

## МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ МНОГОМЕРНЫХ ОБРАТНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

**Н.М. Япарова**

*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск*

Предложен новый метод решения некоторых обратных граничных задач с неизвестными начальными условиями. Метод основан на использовании конечно-разностных схем. Его применение впервые позволило получить регуляризованные решения как на границе, так и во всей рассматриваемой области при неизвестных начальных условиях. Предложенный метод послужил основой для разработки численного метода решения обратных граничных задач с неизвестными начальными условиями. С целью оценки эффективности предложенного метода и получения экспериментальных оценок погрешностей был проведен вычислительный эксперимент. В ходе эксперимента были получены численные решения задач как с постоянным, так и с переменным коэффициентом как внутри области, так и на ее границе. Представленные в работе результаты эксперимента свидетельствуют о достаточной устойчивости получаемых решений.

*Ключевые слова: параболические уравнения, обратная граничная задача, метод регуляризации, численный метод, вычислительная схема.*

### Введение

Обратные задачи определения неизвестных граничных условий для параболических уравнений возникают в прикладных задачах в ситуациях, когда на одной части границы известна функция, являющаяся решением уравнения, и ее производная по направлению нормали, а на других ее участках эти характеристики не могут быть определены. К таким задачам относятся, например, задачи теплопроводности, рассмотренные в работе [1], а также модель роста зародышей новой фазы в многокомпонентном растворе в процессе нанокристаллизации твердого аморфного сплава [2]. Как правило, решение этих обратных граничных задач осуществляется при известных начальных условиях. Вместе с тем, существует целый ряд прикладных исследований, при проведении которых невозможно определить начальные условия. К таким задачам относятся, например, исследование электромагнитных и тепловых характеристик работающих двигателей и энергетических установок [3, 4], задачи геофизики, связанные с нагревом и охлаждением поверхности мирового океана [5]. При описании этих процессов и возникают обратные граничные задачи с неизвестными начальными условиями.

Данная статья посвящена разработке численного метода решения такого рода задач. Разработка и исследование методов решения обратных граничных задач является динамично развивающейся областью научных знаний. основополагающие принципы исследований в этой сфере были сформулированы в работах [6–8]. В настоящее время с этим научным направлением связаны труды многих исследователей. Так, например, в работе [9] рассмотрены итерационные регуляризирующие алгоритмы, в статье [10] представлены методы регуляризации в банаховых пространствах, в работе [11] предложен нелинейный метод проекционной регуляризации. Построению алгоритмов решения обратных граничных задач, основанных на использовании метода Треффица, посвящены работы [12, 13]. Методам решения обратной задачи теплопроводности с неподвижной границей, основанным на применении преобразований Лапласа, посвящены работы [14, 15].

В данной статье указана принципиальная возможность построения метода решения и предложена вычислительная схема метода, с помощью которой впервые построено численное решение обратной граничной задачи с неизвестными начальными условиями. В статье приведены результаты вычислительного эксперимента, свидетельствующие о достаточной устойчивости полученных решений.

## Постановка задачи

Пусть  $\Omega \subset R^n$  – замкнутое, ограниченное, выпуклое множество с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega$ , а  $\Gamma \subset \partial\Omega$  и  $Q_T = \Omega \times (0; T)$  для всех  $T > 0$ . Обозначим

$$A = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{j=1}^n b_j(x,t) \frac{\partial}{\partial x_j} - c(x,t). \quad (1)$$

Предположим, что выполнены условия  $a_{ij}(x,t) \in C^1(Q_T)$ ,  $b_j(x,t) \in C(Q_T)$ ,  $i, j = 1..n$ ,  $c(x,t) \in C(Q_T)$  и для любых  $(x,t) \in \bar{Q}_T$  справедливо  $\eta_1 |\xi|^2 \leq a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \leq \eta_2 |\xi|^2$ , где  $\eta_1, \eta_2$  – фиксированные числа, а  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  – произвольный вещественный вектор. Рассмотрим уравнение:

$$Au = f, \quad (2)$$

где  $u(x,t) \in H^{4,2}(\bar{Q}_T)$ , функция  $f(x,t) \in H^{2,1}(R^n \times [0, T])$ , и граничные условия:

$$u(x,t)|_{\Gamma} = \varphi(x,t), \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = \psi(x,t), \quad (3)$$

где  $\varphi(x,t), \psi(x,t) \in H^{4,2}(Q_T)$ , а  $n$  – вектор нормали. Задача состоит в том, чтобы найти функцию, удовлетворяющую (2), (3), а также найти граничную функцию

$$u(x,t)|_{\partial\Omega} = \phi(x,t). \quad (4)$$

Предположим, что при некоторых  $f(x,t) = f_0(x,t)$ ,  $\varphi(x,t) = \varphi_0(x,t)$  и  $\psi(x,t) = \psi_0(x,t)$  существует функция  $u_0(x,t)$ , удовлетворяющая (2), (3), и известно, что  $\phi(x,t) \in H^{2,1+\beta}(Q_T)$ , где  $\beta \in (0,1)$ . Из результатов, представленных в [16, 17] следует единственность решения задачи (2)–(4) в некоторой области  $\Omega_T \subset Q_T$ . Для решения задачи (2)–(4) предлагается применить метод дискретной регуляризации.

## Метод дискретной регуляризации

Предположим, что существуют  $\Phi, \beta, R > 0$  такие, что

$$\max_{Q_T} |u(x,y,t)| \leq \Phi e^{\beta t}, \quad \left\{ \max_{Q_T} |\partial_t^2 u|, \max_{Q_T} |\partial_x^2 u|, \max_{Q_T} |\partial_x^4 u| \right\} \leq R. \quad (5)$$

В данной статье изложена идея метода дискретной регуляризации многомерных задач, которая заключается в следующем.

В области  $Q_T$  вместо исходного уравнения (2) рассмотрим уравнение

$$Au + \alpha u = f,$$

где  $\alpha$  – параметр регуляризации. Обозначим координаты точки  $(x,t) \in Q_T$  как  $(x_i, t) = (x_1, x_2, \dots, x_n, t)$  и введем в области  $Q_T$  конечно-разностную сетку из узлов  $(x_i^{k_i}, t^s) = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i, t^s)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{1, N}$ ,  $k = \overline{1, N_i}$ , где индексы  $(k_i, s)$  соответствуют узлу сетки. Далее, следуя подходу, предложенному Самарским в работе [18], составляем конечно-разностный аналог частных производных по каждой переменной в каждом узле сетки  $(x_i^{k_i}, t^s)$ . Затем, используя явные схемы, определяем значение функции в точке  $(x_i^{k_i+1}, t^s)$ .

