

## ЗАДАЧА КОНВЕЯ–ГОРДОНА ДЛЯ РЕДУЦИРОВАННЫХ ПОЛНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГРАФОВ<sup>1</sup>

Ф.Г. Кораблёв<sup>2</sup>, А.А. Казаков<sup>3</sup>

Работа посвящена исследованию графов, вложенных в трёхмерное пространство, которые получаются из полных графов удалением нескольких рёбер, инцидентных одной вершине. Для всех таких графов вводится аналог функции Конвея–Гордона  $\omega_2$ . Доказывается, что её значение равно нулю для всех графов, полученных из полных графов с не менее, чем восемью вершинами. Также приводятся примеры графов с шестью вершинами, для которых значение этой функции равно единице.

*Ключевые слова:* пространственный граф; гамильтонов набор циклов; зацепление.

### Введение

Настоящая работа посвящена исследованию *редуцированных полных пространственных графов*, то есть вложенных в  $R^3$  графов, которые получаются из полных графов удалением нескольких рёбер, инцидентных одной вершине. *Гамильтоновой парой циклов* в пространственном графе называется пара непересекающихся простых замкнутых путей по его рёбрам, проходящим через все его вершины.

Пусть  $l_1 \cup l_2 \subset R^3$  – двухкомпонентное зацепление. Определим величину  $lk_2(l_1, l_2)$  как остаток от деления на 2 коэффициента зацепления  $lk(l_1, l_2)$ . Этот остаток не зависит от выбора ориентаций компонент  $l_1$  и  $l_2$ . Для каждого пространственного графа  $G$  определим значение функции  $\omega_2(G)$  как остаток от деления на 2 суммы  $\sum_{(\alpha, \beta)} lk_2(\alpha, \beta)$ , где суммирование берётся по всем гамильтоновым парам циклов  $(\alpha, \beta)$  в графе  $G$ .

Изначально функция  $\omega_2$  была предложена Дж. Конвеем и К. Гордоном для полных пространственных графов с шестью вершинами (см. [1]). Они использовали её для доказательства того, что каждый такой граф содержит нетривиальное зацепление. В работе [2] нами было показано, что значение функции  $\omega_2$  для полного пространственного графа  $K_n$ ,  $n \geq 6$  равно нулю тогда и только тогда, когда  $n \geq 7$ . Помимо этого в работе [3] нами было показано, что значение функции  $\omega_2$  равно нулю для всех полных двудольных пространственных графов. Также в работе [4] показано, что значение функции  $\omega_2$  равно единице для всех пространственных графов из семейства Петерсена.

В настоящей работе мы вычисляем значение функции  $\omega_2$  для всех редуцированных полных пространственных графов, которые получаются из полного пространственного графа с  $n \geq 8$  вершинами удалением  $m$  рёбер,  $0 < m < n - 2$ , инцидентных одной вершине. Оказывается, что для всех таких графов значение функции  $\omega_2$  равно нулю. Доказательство состоит из двух шагов: сначала мы показываем, что значение функции  $\omega_2$  не зависит от вложения графа в  $R^3$ . Затем мы доказываем тривиальность функции  $\omega_2$ , используя *каноническое вложение* полного графа в  $R^3$  (также оно использовалось в [2, 5]).

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского государственного университета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020), гранта РФФИ № 14-01-00441 и гранта ведущих научных школ 1015.2014.1.

<sup>2</sup> Кораблёв Филипп Глебович – доцент кафедры компьютерной топологии и алгебры, Челябинский государственный университет; Лаборатория квантовой топологии, Челябинский государственный университет; заведующий отделом алгоритмической топологии, Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского Уральского отделения Российской академии наук.

E-mail: korablev@csu.ru

<sup>3</sup> Казаков Александр Андреевич – преподаватель кафедры компьютерной топологии и алгебры, Челябинский государственный университет.

