в (14) пограничная функция $\Pi_0(x,\tau,\varepsilon)$ имеет оценки:

$$|\Pi_0(x,\tau,\varepsilon)| \le C \exp(-m\sqrt{\varepsilon}\tau), \quad |x - x_0| < \delta, \quad \tau \ge 0,$$

$$|\Pi_0(x,\tau,\varepsilon)| \le C \exp(-æ\tau), \quad , |x - x_0| \ge \delta, \quad \tau \ge 0,$$

где $x_0 = \psi(0)$, C, m, æ – положительные числа.

В четвертом параграфе снова рассматривается случай, когда проекция линии пересечения корней уравнения (9) (корни обозначим $\varphi(x,t)$ и $\chi(x,t)$) лежит выше начального отрезка, но поведение решения отличается от описанного в § 2. Установлены условия, при которых решение задачи (7), (8) притягивается к устойчивому корню $\varphi(x,t)$ и остается вблизи него не только в области ниже кривой Γ, но и после прохождения этой кривой, где корень $\varphi(x,t)$ становится неустойчивым, и лишь спустя некоторый (конечный при $\varepsilon \to 0$) промежуток времени ($t - \psi(x) \geq \delta > 0$) происходит быстрый переход решения в окрестность корня $\chi(x,t)$, устойчивого при $t > \psi(x)$. Доказана теорема о существовании и асимптотике этого решения.

В третьей главе мы переходим к исследованию сингулярно возмущенных систем уравнений в случае смены устойчивости.

В первом параграфе дается теорема о нижнем и верхнем решениях применительно к системе двух уравнений в частных производных первого порядка.

Во втором параграфе рассматривается система быстрого и медленного уравнений:

$$\begin{aligned} &\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda_1(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = g(u,v,x,t,\varepsilon), \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + \Lambda_2(x,t)\frac{\partial v}{\partial x} = f(u,v,x,t,\varepsilon), \quad (x,t) \in D, \end{aligned} \tag{15}$$

с начальными условиями

$$u(x,0,\varepsilon) = u^0(x), \quad v(x,0,\varepsilon) = v^0(x) \;\text{ при }\; 0 \leq x \leq 1. \tag{16}$$

Пусть $\Lambda_1 > \Lambda_2$. Область D имеет вид (6), где $x = x_0(t)$ и $x = x_1(t)$ - характеристики, выходящие соответственно из точек $(0,0)$ и $(1,0)$ и определяемые соответственно уравнениями $\dfrac{dx}{dt} = \Lambda_i(x,t)$, $i = 1,2$. Корни вырожденного уравнения

$$g(u,v,x,t,0) = 0 \tag{17}$$

$u = \varphi_1(v,x,t)$ и $u = \varphi_2(v,x,t)$ пересекаются по некоторой поверхности, проекция которой в пространство (v,x,t) описывается уравнением $v = S(x,t)$. Знак производной g_u, взятой на каждом из корней, изменяется на противоположный при переходе через поверхность $v = S(x,t)$. В связи с этим условием вводится составной устойчивый корень уравнения (17)

$$\varphi(v,x,t) = \begin{cases} \varphi_1(v,x,t), & v \le S(x,t) \\ \varphi_2(v,x,t), & v \ge S(x,t). \end{cases}$$

Этот **корень** подставляем во второе уравнение **системы** (15) при $\varepsilon = 0$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \Lambda_2(x,t)\frac{\partial v}{\partial x} = f(\varphi(v,x,t),v,x,t,0) \tag{18}$$

Уравнение (18) решается с начальным условием $v\,\big|_{t=0} = v^0(x)$, которое подчиняем следующему требованию: $v^0(x) < S(x,0)$. Пусть решение $\hat{v}(x,t)$ этой задачи пересекает поверхность $v = S(x,t)$ по кривой, проекция которой на плоскость (x,t) представляет собой гладкую кривую $t = \psi(x)$, лежащую выше начального отрезка $\{t = 0,\, 0 \le x \le 1\}$. Таким образом, мы получили решение вырожденной задачи: $(\hat{u}(x,t), \hat{v}(x,t))$, где $\hat{u}(x,t) = \varphi(\hat{v}(x,t),x,t)$.