Схема легко реализуется как для  $\Omega \subset R$ , так и на  $\Omega \subset R^n$ . Для краткости изложения остановимся на рассмотрении схемы метода для  $\Omega = [0, X] \times [0, Y]$  задачи (2)–(4), имеющей вид:

$$u_t = a(x,y,t)(u_{xx} + u_{yy}) + f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T, \quad (6)$$

$$u(x,0,t) = \varphi(x,t), u_y(x,0,t) = \psi(x,t), \quad (x,t) \in M_x, \quad (7)$$

$$u(0,y,t) = g(y,t), \quad (y,t) \in M_y, \quad (8)$$

где  $M_x = \{(x,t) : (x,t) \in (0,X) \times (0,T)\}$  и  $M_y = \{(y,t) : (y,t) \in (0,Y) \times (0,T)\}$ , а коэффициент  $a(x,y,t) \in C(\bar{Q}_T)$ .

Вместо точных значений функций  $\varphi(x,t)$ ,  $\psi(x,t)$ ,  $g(y,t)$  и даны некоторые приближения  $\varphi_\delta(x,t)$ ,  $\psi_\delta(x,t)$ ,  $g_\delta(y,t)$  и уровень погрешности  $\delta > 0$  такие, что в каждой точке области уклонение функций  $\varphi_\delta(x,t)$ ,  $\psi_\delta(x,t)$ ,  $g_\delta(y,t)$ , от соответствующих  $\varphi(x,t)$ ,  $\psi(x,t)$ ,  $g(y,t)$  не превосходит  $\delta$ , а именно:

$$\max_{(x,t) \in M_x} |\varphi(x,t) - \varphi_\delta(x,t)| \leq \delta, \quad \max_{(x,t) \in M_x} |\psi(x,t) - \psi_\delta(x,t)| \leq \delta, \quad (9)$$

$$\max_{(y,t) \in M_y} |g(y,t) - g_\delta(y,t)| \leq \delta, \quad (10)$$

Требуется по этим исходным данным найти  $u(x,y,t)$ , являющуюся решением задачи (6)–(8) при  $(x,y,t) \in Q_T$ , граничную функцию  $u(x,Y,t)$  при  $(x,t) \in M_x$ , а также  $\phi(t) = u(x,Y,t)$  для всех  $t \in [0,T]$ .

Заметим, что предложенный численный метод может быть применен для решения обратной граничной задачи для параболического уравнения с погрешностями во всех исходных данных. Тем не менее, выбор именно такой задачи для рассмотрения связан с тем, что с одной стороны, реализация предложенного численного метода для этого уравнения является достаточно простой, а с другой стороны, позволяет наглядно продемонстрировать особенности рассматриваемого численного метода, проверить теоретические результаты и получить экспериментальные значения соотношений между погрешностью исходных данных, величинами шагов и параметра регуляризации.

#### Численная схема метода дискретной регуляризации

Введем конечно-разностную сетку  $G$  в прямоугольнике  $\bar{Q}_T$ ,

$$G = \left\{ \begin{array}{l} (x_i, y_j, t_k) : x = (i-1)h_x, y = (j-1)h_y, t = (k-1)h_t, \\ h_x = X / N_x; h_y = Y / N_y; h_t = T / N_t; i = 1, \dots, N_x + 1; k = 1, \dots, N_t + 1, \end{array} \right.$$

где  $h_x$ ,  $h_y$  и  $h_t$  – шаги сетки по переменным  $x$ ,  $y$  и  $t$  соответственно.

Следуя подходу, предложенному Самарским в работе [18], конечно-разностный аналог частных производных в каждой точке  $(x_i, y_j, t_k) \in G$  определен следующим образом:

$$\begin{aligned} v_{xx}^{i,j,k} &= \frac{v_{i+1,j,k} - 2v_{i,j,k} + v_{i-1,j,k}}{h_x^2}, \quad i = \overline{2, N_x}, j = \overline{2, N_y + 1}, k = \overline{1, N_t + 1}, \\ v_{yy}^{i,j,k} &= \frac{v_{i,j+1,k} - 2v_{i,j,k} + v_{i,j-1,k}}{h_y^2}, \quad i = \overline{1, N_x + 1}, j = \overline{2, N_y}, k = \overline{1, N_t + 1}, \\ v_t^{i,j,k} &= \frac{v_{i,j,k+1} - v_{i,j,k}}{h_t}, \quad i = \overline{1, N_x + 1}, j = \overline{2, N_y + 1}, k = \overline{1, N_t}. \end{aligned} \quad (11)$$

Обозначим через  $f_{i,j,k}$  значения функции  $f \in C(\bar{Q}_T)$  в точках  $(x_i, y_j, t_k) \in G$ , значения коэффициентов оператора  $A$  обозначим  $a_{i,j,k}$ , а значения граничных функций  $\varphi(x,t)$ ,  $\psi(x,t)$ ,  $g(y,t)$ ,  $q(y,t)$  обозначим  $\varphi_{i,k}$ ,  $\psi_{i,k}$ ,  $g_{j,k}$ ,  $q_{j,k}$ .

Конечно-разностный аналог уравнения (6) имеет вид:

$$\begin{aligned} v_t^{i,j,k} &= a_{i,j,k} (v_{xx}^{i,j,k} + v_{yy}^{i,j,k}) + f_{i,j,k}, \quad k = \overline{1, N_t}, \\ v_t^{i,j,N_t+1} &= \gamma a_{i,j,N_t+1} [v_{xx}^{i,j,N_t+1} + v_{yy}^{i,j,N_t+1}] + (1-\gamma) a_{i,j,N_t} [v_{xx}^{i,j,N_t} + v_{yy}^{i,j,N_t}] + f_{i,j,N_t+1}, \end{aligned}$$

где  $i = \overline{2, N_x + 1}, j = \overline{2, N_y + 1}$ .

