Математика

УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmph150401

ЗАДАЧА СТАРТОВОГО УПРАВЛЕНИЯ И ФИНАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Е.А. Богатырева[1]

Получены достаточные условия разрешимости задачи стартового управления и финального наблюдения для одного абстрактного квазилинейного уравнения соболевского типа в слабом обобщенном смысле. На основе абстрактных результатов доказана разрешимость задачи стартового управления и финального наблюдения для модели Баренблатта–Гильмана. Данная модель описывает неравновесную противоточную капиллярную пропитку, искомая функция соответствует эффективной насыщенности. Особенностью рассматриваемой модели является учет эффекта неравновесности, что согласуется с постановкой задачи стартового управления и финального наблюдения.

Ключевые слова: квазилинейное уравнение соболевского типа; задача стартового управления и финального наблюдения; слабое обобщенное решение; модель Баренблатта–Гильмана.

Введение

При исследовании процессов фильтрации в пористых средах [1] возникает задача Коши–Дирихле

$$x(s,0)=u(s), \quad s\in\Omega, \tag{1}$$

$$x(s,t)=0, \quad (s,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \tag{2}$$

для уравнения Баренблатта–Гильмана

$$x_t-\alpha\lambda(\Delta\Phi(x))_t=\alpha\Delta\Phi(x). \tag{3}$$

Здесь $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $T\in\mathbf{R}_+$, искомая функция $x(s,t)$ соответствует функции эффективной насыщенности, параметры α и λ – вещественны, положительны, характеризуют свойства среды и фаз, $u(s)$ – эффективная насыщенность в начальный момент времени. Функция $\Phi(x)=|x|^{p-2}x$, $p>2$ – монотонно возрастающая и гладкая.

В подходящих функциональных пространствах (1)–(3) редуцируется к задаче Коши

$$x(0)=u \tag{4}$$

для абстрактного квазилинейного уравнения соболевского типа

$$\frac{d}{dt}(L(x))+M(x)=0,\ L(x)=Ax+\lambda M(x),\ \lambda\in\mathbf{R}_+. \tag{5}$$

Мы рассматриваем уравнения (3) и (5) как квазилинейные уравнения соболевского типа. С помощью методов, разработанных для этого класса уравнений, в работе [2] были рассмотрены задачи (1)–(3) и (4), (5), доказаны существование и единственность решения указанных задач в слабом обобщенном смысле.

Нас интересует задача стартового управления и финального наблюдения

$$\frac{d}{dt}(L(x))+M(x)=0,\ x(0)=u, \tag{6}$$

$$J(x(T),u)\to\inf,\ u\in U_{ad},$$

[1] Богатырева Екатерина Александровна – аспирант, кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: bogatyrevaea@susu.ac.ru

где $J(x(T),u)$ – ограниченный снизу, полунепрерывный снизу, коэрцитивный функционал [3]; U_{ad} – некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений U.

Общие вопросы существования решений задач оптимального управления рассмотрены в [3], доказано существование и единственность решения задачи стартового управления и финального наблюдения для эволюционного уравнения параболического типа. Задачи оптимального управления для линейных и полулинейных уравнений соболевского типа первого и высокого порядков с условиями Коши или Шоуолтера–Сидорова рассматривались в [4–7]. В работе использован метод Галеркина, применение этого метода для уравнений с двойной нелинейностью рассматривалось в [8–9]. Задача стартового управления и финального наблюдения моделирует ситуацию, когда момент наблюдения результата отделен по времени от начального кратковременного управляющего воздействия. Рассмотрение такой задачи для модели Баренблатта–Гильмана физически обосновано, так как данная постановка хорошо согласуется с учетом эффекта неравновесности, который является особенностью модели.

Статья содержит две части. В первой части доказывается существование решения задачи (6). Во второй части проводится редукция задачи стартового управления и финального наблюдения для модели Баренблатта–Гильмана к задаче (6) в подходящих функциональных пространствах. На основе полученных абстрактных результатов делается вывод о разрешимости задачи стартового управления финального наблюдения для модели Баренблатта–Гильмана.

1. Задача стартового управления и финального наблюдения для абстракной модели

Пусть $H=(H;\langle\cdot,\cdot\rangle)$ – вещественное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным; (U,U^*) и (P,P^*) – дуальные (относительно двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$) пары рефлексивных банаховых пространств.