E-mail: Kazakov.Al.An@gmail.com

### 1. Независимость функции $\omega_2$ от вложения

Далее через  $G_{n,m}$  будем обозначать пространственный граф, который получается из полного графа с  $n$  вершинами удалением  $m$  рёбер, инцидентных одной вершине,  $V(G_{n,m})$  – множество вершин этого графа,  $E(G_{n,m})$  – множество его рёбер,  $\Gamma(G_{n,m})$  – множество гамильтоновых пар циклов в графе  $G_{n,m}$ . Пусть  $a, b \in E(G_{n,m})$ . Обозначим  $L_{a,b}(G_{n,m})$  множество гамильтоновых пар циклов в графе  $G_{n,m}$ , одна из компонент которых проходит по ребру  $a$ , а другая – по ребру  $b$ .

**Теорема 1.** Пусть  $G_{n,m}$  – редуцированный полный пространственный граф,  $n \geq 8$ ,  $0 < m < n - 2$ . Тогда для любых двух рёбер  $a, b \in E(G_{n,m})$  мощность  $|L_{a,b}(G_{n,m})|$  чётна.

**Доказательство.** Пусть  $v_1, \dots, v_n \in V(G_{n,m})$  – вершины графа  $G_{n,m}$ , и пусть этот граф получается из полного пространственного графа удалением  $m$  рёбер, инцидентных вершине  $v_1$ . Обозначим  $A_s \subset L_{a,b}(G_{n,m})$ ,  $s = 3, 4$ , множество, состоящее из гамильтоновых пар циклов, в которых найдётся компонента, являющаяся  $s$ -угольником и проходящая по ребру  $a$  и через вершину  $v_1$ . Можно считать, что если  $(\alpha, \beta) \in A_s$ , то компонента  $\alpha$  удовлетворяет этому условию. Заметим, что для каждой такой компоненты  $\alpha$  пары циклов  $(\alpha, \beta) \in A_s$  существует ровно  $(n-5)!$  различных компонент  $\beta$ , если  $\alpha$  – треугольник, и ровно  $(n-6)!$  различных компонент  $\beta$ , если  $\alpha$  – четырёхугольник. Следовательно, так как  $n \geq 8$ , то множества  $A_3$  и  $A_4$  чётны. Аналогичным образом чётными являются множества  $B_s \subset L_{a,b}(G_{n,m})$ ,  $s = 3, 4$ , состоящие из пар циклов, в которых найдётся компонента, являющаяся  $s$ -угольником и проходящая по ребру  $b$  и через вершину  $v_1$ .

Так как множества  $A_3, A_4, B_3$  и  $B_4$  попарно не пересекаются, то для доказательства чётности множества  $L_{a,b}(G_{n,m})$  достаточно показать, что множество

$$\widehat{L_{a,b}(G_{n,m})} = L_{a,b}(G_{n,m}) \setminus (A_3 \cup A_4 \cup B_3 \cup B_4)$$

чётно. Для этого каждой паре циклов  $(\alpha, \beta) \in \widehat{L_{a,b}(G_{n,m})}$  сопоставим другую пару циклов  $(\alpha', \beta') \in \widehat{L_{a,b}(G_{n,m})}$ . Пусть

$$\alpha = (v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}, \dots, v_{i_k}) \text{ и } \beta = (v_{j_1}, v_{j_2}, v_{j_3}, \dots, v_{j_l}).$$

Такая запись означает, что компонента  $\alpha$  образована последовательным обходом вершин  $v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}, \dots, v_{i_k} \in V(G_{n,m})$ , а компонента  $\beta$  образована последовательным обходом вершин  $v_{j_1}, v_{j_2}, v_{j_3}, \dots, v_{j_l} \in V(G_{n,m})$ , где  $k+l=n$  и  $k, l \geq 3$ . Без ограничения общности можно считать, что ребро  $a \in E(G_{n,m})$  инцидентно вершинам  $v_{i_1}, v_{i_2}$ , а ребро  $b \in E(G_{n,m})$  инцидентно вершинам  $v_{j_1}, v_{j_2}$ .