## Моделирование и компьютерные технологии

Известно, что приведенная схема неустойчива, поэтому мы введем в (6) слагаемое  $\alpha v_{i,j,k}$  и выразим из этих уравнений величины  $v_{i,j+1,k}$ . Тогда при  $i = 2, \dots, N_x + 1, j = 2, \dots, N_y + 1$  получим:

$$v_{i,j+1,k} = 2v_{i,j,k} - v_{i,j-1,k} - \frac{h_y^2}{a_{i,j,k}} \left[ a_{i,j,k} v_{xx}^{i,j,k} - v_t^{i,j,k} + f_{i,j,k} + \alpha v_{i,j,k} \right], \quad \overline{k = 1, N_t}, \quad (12)$$

$$v_{i,j+1,N_t+1} = 2v_{i,j,N_t+1} - v_{i,j-1,N_t+1} + \frac{h_y^2}{a_{i,j,N_t+1}} \left[ a_{i,j,N_t+1} v_{xx}^{i,j,N_t+1} - v_t^{i,j,N_t+1} - f_{i,j,N_t+1} - \alpha v_{i,j,N_t+1} \right] - \frac{(1-\gamma)h_y^2}{\gamma a_{i,j,N_t+1}} \left[ a_{i,j,N_t} v_{xx}^{i,j,N_t} + a_{i,j,N_t+1} v_{yy}^{i,j,N_t} \right]. \quad (13)$$

Уравнения (12), (13) эквивалентны добавлению слагаемого  $\alpha u$  в уравнение (2). Таким образом, получаем итерационный процесс, позволяющий вычислять неизвестные значения  $v_{i,j+1,k}$  последовательно при всех  $j = 2, \overline{N_y + 1}, k = 1, \overline{N_t + 1}$ .

### Алгоритмические особенности метода дискретной регуляризации

Наиболее существенной особенностью метода является то, что величины  $N_x$  и  $N_y$  принимают небольшие значения. Такой вывод можно сделать, используя подход, принятый в теории регуляризации [19].

Определим функцию  $w_j$  следующим образом:

$$w_j = \max_{i,k} |v_{i,j+1,k} - v_{i,j,k}|, \quad j = 2, \dots, N_y + 1,$$

где  $v_{i,j,k}$  удовлетворяет (12), (13). Учитывая (9) и (10), получаем следующую оценку:

$$w_1 \leq (W + \delta)h_y, \quad (14)$$

где  $W = \max_{i,k} |\psi_{i,k}|, i = 1, \overline{N_x + 1}, k = 1, \overline{N_t + 1}$ . Обозначим  $m = \min_{i,j,k} |a_{i,j,k}|$ . Имеем:

$$\begin{aligned} v_{i,j+1,k} - v_{i,j,k} &= (v_{i,j,k} - v_{i,j-1,k}) + \frac{h_y^2}{a_{i,j,k}} \left( v_t^{i,j,k} - a_{i,j,k} v_{xx}^{i,j,k} - \alpha v_{i,j,k} - f_{i,j,k} \right) = \\ &= (v_{i,j,k} - v_{i,j-1,k}) + \left[ 2 \frac{h_y^2}{h_x^2} - \frac{h_y^2}{a_{i,j,k} h_t} \right] v_{i,j,k} + \\ &+ \frac{h_y^2}{a_{i,j,k} h_t} v_{i,j,k+1} - \frac{h_y^2}{a_{i,j,k}} \left[ \frac{a_{i,j,k}}{h_x^2} (v_{i+1,j,k} + v_{i-1,j,k}) + \alpha v_{i,j,k} + f_{i,j,k} \right]. \end{aligned}$$

Полагая  $F = \max_{i,j,k} |f_{i,j,k}|$ , из последнего соотношения и условий (5) следует

$$w_{j+1} \leq w_j + \left[ 4 \frac{h_y^2}{h_x^2} + 2 \frac{h_y^2}{m h_t} + \frac{\alpha h_y^2}{m} \right] \Phi e^{\beta t} + \frac{h_y^2}{m} F.$$

Полагая  $C = 4 \frac{h_y^2}{h_x^2} + 2 \frac{h_y^2}{m h_t} + \frac{\alpha h_y^2}{m}$ , получаем  $w_{j+1} \leq w_j + C \Phi e^{\beta t} + \frac{h_y^2}{m} F$  при  $j = 2, \overline{N_y + 1}$ . Учиты-

вая (14), получаем

$$w_{N_y+1} \leq W h_y + \delta h_y + (N_y - 1) \left( C \Phi e^{\beta t} + \frac{h_y^2}{m} F \right).$$

Согласуем величину  $C$  так, что с уровнем погрешности  $\delta$  и  $N_y$  так, чтобы при численной реализации метода дискретной регуляризации вычислительной схемы гарантировано было выполнено условие  $w_{N_x+1} \leq L\delta$  для некоторого  $L > 0$ .

Это условие будет выполнено, если имеет место следующее соотношение:

$$C \leq \Phi e^{-\beta t} \left( \frac{L\delta - Wh_y + \delta h_y}{(N_y - 1)} - \frac{h_y^2}{m} F \right). \quad (15)$$

С другой стороны,

$$N_y \leq 1 + m \frac{L\delta - Wh_y + \delta h_y}{mC\Phi e^{\beta t} + h_y^2 F}. \quad (16)$$

Из (15), (16) следует, что величина  $N_y$  может принимать только небольшие значения.

### Вычислительный эксперимент

С целью оценки эффективности предложенной вычислительной схемы был проведен вычислительный эксперимент при дополнительном условии  $u(X, y, t) = q(y, t)$ . Эксперимент проводился при разных уровнях погрешности  $\delta$ . В качестве тестовых функций выбирались решения следующей прямой задачи:

$$u_t = a(x, y, t)(u_{xx} + u_{yy}), \quad (x, y, t) \in Q_T, \quad (17)$$

$$u(x, 0, t) = \varphi(x, t), \quad u_y(x, 0, t) = \psi(x, t), \quad (x, t) \in M_x, \quad (18)$$

$$u(X, y, t) = q(y, t) \quad u(0, y, t) = g(y, t), \quad u(X, y, t) = q(y, t), \quad (y, t) \in M_y. \quad (19)$$

Решения этой задачи можно находить с помощью различных известных численных методов. Получив решение этой задачи и используя конечномерный аналог для  $u_y(x, 0, t)$ , находим  $\psi(t)$ . Далее, выберем величины параметров разбиения по пространственным переменным в соответствии с величиной  $h_t$ , соблюдая условия  $\frac{h_y^2}{mh_t} < 1$  и  $\frac{h_y^2}{h_x^2} < 1$ , тогда количество узлов по пространственным переменным определим по формулам  $X = N_x h_x$  и  $Y = N_y h_y$ . Основные этапы вычислительного эксперимента состоят в следующем:

*Шаг 1.* Моделирование тестовых функций. В качестве тестовых функций выбираются решения прямой задачи (17)–(19). Для ее численного решения используют метод конечных разностей. Величины шагов дискретизации по каждой переменной выбирают так, чтобы обеспечить устойчивость вычислительной схемы решения задачи (6)–(8). Далее, используя конечно-разностные аппроксимации, моделируем значения функции  $\psi(x, t)$ .