Построим пространство
$$\mathbf{X}=\{x: x\in L_\infty(0,T;U),\, \dot{x}\in L_2(0,T;H)\}.$$

Определение 1. *Слабым обобщенным решением* задачи Коши (4), (5) назовем функцию $x\in\mathbf{X}$, удовлетворяющую условию
$$\int_0^T \varphi(t)\left[\frac{d}{dt}\langle L(x),w\rangle+\langle M(x),w\rangle\right]dt=0,$$
$$x(0)=u, \forall w\in U, \forall\varphi\in L_2(0,T).$$

Замечание 1. Функции из пространства $\mathbf{X}$ после, быть может, изменения на множестве меры нуль из отрезка $[0,T]$ будут непрерывными отображениями $[0,T]\to U$, таким образом, задача Коши (4), (5) имеет смысл.

В дальнейшем рассмотрении будут использованы следующие условия:

Условия (A):

A1. Вложения $U\subset P\subset H\subset P^*\subset U^*$ плотны и непрерывны.

A2. Пространство U сепарабельно.

A3. Вложение $U\subseteq P$ компактно.

Условие (B):

B1. Оператор $A\in\mathbf{L}(U;U^*)$ симметричен, положительно определен.

Условия (C):

C1. Оператор $M\in C^{r+1}(U;U^*)$, $r\in\mathbf{N}$, s-монотонен, однороден порядка $k\in\overline{\mathbf{R}}_+$.

C2. Существует $F(s)\ge 0$ при п.в. $s\in[0,\infty)$ такая, что $F\in C[0,\infty)$ после, быть может, изменения на множестве меры нуль, и для п.в. $s\in[0,\infty)$, для любых $u=u(s), v=v(s)\in U$ выполняется
$$\|M(u)-M(v)\|_{P^*}\le F(s)\|u-v\|_P.$$

C3. Существуют $C^M\ge 0$ и $p\ge 2$ такие, что $\|M(u)\|_*\le C^M\|u\|^{p-1}\,\forall u\in U$ и $\langle M(u),u\rangle\ge 0$.

C4. Производная Фреше оператора M симметрична.

Справедлива следующая теорема [2].

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (A)–(C), тогда для любого* $u \in U$ *и для любого* $T \in \mathbf{R}_+$ *существует единственное слабое обобщенное решение задачи (4), (5), удовлетворяющее*

$$\|x(t)\|_U^p \le C_1(\|u\|_U^p + \|u\|_U^2), \text{ при п.в. } t \in (0,T),$$

и

$$\|\dot{x}\|^2_{L_2(0,T;H)} \le C_2 \|u\|_U^p .$$

Перейдем к рассмотрению задачи стартового управления и финального наблюдения (6). Введем

Определение 2. Пару $(\tilde{x},\tilde{u}) \in \mathbf{X} \times U_{ad}$ будем называть *решением задачи (6),* если $J(\tilde{x}(T),\tilde{u}) = \inf\limits_{(x,u)} J(x(T),u)$ и $(\tilde{x},\tilde{u})$ удовлетворяет задаче (4), (5) в смысле определения 1. Вектор $\tilde{u}$ будем называть *стартовым управлением в задаче (6).*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (A)–(C), тогда при любом* $T \in \mathbf{R}_+$ *существует решение* $(\tilde{x},\tilde{u}) \in \mathbf{X} \times U_{ad}$ *задачи (6).*

Доказательство. При сформулированных условиях в силу теоремы 1 для задачи (4), (5) при любом $u \in U_{ad}$ существует единственное слабое обобщенное решение. Поэтому можно считать, что

$$J(x(T),u) = J(u).$$

Так как множество значений функционала ограниченно снизу, то существует минимизирующая последовательность $\{u_m\} \in U_{ad}$, такая что

$$\lim_{m\to\infty} J(u_m) = C,$$

где C – точная нижняя грань множества значений функционала. Следовательно, последовательность $\{J(u_m)\}_{m=1}^{\infty}$ ограничена в $\mathbf{R}$, а значит, в силу коэрцитивности функционала $J(u)$, последовательность $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ ограничена в U.

Извлечем из $\{u_m\}$ (переходя, если потребуется, к подпоследовательности) слабо сходящуюся последовательность $u_m \to \tilde{u}$. В силу теоремы Мазура точка $\tilde{u} \in U_{ad}$.