Рассмотрим два случая.

**Случай 1.** Пусть  $(\alpha, \beta) \in \widehat{L_{a,b}(G_{n,m})}$ , причём компонента  $\alpha$  проходит через вершину  $v_1$  и  $v_1 \notin \{v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}, v_{i_k}\}$ . В этом случае построим новую пару циклов  $(\alpha', \beta')$  с помощью операции *переключения*:

$$\alpha' = (v_{i_1}, v_{i_2}, v_{j_3}, \dots, v_{j_l}) \text{ и } \beta' = (v_{j_1}, v_{j_2}, v_{i_3}, \dots, v_{i_k}).$$

Так как максимальный подграф графа  $G_{n,m}$ , натянутый на вершины  $v_2, \dots, v_n$ , является полным, значит он содержит рёбра, соединяющие пары вершин  $(v_{i_2}, v_{j_3}), (v_{i_1}, v_{j_l}), (v_{j_2}, v_{i_3})$  и  $(v_{j_1}, v_{i_k})$ . Непосредственно проверяется, что так как  $n \geq 5$ , то  $(\alpha', \beta') \in \widehat{L_{a,b}(G_{n,m})}$  и пары  $(\alpha', \beta')$  и  $(\alpha, \beta)$  различны.

**Случай 2.** Пусть теперь компонента  $\alpha$  пары  $(\alpha, \beta) \in \overline{L_{a,b}(G_{n,m})}$  проходит через вершину  $v_1$  и  $v_1 = v_{i_s}$ , где  $s \in \{1, 2, 3, k\}$ . С точностью до переобозначений можно считать, что  $v_1 = v_{i_2}$  или  $v_1 = v_{i_3}$ . В этом случае также с помощью переключения построим новую пару  $(\alpha', \beta') \in \overline{L_{a,b}(G_{n,m})}$ :

$$\alpha' = (v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}, v_{i_4}, v_{j_3}, \dots, v_{j_l}) \text{ и } \beta' = (v_{j_1}, v_{j_2}, v_{i_5}, \dots, v_{i_k}).$$

Непосредственно проверяется, что  $(\alpha', \beta') \in \overline{L_{a,b}(G_{n,m})}$  и пары  $(\alpha', \beta')$  и  $(\alpha, \beta)$  различны.

Аналогичным образом рассматривается случай, когда компонента  $\beta$  пары  $(\alpha, \beta) \in \overline{L_{a,b}(G_{n,m})}$  проходит через вершину  $v_1$  и  $v_1 = v_{j_s}$ , где  $s \in \{1, 2, 3, l\}$ ,  $l \geq 5$ . Таким образом, всё множество  $\overline{L_{a,b}(G_{n,m})}$  разбито на пары, следовательно оно является чётным. Тогда чётным является и множество  $L_{a,b}(G_{n,m})$ . Теорема 1 доказана.

**Следствие 1.** Пусть  $G_{n,m}$  и  $G'_{n,m}$  – два редуцированных полных пространственных графа,  $n \geq 8$ ,  $0 < m < n - 2$ . Тогда  $\omega_2(G_{n,m}) = \omega_2(G'_{n,m})$ .

**Доказательство.** Пространственный граф  $G'_{n,m}$  получается из пространственного графа  $G_{n,m}$  с помощью изотопии и операций *переброски*, каждая из которых состоит в преобразовании выбранного перекрёстка, содержащегося в некотором шаре, в противоположный перекрёсток (верхнее ребро становится нижним и наоборот, рис. 1, также см. [2]). При изотопии коэффициент зацепления не меняется, следовательно достаточно проверить, что при переброске, применённой к некоторой паре рёбер  $a, b \in E(G_{n,m})$ , значение функции  $\omega_2$  не изменится.