*Шаг 2.* Моделирование возмущенных исходных данных  $\varphi_\delta(x, t)$ ,  $\psi_\delta(x, t)$ ,  $g_\delta(y, t)$  и  $q_\delta(y, t)$ . Для этого к точным значениям граничных функций добавляем аддитивный шум следующим образом. Значения  $\varphi_\delta(x_i, t_k)$ ,  $\psi_\delta(x_i, t_k)$  в каждом узле сетки  $(x_i, 0, t_k)$  вычисляем по формулам:

$$\varphi_\delta(x_i, t_k) = \varphi(x_i, t_k) + \varphi_{err}(x_i, t_k); \quad \psi_\delta(x_i, t_k) = \psi(x_i, t_k) + \psi_{err}(x_i, t_k),$$

$$g_\delta(x_i, t_k) = g(x_i, t_k) + g_{err}(x_i, t_k); \quad q_\delta(x_i, t_k) = q(x_i, t_k) + q_{err}(x_i, t_k),$$

где функции  $\varphi_{err}(x, t)$ ,  $\psi_{err}(x, t)$ ,  $g_{err}(y, t)$  и  $q_{err}(y, t)$  являются значениями равномерно распределенных на  $[-\delta, \delta]$  случайных величин.

*Шаг 3.* Величины параметров разбиения по пространственным переменным выберем в соответствии с величиной  $h_t$ , отношениями и соблюдая следующие условия:  $\frac{h_y^2}{mh_t} < \frac{1}{2}$ ,  $\frac{h_y^2}{h_x^2} < 1$ .

Выбор параметра регуляризации  $\alpha$  согласуем с уровнем погрешности  $\delta$ , параметром  $h_y$  и величиной  $m$ , используя величину  $C$  и условие (15).

*Шаг 4.* Построение регуляризованного решения в точках  $(x, 0 + h_y, t)$ . С этой целью используем (7), получаем:

$$u(x_i, 0, t_k) = u_{i,1,k} = \varphi_{i,k}, \quad u(x_i, 0 + h_y, t_k) u_{i,2,k} = \varphi_{i,k} + \psi_{i,k} h_y.$$

*Шаг 5.* Решаем задачу (6)–(8) в оставшихся узлах сетки, используя итерационный процесс, основанный на вычислительной схеме (12), (13). На каждом новом шаге итерационного процесса находим  $u(x, y + h_y, t) = u(x_i, y_{j+1}, t_k)$  по пространственной переменной  $y$  при каждом  $j = \overline{2, N_y + 1}$  и  $k = \overline{1, N_t + 1}$ .

Предложенная схема была реализована для серии тестовых функций при постоянных и переменных коэффициентах  $a(x, y, t)$ . В каждой серии проводилось по несколько повторных расчетов для каждой функции. В статье приведены результаты вычислительных экспериментов для коэффициентов  $a(x, y, t) = 1$  и  $a(x, y, t) = 1 + 0.22(x + y + t)$ . Во всех тестах мы полагаем  $X = 1.5$  и  $Y = 1$ , а  $T = 2$  и, соответственно  $\overline{\Omega} = \{(x, y) : (x, y) \in [0, 1.5] \times [0, 1]\}$ , множества

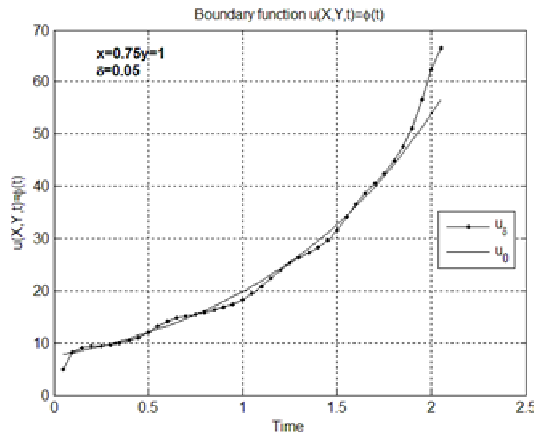
$$M_x = \{(x, t) : (x, t) \in [0, 1.5] \times [0, 2]\} \text{ и } M_y = \{(y, t) : (y, t) \in [0, 1] \times [0, 2]\}, \text{ а } \overline{Q_T} = \overline{\Omega} \times [0, 2].$$

Результаты вычислительного эксперимента для некоторых тестовых функций проиллюстрированы на нижеприведенных рисунках. На всех рисунках используются одинаковые обозначения. Одномерные графики демонстрируют результаты вычислений граничной функции  $u(0.75, 1, t) = \phi(0.75, t)$ . Величина погрешности исходных данных, при которой проводились расчеты, обозначена  $\delta$ . Обозначение  $u_0$  соответствует точному значению тестовой функции  $u(0.75, 1, t) = \phi(0.75, t)$ , а  $u_\delta$  – численному решению, полученному в точках  $(0.75, 1, t)$  методом дискретной регуляризации. Выбор этих одномерных графиков в качестве иллюстративных связан с тем, что значения функции в этих точках  $(0.75, 1, t)$  являются наиболее удаленными от известных граничных условий.