Обозначим за $x_m = x(u_m)$. В силу условий теоремы 1 можно извлечь такую подпоследовательность, назовем ее снова $\{x_m\}$, что

$$x_m \to \tilde{x} \ \ast\text{-слабо в } L_\infty(0,T;U);$$
$$x_m(T) \to \tilde{x}(T) \ \ast\text{-слабо в } L_\infty(0,T;U);$$
$$\dot{\tilde{x}}_m \to \dot{\tilde{x}} \text{ слабо в } L_2(0,T;U).$$

В силу ограниченности линейного оператора A и ограниченности $\{x_m\}$ в $L_\infty(0,T;U)$, получим:

$$\langle Ax_m(t), x_m(t)\rangle \le \|Ax_m(t)\|_{U^*} \|x_m(t)\|_U \le C^A \|x_m(t)\|_U^2,$$

значит, $\{Ax_m\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;U^*)$.

В силу условия (C3) и ограниченности $\{x_m\}$ в $L_\infty(0,T;U)$, получим

$$\langle M(x_m(t)), x_m(t)\rangle \le \|M(x_m(t))\|_{U^*} \|x_m(t)\|_U \le C^M \|x_m(t)\|_U^p,$$

следовательно, $\{M(x_m)\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;U^*)$.

Следовательно, найдется такая подпоследовательность $\{x_m\}$, что

$$Ax_m \to A\tilde{x} \ \ast\text{-слабо в } L_\infty(0,T;U^*);$$
$$M(x_m) \to \mu \ \ast\text{-слабо в } L_\infty(0,T;U^*).$$

Покажем, что $\mu = M(\tilde{x})$. Так как вложение $U \subseteq P$ компактно, то найдется такая подпоследовательность $\{x_m\}$, что при почти всех $t \in (0,T)$ $x_m \to \tilde{x}$ сильно в P. Заметив, что оператор M удовлетворяет (C2), получим:

$$\left\|M(x_m)-M(\tilde{x})\right\|_* \le F(s)\left\|x_m-\tilde{x}\right\| \to 0 \text{ при } m\to+\infty ,$$

следовательно, $\mu = M(\tilde{x})$.

В силу сепарабельности пространства U выберем в нем счетную всюду плотную ортонормальную систему функций $\{w_j\}$. Тогда в силу основной леммы вариационного исчисления можно записать

$$\left\langle Ax_m(T), w_j\right\rangle + \lambda\left\langle M(x_m(T)), w_j\right\rangle + \int_0^T \lambda\left\langle M(x_m), w_j\right\rangle d\tau = \left\langle Ax_m(0), w_j\right\rangle + \lambda\left\langle M(x_m(0)), w_j\right\rangle.$$

Зафиксируем j и перейдем к пределу при $m\to+\infty$

$$\left\langle A\tilde{x}(T), w_j\right\rangle + \lambda\left\langle M(\tilde{x}(T)), w_j\right\rangle + \int_0^T \lambda\left\langle M(\tilde{x}), w_j\right\rangle d\tau = \left\langle A\tilde{u}, w_j\right\rangle + \lambda\left\langle M(\tilde{u}), w_j\right\rangle.$$

Тогда получим, что

$$\int_0^T \left(\frac{d}{dt}\left\langle L(\tilde{x}), w\right\rangle + \left\langle M(\tilde{x}), w\right\rangle\right)\varphi(\tau)d\tau = 0,$$

$$\tilde{x}(0)=\tilde{u}, \forall w\in U, \forall \varphi\in L_2(0,T).$$

Следовательно, $\tilde{x}=\tilde{x}(\tilde{u})$ и в силу полунепрерывности снизу функционала $\lim\limits_{m\to\infty}\inf\limits_{U_{ad}} J(u_m)\ge J(\tilde{u})$, значит, $\tilde{u}$ есть стартовое управление в задаче (6).