В результате доказывается следующая

Теорема 3.2. *При достаточно малых ε задача (15), (16) имеет решение, и для него справедливо асимптотическое представление:*

$$u(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} \hat{u}(x,t) + \Pi_0(x,t/\varepsilon) + O(\varepsilon), & 0 \le t < \psi(x) - \nu, \\ \hat{u}(x,t,\varepsilon) + O(\sqrt{\varepsilon}), & \psi(x) - \nu \le t \le T. \end{cases}$$

$$v(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} \hat{v}(x,t,\varepsilon) + O(\varepsilon), & 0 \le t < \psi(x) - \nu, \\ \hat{v}(x,t,\varepsilon) + O(\sqrt{\varepsilon}), & \psi(x) - \nu \le t \le T, \end{cases}$$

где $\nu > 0$ – достаточно малое, не зависящее от ε число.

Третий параграф посвящен анализу поведения решения системы двух быстрых уравнений:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda_1(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = g(u,v,x,t,\varepsilon), \\ &\varepsilon^p\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \Lambda_2(x,t)\frac{\partial v}{\partial x}\right) = f(u,v,x,t,\varepsilon), \quad (x,t) \in D, \end{aligned} \tag{19}$$

с начальными условиями (16), где p – какое-то число, удовлетворяющее неравенствам $1 < p < 2$. Область D определяется, как в § 2.

Предполагаем, что уравнение $g(u, v, x, t, 0) = 0$ имеет изолированный корень $u = \varphi(v, x, t)$, который устойчив $(g_u(\varphi(v, x, t), v, x, t, 0) < 0)$. После подстановки его во второе вырожденное уравнение системы получаем уравнение

$$h(v, x, t) = f(\varphi(v, x, t), v, x, t, 0) = 0.$$

Корни последнего $v = v_1(x, t)$ и $v = v_2(x, t)$ удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} &v_1(x,t) > v_2(x,t) \quad \text{при} \quad 0 \le t < \psi(x), \\ &v_1(x,t) < v_2(x,t) \quad \text{при} \quad \psi(x) < t \le T, \\ &v_1(x,t) \equiv v_2(x,t) \quad \text{при} \quad t = \psi(x), \end{aligned}$$

где $t = \psi(x)$ - гладкая кривая, не пересекающая начальный отрезок $\{t = 0, 0 \le x \le 1\}$.

Составное устойчивое решение вырожденной системы имеет вид:

$$\hat{v}(x,t) = \begin{cases} v_1(x,t), & 0 \le t \le \psi(x), \\ v_2(x,t), & \psi(x) \le t \le T, \end{cases} \qquad \hat{u}(x,t) = \varphi(\hat{v}(x,t), x, t).$$

Доказана

Теорема 3.3. *При достаточно малых ε существует и единственно решение задачи (19), (16), и для него справедливо следующее асимптотическое представление:*

$$u(x,t,\varepsilon) = \hat{u}(x,t) + P_0u(x,\theta) + \Pi_0 u(x,\tau) + \sum_{\substack{i=1 \\ (2-p)i<1}} \varepsilon^{(2-p)i} \Big[P_1^{(i)} u(x,\theta) +$$
$$+ \Pi_1^{(i)} u(x,\tau) \Big] + \varepsilon \left[\overline{u}_2(x,t) + P_2 u(x,\theta) + \Pi_2 u(x,\tau) \right] + w_1(x,t,\varepsilon),$$
$$v(x,t,\varepsilon) = \hat{v}(x,t) + P_0 v(x,\theta) + \sum_{\substack{i=1 \\ (2-p)i<1}} \varepsilon^{(2-p)i} \Big[P_1^{(i)} v(x,\theta) + \Pi_1^{(i)} v(x,\tau) \Big] +$$
$$+ \varepsilon \left[\overline{v}_2(x,t) + P_2 v(x,\theta) + \Pi_2 v(x,\tau) \right] + w_2(x,t,\varepsilon).$$