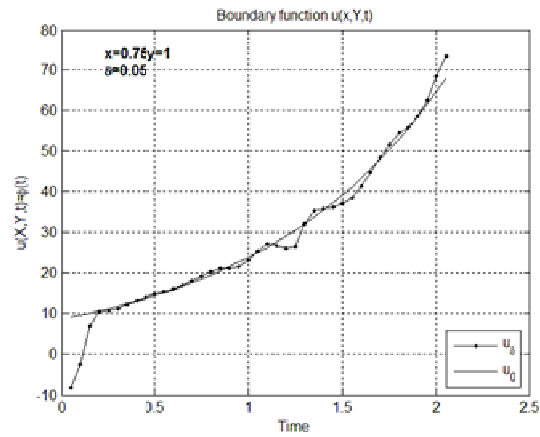
Двумерные поверхности, названные "Exact solution" изображают графики тестовой функций  $u(x, y, t)$  а поверхности, названные "Regularized solution" соответствуют численному решению  $u_\delta(x, y, t)$  задачи (6)–(8) в точках  $(x, 1, t)$  при  $(x, t) \in M_x$ . Ось абсцисс соответствует значениям пространственной переменной  $x \in [0, 1.5]$ , ось ординат – переменной  $t \in [0, 2]$ , а ось аппликат связана со значениями функций  $u(x, 1, t)$  и  $u_\delta(x, 1, t)$ . Как одномерные, так и двумерные рисунки (а) соответствуют решению задачи, полученному при  $a(x, y, t) = 1$ , а рисунки (б) – решению задачи, полученному при  $a(x, y, t) = 1 + 0.22(x + y + t)$ .

**Пример 1.** В этой серии экспериментов в качестве тестовых функций рассматривают непрерывно дифференцируемые, возрастающие по времени, не монотонные по пространственным переменным функции. На рис. 1, а, б изображены результаты численного решения, полученные в точках  $(0.75, 1, t)$  для  $\varphi(x, t) = 26/3e^t \cdot \cos(x - \pi/12)$ ,  $\psi(x, t) = 5e^t \cdot \cos(x - \pi/12)$ ,  $g(y, t) = e^t \cdot \cos(y - \pi/6)$  и  $q(y, t) = 1/3e^t \cdot \cos(y - \pi/6)$ . Двумерные поверхности "Regularized solution", изображенные на рис. 2, а, б изображают граничные поверхности численного решения  $u(x, 1, t)$ , полученные для всех точек  $(x, t) \in M_x$ .

**Пример 2.** В этой серии экспериментов в качестве тестовых функций рассматривают непрерывные функции, убывающие по времени и имеющие ограниченные производные по пространственным переменным. На рис. 3, а, б изображены результаты численного решения задачи (6)–(8), полученные в точках  $(0.75, 1, t)$  для тестовых функций  $\varphi(x, t) = 26/3e^{-t} \cdot \cos(x - \pi/12)$ ,  $\psi(x, t) = 5e^{-t} \cdot \cos(x - \pi/12)$ ,  $g(y, t) = e^{-t} \cdot \cos(y - \pi/6)$  и  $q(y, t) = 1/3e^{-t} \cdot \cos(y - \pi/6)$ .

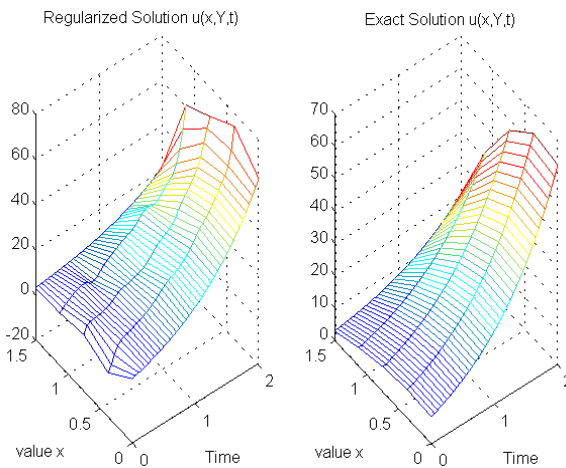


а)

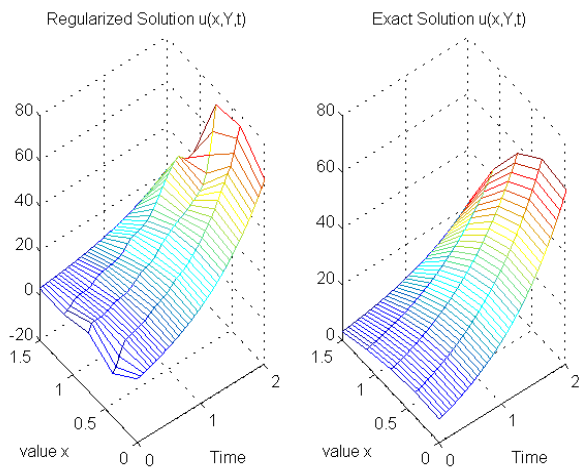


б)

Рис. 1. Результаты численного решения задачи (6)–(8) в точках  $(0.75, 1, t)$  для тестовых функций из примера 1

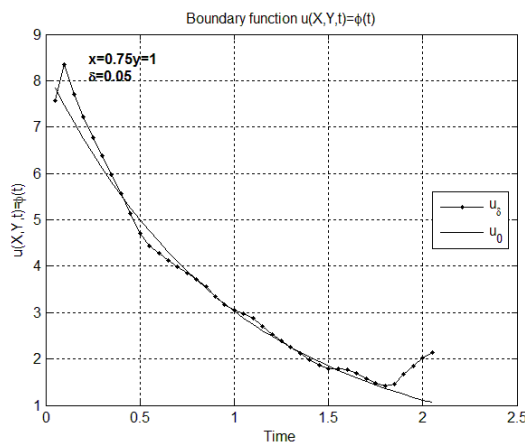


а)

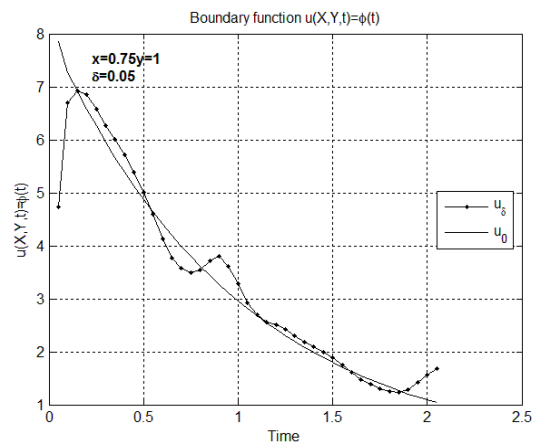


б)