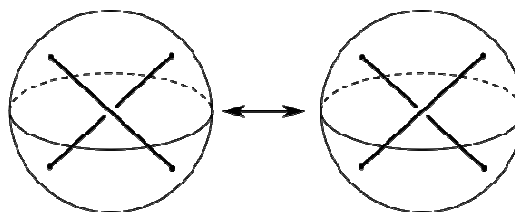


Рис. 1. Операция переброски

Заметим, что при такой переброске для всех пар  $(\alpha, \beta) \in L_{a,b}(G_{n,m})$  коэффициент зацепления  $lk_2(\alpha, \beta)$  меняется на единицу. Для всех остальных гамильтоновых пар циклов из множества  $\Gamma(G_{n,m}) \setminus L_{a,b}(G_{n,m})$  коэффициент зацепления не меняется. В силу теоремы 1 множество  $L_{a,b}(G_{n,m})$  чётно. Следовательно, при переброске значение функции  $\omega_2$  не меняется. Следствие 1 доказано.

## 2. Тривиальность функции $\omega_2$

Пусть  $\{e_1, \dots, e_l\} \subset E(K_n)$  – набор рёбер в полном пространственном графе  $K_n$  с  $n \geq 6$  вершинами. Как и раньше, будем обозначать  $\Gamma(K_n)$  множество всех гамильтоновых пар циклов в графе  $K_n$ . Обозначим  $\Gamma_{e_1, \dots, e_l} \subset \Gamma(K_n)$  множество гамильтоновых пар циклов, проходящих по всем выбранным рёбрам  $e_1, \dots, e_l$ . Также для произвольного подмножества  $L \subseteq \Gamma(K_n)$  определим значение функции  $s_2(L)$  как остаток от деления на 2 суммы

$$\sum_{(\alpha, \beta) \in L} lk_2(\alpha, \beta).$$

Отметим, что  $s_2(\Gamma(K_n)) = \omega_2(K_n)$ .

Полный пространственный граф будем называть *каноническим*, если он получается следующим образом (такой граф рассматривался в [2, 5], также см. рис. 2):

1. Располагаем вершины  $v_1, \dots, v_n$  в вершинах правильного  $n$ -угольника, лежащего в плоскости  $Oxy$  пространства  $R^3$ ;

2. Опускаем каждую вершину  $v_i$ ,  $i=1, \dots, n$  на  $i-1$  единиц вниз;
3. Соединяем все вершины попарно между собой прямолинейными отрезками.

**Лемма 1.** Пусть  $e \in E(K_n)$  – ребро полного пространственно-го графа  $K_n$ ,  $n \geq 8$ . Тогда  $s_2(\Gamma_e) = 0$ .

**Доказательство.** Пусть редуцированный полный пространственный граф  $G_{n,1}$  получается из полного пространственного графа  $K_n$  удалением ребра  $e$ . Тогда

$$\omega_2(G_{n,1}) = \omega_2(K_n) + s_2(\Gamma_e),$$

где сложение осуществляется по модулю 2.

Из теоремы 1 и [2, Теорема 1] следует, что значения  $\omega_2(G_{n,1})$  и  $\omega_2(K_n)$  не зависят от пространственных вложений. Следовательно, для вычисления значения  $s_2(\Gamma_e)$  можно считать, что полный пространственный граф  $K_n$  является каноническим. Также будем считать, что ребро  $e$  инцидентно вершинам  $v_1$  и  $v_2$ .

Рассмотрим инволюцию  $\tau: K_n \rightarrow K_n$ , индуцированную следующим отображением вершин графа  $K_n$ : все вершины  $v_3, \dots, v_n$  остаются неподвижными, а вершины  $v_1$  и  $v_2$  меняются местами.

Пусть  $(\alpha, \beta) \in \Gamma_e$ . С точностью до переобозначений можно считать, что компонента  $\alpha$  проходит по ребру  $e$ . Рассмотрим гамильтонову пару циклов  $(\alpha', \beta) \in \Gamma_e$ , где  $\alpha' = \tau(\alpha)$ . Если  $(\alpha', \beta) = (\alpha, \beta)$ , то компонента  $\alpha$  является треугольником, причём образующие её рёбра (кроме ребра  $e$ ) проходят выше всех остальных рёбер графа  $K_n$ . Тогда  $lk_2(\alpha, \beta) = 0$ .