где $\theta = \dfrac{t}{\varepsilon^p}$, $\tau = \dfrac{t}{\varepsilon^2}$, пограничные функции имеют экспоненциальные оценки, а

$$w_i(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} o(\varepsilon) & \text{\textit{при}} \;\; 0 \le t < \psi(x) - \delta, \\ O(\sqrt{\varepsilon}) & \text{\textit{при}} \;\; \psi(x) - \delta \le t \le \psi(x) + \delta, \\ O(\varepsilon) & \text{\textit{при}} \;\; \psi(x) + \delta < t \le T, \end{cases}$$

где $i = 1, 2$, $\delta > 0$ *– сколь угодно малое, не зависящее от* ε *число.*

В заключение, автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору В.Ф. Бутузову за постановку задач и помощь в работе.

Список цитированной литературы

1. Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра//Матем. сб. 1948. **22**(64), N 2. С. 193–204.

2. Тихонов А.Н. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры//Матем. сб. 1950. **27**(69). N 1. С. 147–156.

3. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры//Матем. сб. 1952. **31**(73). N 3. С. 575–586.

4. Васильева А.Б. Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной//УМН. 1963. 18. N 3. С. 15–86.

5. Бутузов В.Ф., Каращук А.Ф. Об одной сингулярно возмущенной системе уравнений в частных производных первого порядка//Матем. заметки. 1995. Т. 57. N 3. С. 338–349.

6. Lebovitz N.R., Schaar R.J. Exchange of stabilities in autonomous system – II. Vertical bifurcaition// Stud. Appl. Math. 56, 1–50(1977).

7. Nefedov N.N., Schneider K.R.(1995) Singularly perturbed systems: Case of exchange of stability//Weierstraß - Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, Berlin, Preprint No. 158.

8. Бутузов В.Ф. Существование и асимптотическая устойчивость решения сингулярно возмущенной системы параболических уравнений в случае пересечения корней вырожденного уравнения//Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. N 2. С. 221–232

9. Бутузов В.Ф. Об устойчивости и области притяжения негладкого в пределе стационарного решения сингулярно возмущенного параболического уравнения//Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2006. Т. 46. N 3. С. 433–444.

Публикации по теме диссертации

10. Бутузов В.Ф., Деркунова Е.А. Асимптотика решения уравнения теплопроводности с нелинейным источником тепла в тонком стержне //Журнал вычислит. математики и мат. физики, 1996. **36.** N 6. C. 68–85.

11. Деркунова Е.А. Об одной системе уравнений с частными производными в неограниченной области//Известия Челяб. науч. центра, 2004. **4**(26). C. 10–14.

12. Бутузов В.Ф., Деркунова Е.А. О сингулярно возмущенной системе в частных производных первого порядка с разными степенями малого параметра//Дифф. уравнения. 2006. **42.** N 6. C. 775–790.

13. Деркунова Е.А. Сингулярно возмущенная система уравнений в частных производных первого порядка в случае смены устойчивости //Математические методы и приложения: Труды пятнадцатых математических чтений РГСУ, М: Изд-во РГСУ, 2006. C. 51–56.

14. Деркунова Е.А. Сингулярно возмущенные уравнения в частных производных первого порядка. Смена устойчивости// Асимптотические методы: Тез. докл. Междун. конфер. "Тихонов и современная математика", М: Изд. отдел фак. ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова. 2006. C. 25–26.

15. Деркунова Е.А. Об одной сингулярно возмущенной системе уравнений в частных производных первого порядка в случае смены устойчивости// Известия Челяб. науч. центра, 2007. **1**(35). C. 12–17.

16. Деркунова Е.А. Сингулярно возмущенные задачи для уравнений в частных производных первого порядка// Наука ЮУрГУ: материалы 60-й юбилейной научной конференции. Секции естественно-научных и гуманитарных наук, Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2008. **1.** C. 107–110.

17. Бутузов В.Ф., Деркунова Е.А. О сингулярно возмущенном уравнении в частных производных первого порядка в случае пересечения корней вырожденного уравнения//Дифф. уравнения. 2009. **45.** N 2. C. 180–190.