Рис. 2. Результаты численного решения задачи (6)–(8) в точках  $(x, 1, t)$  для тестовых функций из примера 1



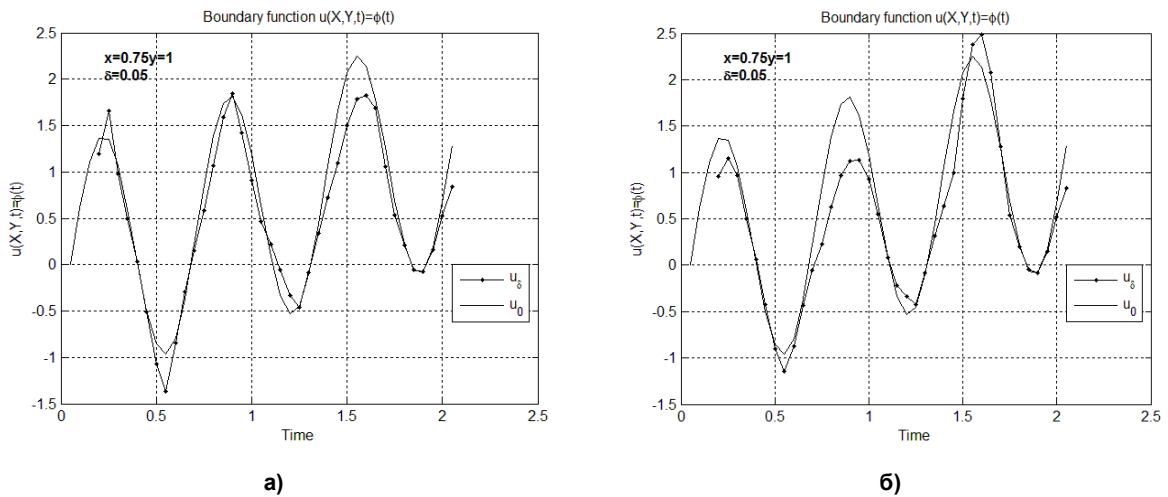
а)



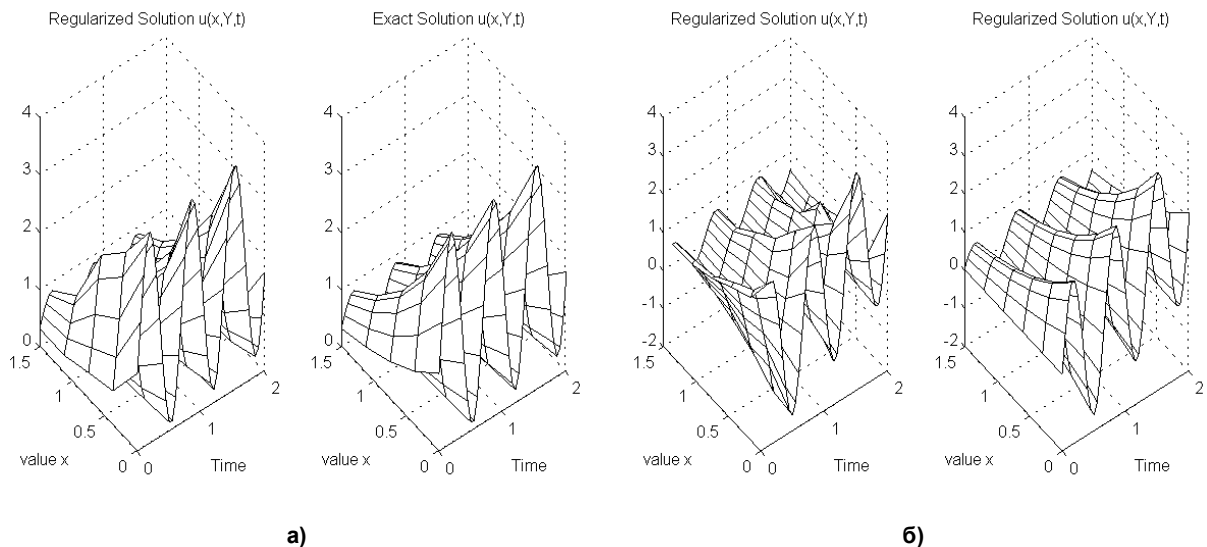
б)

Рис. 3. Результаты численного решения задачи (6)–(8) в точках  $(0.75, 1, t)$  для тестовых функций из примера 2

**Пример 3.** В этой серии экспериментов построены решения задачи (6)–(8) для тестовых функций, имеющих ограниченную производную по переменной, характеризующей время, и монотонные производные по пространственным переменным. На рис. 4, а, б изображены результаты численного решения задачи (6)–(8), полученные в точках  $(0.75, 1, t)$  для тестовых функций  $\varphi(x, t) = \psi(x, t) = e^{-x}(\sin(3\pi t) + t/2)$ ,  $g(y, t) = e^y(\sin(3\pi t) + t/2)$   $q(y, t) = e^{y-3/2}(\sin(3\pi t) + t/2)$  в точках  $(0.75, 1, t)$ . Рис. 5, а, б иллюстрируют граничные поверхности  $u(x, 1, t)$  численного решения задачи (6)–(8), полученные при  $a(x, y, t) = 1$  и  $a(x, y, t) = 1 + 0.22(x + y + t)$  соответственно.