Если  $(\alpha', \beta) \neq (\alpha, \beta)$ , то из построения следует, что при инволюции  $\tau$  индексы двойных точек, образованных рёбрами компонент  $\alpha$  и  $\beta$ , сохраняются (рис. 3). Тогда  $lk_2(\alpha, \beta) = lk_2(\alpha', \beta)$ . Следовательно  $s_2(\Gamma_e) = 0$ . Лемма 1 доказана.

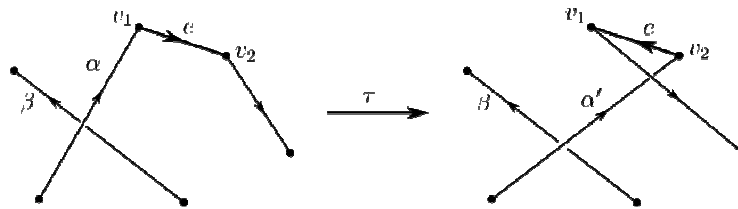


Рис. 3. При инволюции  $\tau$  индексы двойных точек, образованных рёбрами компонент  $\alpha$  и  $\beta$ , сохраняются

**Лемма 2.** Пусть  $e_1, e_2 \in E(K_n)$  – два смежных ребра полного пространственного графа  $K_n$ ,  $n \geq 8$ . Тогда  $s_2(\Gamma_{e_1, e_2}) = 0$ .

**Доказательство.** Пусть редуцированный полный пространственный граф  $G_{n,2}$  получается из полного пространственного графа  $K_n$  удалением смежных рёбер  $e_1, e_2$ . Тогда

$$\omega_2(G_{n,2}) = \omega_2(K_n) + s_2(\Gamma_{e_1}) + s_2(\Gamma_{e_2}) + s_2(\Gamma_{e_1, e_2}),$$

где сложение осуществляется по модулю 2.

Из того, что значения  $\omega_2(G_{n,2})$  и  $\omega_2(K_n)$  не зависят от пространственных вложений графов и из леммы 1 следует, что значение  $s_2(\Gamma_{e_1, e_2})$  также не зависит от конкретного пространственного графа  $K_n$ . Поэтому будем считать, что этот граф  $K_n$  является каноническим. Также будем считать, что ребро  $e_1$  инцидентно паре вершин  $(v_1, v_2)$ , а ребро  $e_2$  инцидентно паре вершин  $(v_2, v_3)$ . Рассмотрим инволюцию  $\tau: K_n \rightarrow K_n$ , которая индуцирована следующим отображением

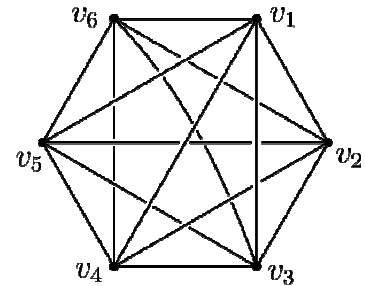


Рис. 2. Канонический полный пространственный граф с шестью вершинами

вершин графа  $K_n$ : все вершины  $v_4, \dots, v_n$  и вершина  $v_2$  остаются неподвижными, а вершины  $v_1$  и  $v_3$  меняются местами.

Пусть  $(\alpha, \beta) \in \Gamma_{e_1, e_2}$ . Без ограничения общности можно считать, что компонента  $\alpha$  последовательно проходит по рёбрам  $e_1$  и  $e_2$ . Рассмотрим пару  $(\alpha', \beta)$ , где  $\alpha' = \tau(\alpha)$ . Если  $(\alpha', \beta) = (\alpha, \beta)$ , то из построения следует, что компонента  $\alpha$  является четырёхугольником, проходящим через вершины  $v_1, v_2, v_3$  и некоторую вершину  $v_i$ . Тогда, так как рёбра графа  $K_n$ , инцидентны парам вершин  $(v_1, v_i)$  и  $(v_3, v_i)$ , проходят выше всех остальных рёбер, то  $lk_2(\alpha, \beta) = 0$ .