**Рис. 4.** Результаты численного решения задачи (6)–(8) в точках  $(0.75, 1, t)$  для функций из примера 3



**Рис. 5.** Результаты численного решения задачи (6)–(8) в точках  $(x, 1, t)$  для тестовых функций из примера 3

**Пример 4.** В этой серии экспериментов качестве тестовых функций рассматривают непрерывные функции, имеющие ограниченные производные по времени и пространственным переменным. На рис. 6 а, б изображены результаты решения задачи (6)–(8) в точках  $(0.75, 1, t)$ , полученные для тестовых функций

$$\varphi(x, t) = 0.43(\cos(x - t + \pi/12) - \cos(x + t + 5\pi/12)),$$

$$\psi(x, t) = 0.5(\cos(x + t + 5\pi/12) - \cos(x - t - \pi/12)), \quad g(y, t) = 0.35(\sin(y + t) - \sin(y - t)) \text{ и}$$

$$q(y, t) = 0.9(\sin(y + t) - \sin(y - t)).$$



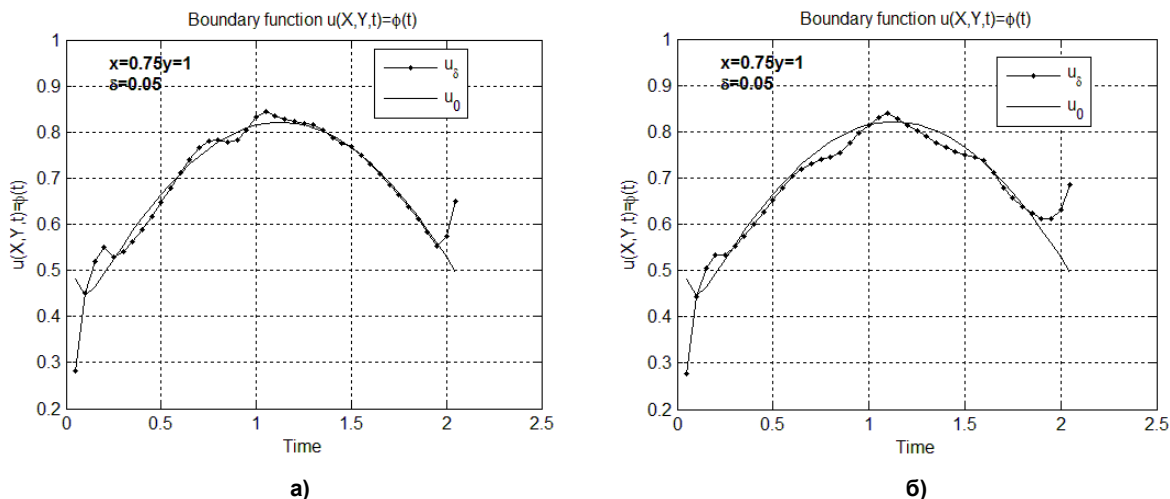


Рис. 6. Результаты численного решения задачи (6)–(8) в точках (0.75, 1, t) для функций из примера 4

С целью проведения сравнительного анализа точности численных методов в каждой серии экспериментов были найдены величины  $\Delta_C = \|u_\delta^C - \phi_0\|_{L_2}$  и  $\Delta_V = \|u_\delta^V - \phi_0\|_{L_2}$ , где  $u_\delta^C$  – решение, построенное с использованием метода дискретной регуляризации для уравнения с постоянным коэффициентом, а  $u_\delta^V$  с использованием метода дискретной регуляризации для уравнения с переменным коэффициентом, а  $\phi_0$  – значение тестовой функции в точках (0.75, 1, t). Средние значения этих величин, полученных в каждой серии эксперимента для некоторых значений  $\delta$ , представлены в таблице.

Экспериментальные оценки погрешностей

$\delta$	Тестовая функция примера 1		Тестовая функция примера 2		Тестовая функция примера 3		Тестовая функция примера 4	
	$\Delta_C$	$\Delta_V$	$\Delta_C$	$\Delta_V$	$\Delta_C$	$\Delta_V$	$\Delta_C$	$\Delta_V$
0,01	0,191	0,341	0,217	0,235	0,081	0,103	0,187	0,193
0,03	0,374	0,603	0,390	0,415	0,034	0,037	0,342	0,371
0,05	0,572	0,893	0,602	0,673	0,051	0,056	0,532	0,546

Заключение

В статье предложен метод решения обратных граничных задач с неизвестными начальными условиями, основанный на применении явных разностных схем. Этот метод позволил не только найти неизвестную граничную функцию, но и построить численное решение обратной граничной задачи во всей рассматриваемой области при неизвестных начальных условиях. На основании предложенной схемы был проведен вычислительный эксперимент. Результаты эксперимента свидетельствуют о достаточной эффективности метода, а экспериментальные оценки погрешности численных решений подтверждают устойчивость метода в соответствующей области.

Литература

1. Alifanov, O.M. *Inverse Heat Transfer Problems International Series in Heat and Mass Transfer / O.M. Alifanov.* – New York, Springer, 2011.
2. Model for nanocrystal growth in an amorphous alloy / P.A. Gamov, A.D. Drozin, M.V. Dudorov, V.E. Roschin // *Russian Metallurgy (Metally).* – 2012. – 11. – P. 1002–1005.
3. Глухов, Д.М. Моделирование работы многофазных асинхронных двигателей в аварийных режимах эксплуатации / Д.М. Глухов, О.О. Муравлева // *Известия Томского политехнического университета.* – 2005. – 308(7). – P. 138–142.

4. Алексеев, Г.В. Оценки устойчивости в задачах идентификации для уравнения конвекции-диффузии-реакции / Г.В. Алексеев, И.С. Вахитов, О.В. Соболева // Журнал выч. матем. и матем. физ. – 2012. – 52(12). – Р. 2190–2205.
5. Красс, М.С. Моделирование техногенных причин короткопериодных аномалий климата / М.С. Красс, В.Г. Мерзликин, О.В. Сидоров // Вестник Томского государственного университета. – 2011. – 349. – Р. 193–199.
6. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
7. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1988. – 287 с.
8. Тихонов, А.Н. Нелинейные некорректные задачи / А.Н. Тихонов, А.С. Леонов, А.Г. Ягола. – М.: Наука, 1995. – 230 с.
9. Vasin, V.V. Approximation of solutions with singularities of various types for linear ill-posed problems / V.V. Vasin // Mathematics Reports. – 2014. – 89(1). – Р. 30–33.
10. Korolev, Y. Making use of a partial order in solving inverse problems / Y. Korolev, A. Yagola // Inverse Problems. – 2013. – 29(9), 095012.
11. Танана, В.П. Об оптимальном по порядку методе решения условно-корректных задач / В.П. Танана, Н.М. Япарова // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2006. – 9(4). – Р. 353–368.
12. Cialkowski, M. Sequential and global method of solving an inverse problem of heat conduction equation / M. Cialkowski, K. Grysa // Journal of Theoretical and applied Mechanics. – 2010. – 48(1). – Р. 111–134.
13. Cialkowski, M. Solution of a stationary inverse heat conduction problem by means of Trefftz non-continuous method / M. Cialkowski, A. Frackowiak, K. Grysa // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2007. – 50(11-12). – Р. 2170–2181.
14. Laplace inversion of low-resolution NMR relaxometry data using sparse representation methods / P. Berman, O. Levi, Y. Parmet et al. // Concepts in Magnetic Resonance Part A. – 2013. – 42(3). – Р. 72–88.
15. Yaparova, N.M. Numerical methods for solving a boundary value inverse heat conduction problem / N.M. Yaparova // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2014. – 22(5). – Р. 832–847.
16. Лаврентьев, М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. – М.: Наука, 1980. – 286 с.
17. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уралцева. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
18. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
19. Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. – М.: Наука, 1990. – 232 с.