Если  $(\alpha', \beta) \neq (\alpha, \beta)$ , то из построения следует, что  $lk_2(\alpha, \beta) = lk_2(\alpha', \beta)$  (см. рис. 3). Следовательно  $s_2(\Gamma_{e_1, e_2}) = 0$ . Лемма 2 доказана.

**Теорема 2.** Пусть  $G_{n,m}$  – редуцированный полный пространственный граф,  $n \geq 8$ ,  $0 < m < n - 2$ . Тогда  $\omega_2(G_{n,m}) = 0$ .

**Доказательство.** Пусть редуцированный полный пространственный граф  $G_{n,m}$  получается из полного пространственного графа  $K_n$  удалением рёбер  $e_1, e_2, \dots, e_m \in E(K_n)$ , инцидентных одной вершине графа  $K_n$ . Тогда из принципа включения-исключения следует, что

$$\begin{aligned} \omega_2(G_{n,m}) = \omega_2(K_n) + \sum_{i=1}^m s_2(\Gamma_{e_i}) + \sum_{\{i_1, i_2\} \subseteq \{1, \dots, m\}} s_2(\Gamma_{e_{i_1}, e_{i_2}}) + \dots + \\ + \sum_{\{i_1, \dots, i_{m-1}\} \subseteq \{1, \dots, m\}} s_2(\Gamma_{e_{i_1}, \dots, e_{i_{m-1}}}) + s_2(\Gamma_{e_1, \dots, e_m}), \end{aligned}$$

где сложение осуществляется по модулю 2.

Заметим, что  $\Gamma_{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}} = \emptyset$  при  $k \geq 3$ . Следовательно, соотношение принимает вид

$$\omega_2(G_{n,m}) = \omega_2(K_n) + \sum_{i=1}^m s_2(\Gamma_{e_i}) + \sum_{\{i_1, i_2\} \subseteq \{1, \dots, m\}} s_2(\Gamma_{e_{i_1}, e_{i_2}}).$$

Из лемм 1 и 2 следует, что  $s_2(\Gamma_{e_i}) = 0$  для всех  $i = 1, \dots, m$ , и  $s_2(\Gamma_{e_{i_1}, e_{i_2}}) = 0$  для всех  $\{i_1, i_2\} \subseteq \{1, \dots, m\}$ . Также из теоремы 2 работы [2] следует, что  $\omega_2(K_n) = 0$  при  $n \geq 8$ . Следовательно  $\omega_2(G_{n,m}) = 0$ . Теорема 2 доказана.

Можно показать, что существуют различные редуцированные полные пространственные графы, получающиеся из полного графа с шестью вершинами удалением одинакового числа рёбер, для которых значения функции  $\omega_2$  также различны. Для этого рассмотрим канонический полный пространственный граф  $K_6$ . Пусть  $V(K_6) = \{v_1, \dots, v_6\}$  (рис. 2). Этот граф содержит единственную пару циклов  $(\alpha, \beta)$ , для которой  $lk_2(\alpha, \beta) = 1$ :

$$\alpha = (v_1, v_3, v_5) \text{ и } \beta = (v_2, v_4, v_6).$$

Тогда, если удалить из графа  $K_6$  ребро, инцидентное паре вершин  $(v_1, v_2)$ , то получится пространственный граф  $G_{6,1}$ , для которого значение функции  $\omega_2$  равно 1. Если же удалить ребро, инцидентное паре вершин  $(v_1, v_3)$ , то получится пространственный граф  $G'_{6,1}$ , для которого значение функции  $\omega_2$  равно 0. Аналогичным образом строятся графы  $G_{6,2}$  и  $G_{6,3}$ , для которых значение функции  $\omega_2$  равно 1. Эти графы получаются из  $K_6$  удалением семейств рёбер  $\{(v_1, v_2), (v_1, v_4)\}$  и  $\{(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_1, v_6)\}$  соответственно. Графы  $G'_{6,2}$  и  $G'_{6,3}$ , для которых значение функции  $\omega_2$  равно 0, получаются из  $K_6$  удалением семейств рёбер  $\{(v_1, v_3), (v_1, v_4)\}$  и  $\{(v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_1, v_5)\}$  соответственно.

### Литература

1. Conway, J.H. Knots and links in spatial graphs / J.H. Conway, C.McA. Gordon // *Journal of Graph Theory*. – 1983. – Vol. 7. – P. 445–453.
2. Казаков, А.А. Тривиальность функции  $\omega_2$  для пространственных вложений полных графов / А.А. Казаков, Ф.Г. Кораблёв // *Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика*. – 2013. – Т. 13, № 2. – С. 38–47.
3. Кораблёв, Ф.Г. Функция  $\omega_2$  для полных двудольных пространственных графов / Ф.Г. Кораблёв, А.А. Казаков, А.И. Сергеева // *Вестник Челябинского государственного университета*. – 2012. – № 26 (280). – С. 125–128.
4. Sachs, H. On spatial representations of finite graphs / H. Sachs // *Finite and Infinite Sets, Vol I and II, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai*. – 1984. – Vol. 37. – P. 649–662.
5. Веснин, А.Ю. О зацепленности гамильтоновых пар циклов в пространственных графах / А.Ю. Веснин, А.В. Литвинцева // *Сибирские Электронные математические известия*. – 2010. – Т. 7. – С. 383–393.

Поступила в редакцию 4 марта 2015 г.

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2015, vol. 7, no. 3, pp. 16–21*

## CONWAY–GORDON PROBLEM FOR REDUCED COMPLETE SPATIAL GRAPHS

Ph.G. Korablev<sup>1</sup>, A.A. Kazakov<sup>2</sup>

This paper is devoted to 3D embeddable graphs, which are obtained from full spatial graphs by removing several edges incident to one vertex. For all such graphs we introduce the analogue of Conway–Gordon function  $\omega_2$ . We prove that its value is zero for all spatial graphs obtained from full graphs with no less than eight vertices. There are examples of graphs with six vertices, where the value of this function is equal to unity.

*Keywords:* spatial graph; Hamiltonian cycle basis; link.

### References

1. Conway J.H., Gordon C.McA. Knots and links in spatial graphs. *Journal of Graph Theory*. 1983. Vol. 7. pp. 445–453.
2. Kazakov A.A., Korablev Ph.G. Triviality of the function  $\omega_2$  for spatial complete graphs. *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika, mekhanika, informatika*. 2013. Vol. 13, Issue 3. pp. 38–47. (in Russ.).
3. Korablev Ph.G., Kazakov A.A., Sergeeva A.I. Function  $\omega_2$  for spatial bipartite complete graphs. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta*. 2012. no. 26 (280). pp. 125–128. (in Russ.).
4. Sachs H. On spatial representations of finite graphs. *Finite and Infinite Sets, Vol I and II, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai*. 1984. Vol. 37. pp. 649–662.
5. Vesnin A.Yu., Litvinceva A.V. On linkness of hamiltonian cycles in spatial graphs. *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2010. Vol. 7. pp. 383–393. (in Russ.).

Received 4 March 2015

<sup>1</sup> Korablev Philipp Glebovich is Associate Professor, Department of Computer Topology and Algebra, Laboratory of Quantum Topology, Chelyabinsk State University; Head of Mathematician of Algorithmic Topology Department, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of Russian Academy of Sciences.

E-mail: korablev@csu.ru

<sup>2</sup> Kazakov Alexander Andreevich is Lecturer, Department of Computer Topology and Algebra, Chelyabinsk State University.

E-mail: Kazakov.Al.An@gmail.com