**Япарова Наталья Михайловна**, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск; ddjy@math.susu.ac.ru.

*Поступила в редакцию 10 февраля 2015 г.*

## METHOD FOR SOLVING SOME MULTIDIMENSIONAL INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR PARABOLIC PDEs WITHOUT INITIAL CONDITIONS

*N.M. Yaparova, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation; ddjy@math.susu.ac.ru*

This paper proposes a new method for solution of some inverse boundary value problems with unknown initial conditions. The method is based on the use of finite-difference schemes and its application has regularized solutions both at the border and throughout the area under consideration with unknown initial conditions. The proposed method is the basis for the development of a numerical method for the solution of inverse boundary value problems with unknown initial conditions. The computational experiment was carry out in order to evaluate the effectiveness of the proposed method and obtaining experimental error estimates. During the experiment numerical solutions of problems with constant and variable coefficient within the whole domain and on its boundary were obtained. The experiment results are presented in the paper. These results indicate the sufficient stability and the efficiency of the proposed method solutions.

*Keywords: parabolic equations, inverse boundary problem, regularization method, numerical method, computational scheme.*

### References

1. Alifanov O.M.: Inverse Heat Transfer Problems International Series in Heat and Mass Transfer, New York, Springer, 2011, 324 p.
2. Gamov P.A., Drozin A.D., Dudorov M.V., Roschin V.E. [Model for Nanocrystal Growth in an Amorphous Alloy]. *Russian Metallurgy*, 2012, no. 11, pp. 1002-1005. DOI: 10.1134/S0036029512110055
3. Glukhov D.M., Muravleva O.O. [Modeling of Multiphase Induction Motors in the Emergency Mode of Operation]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2005, vol. 308, no. 7, pp. 138–142. (in Russ.)
4. Alekseev G.V., Vahitov I.S., Sobolev O.V. [Stability Estimates in Problems of Identification for Convection-diffusion-reaction]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2012, vol. 52, no. 12, pp. 2190-2205. (in Russ.)
5. Krass M.S., Merzlikin V.G., Sidorov O.V. [Modeling Anthropogenic Causes of Short Climate Anomalies]. *Bulletin of Tomsk State University*, 2011, no. 349, pp. 193-199. (in Russ.)
6. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineynykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya* [The Theory of Linear Ill-posed Problems and its Applications]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 206 p.
7. Tikhonov A. N., Arsenin V.Y. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for Solving Ill-posed Problems]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 287 p.
8. Tikhonov A. N., Leonov A.S., Yagola A.G. *Nelineynyye nekorrektnyye zadachi* [Nonlinear Ill-posed Problems]. Moscow, Nauka Publ., 1995, 230 p.
9. Vasin V.V. Approximation of Solutions with Singularities of Various Types for Linear Ill-posed Problems. *Mathematics Reports*, 2014, vol. 89, no. 1, pp. 30-33. DOI: 10.1134/S1064562414010116
10. Korolev Y., Yagola A. Making Use of a Partial Order in Solving Inverse Problems. *Inverse Problems*, 2013, vol. 29, no. 9, 095012. DOI: 10.1088/0266-5611/29/9/095012
11. Tanana V.P., Yaparova N.M.: [The Optimum in Order Method of Solving Conditionally-correct Problems]. *Siberian Journal. of Numerical Mathematics*, Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci., 2006, Vol. 9, No 4, pp. 353–368. (In Russ.)
12. Cialkowski M., Grysa K. [Sequential and Global Method of Solving an Inverse Problem of Heat Conduction Equation]. *Journal of Theoretical and applied Mechanics*, 2010, vol. 48, no. 1, pp. 111–134.
13. Cialkowski M., Frackowiak A., Grysa K. Solution of a Stationary Inverse Heat Conduction Problem by Means of Trefftz Non-continuous Method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2007, vol.50, no. 11-12, pp. 2170-2181. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2006.11.030
14. Berman P., Levi O., Parmet Y., Saunders M. and Wiesman Z. Laplace Inversion of Low-resolution NMR Relaxometry Data Using Sparse Representation Methods. *Concepts in Magnetic Resonance Part A*, 2013, vol. 42, no 3, pp. 72–88. DOI: 10.1002/cmr.a.21263

15. Yaparova N.M. Numerical Methods for Solving a Boundary Value Inverse Heat Conduction Problem, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2014, vol. 22, no 5, pp. 832-847. DOI: 10.1080/17415977.2013.830614

16. Lavrentiev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. *Nekorrektnye zadachi matematicheskoy fiziki i analiza* [Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis], Moscow, Nauka Publ., 1980, 286 p.

17. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type]. Moscow, Nauka Publ., 1980, 736 p.

18. Samarskii A. A. *Teoriya raznostnykh skhem* [The Theory of Difference Schemes], Moscow, Nauka Publ., 1977, 656 p. DOI: 10.1201/9780203908518

19. A.N. Tikhonov, A.V. Goncharsky, V.V. Stepanov and A.G. Yagola: *Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems], Moscow, Nauka Publ., 1995. 232 p. DOI: 10.1007/978-94-015-8480-7

*Received 10 February 2015*

---

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СТАТЬИ

Япарова, Н.М. Метод решения некоторых многомерных обратных граничных задач параболического типа без начальных условий / Н.М. Япарова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2015. – Т. 15, № 2. – С. 97–108. DOI: 10.14529/ctcr150211

### REFERENCE TO ARTICLE

Yaparova N.M. Method for Solving Some Multidimensional Inverse Boundary Value Problems for Parabolic PDEs without Initial Conditions. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2015, vol. 15, no. 2, pp. 97–108. (in Russ.) DOI: 10.14529/ctcr150211