2. Модель Баренблатта–Гильмана

Рассмотрим задачу стартового управления и финального наблюдения для уравнения Баренблатта–Гильмана

$$\begin{gathered} x_t - \alpha\lambda(\Delta\Phi(x))_t = \alpha\Delta\Phi(x). \\ x(s,0)=u(s), \quad s\in\Omega, \\ x(s,t)=0, \quad (s,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \\ J(x,u)\to\inf,\ u\in U_{ad}, \end{gathered} \tag{7}$$

Положим $H = W_2^{-1}(\Omega)$ со скалярным произведением

$$\left\langle u,v\right\rangle = \int_\Omega u\left(-\Delta\right)^{-1} v dx, \quad u,v\in H,$$

где $\left(-\Delta\right)^{-1}$ – оператор Грина однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta u = f$ в области Ω. В качестве пространства P выберем пространство $L_p(\Omega)$. Построим пространство управлений $U=\left\{x : x\in W_q^1(\Omega); x(s,t)=0,\ s\in\Omega\right\}$. В качестве U^* и P^* можно взять пространства, сопряженные к U и P относительно двойственности в $W_2^{-1}(\Omega)$. Выберем $U_{ad}\subset U$ – непустое, замкнутое, выпуклое множество.

Функционал зададим формулой

$$J(x,u)=\frac{1}{2}\left\|x(s,T)-x_d(s)\right\|^q_{\overset{0}{W}{}_q^1(\Omega)} + \frac{1}{2}\left\|u(s)\right\|^q_{\overset{0}{W}{}_q^1(\Omega)} .$$

В силу теоремы вложения Соболева, если $1<q<n$ и $2<p<\dfrac{2q}{n-q}$, то условия (А1)–(А3) выполнены. Кроме того, (А1)–(А3) выполнены, в случае, если $n=q$ и $p\in\left(2,+\infty\right)$.

Построим оператор A:

$$\left\langle Au,v\right\rangle = \left\langle u,v\right\rangle = \int_\Omega u\left(-\Delta\right)^{-1} v dx, \quad u,v\in U.$$

Лемма 1 [2]. *Оператор* $A\in \mathbf{L}(U;U^*)$ *симметричен, положительно определен.*

Построим оператор M :

$$\langle M(u),v\rangle=\lambda\int_{\Omega}|u|^{p-2}uvdx,\quad u,v\in U.$$

Лемма 2 [2]. *Оператор* $M\in C^{r+1}(U;U^{*})$, $r\in\mathrm{N}$, s *-монотонен, однороден порядка* $k\in\overline{\mathbf{R}}_{+}$, *имеет симметричную производную Фреше и удовлетворяет условиям (C2) и (C3).*

Теорема 3 [2]. *Пусть* $1<q\le n$, $\alpha,\lambda\in R_{+}$, *если* $q<n$, *то* $2<p<\dfrac{2q}{n-q}$, *если* $q=n$, *то* $p\in(2,+\infty)$. *Тогда для любого* $u_0\in\overset{0}{W}{}_q^1(\Omega)$ *и для любого* $T\in\mathbf{R}_{+}$ *существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(3).*

В силу теоремы 2 и лемм 1 и 2 справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть* $1<q\le n$, $\alpha,\lambda\in\mathbf{R}_{+}$, *если* $q<n$, *то* $2<p<\dfrac{2q}{n-q}$, *если* $q=n$, *то* $p\in(2,+\infty)$. *Тогда при любом* $T\in\mathbf{R}_{+}$ *существует решение* $(\tilde{x},\tilde{u})\in\mathbf{X}\times U_{ad}$ *задачи (7).*

Литература

1. Баренблатт, Г.И. Математическая модель неравновесной противоточной капиллярной пропитки / Г.И. Баренблатт, А.А. Гильман // Инженерно-физический журнал. – 1987. – Т. 52, № 3. – С. 456–461.
2. Bogatyreva, E.A. On the Uniqueness of a Nonlocal Solution In The Barenblatt–Gilman Model / E.A. Bogatyreva, I.N. Semenova // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 4. – С. 113–119. DOI: 10.14529/mmp140409
3. Фурсиков, А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. / А.В. Фурсиков. – Новосибирск: Научная книга, 1999. – 350 с.
4. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2003. – 216 p.
5. Замышляева, А.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для уравнения Буссинеска–Лява / А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 5(264). – С. 13–24.
6. Келлер, А.В. Численное решение задачи оптимального управления вырожденной линейной системой уравнений с начальными условиями Шоуолтера–Сидорова / А.В. Келлер // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2008. – № 27(127). – С. 50–56.
7. Свиридюк, Г.А. Задача оптимального управления для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2005. – Т. 8, № 2. – С. 144–151.
8. Al’shin, A.B. Blow-up in Nonlinear Sobolev-Type Equations / A.B. Al’shin, M.O. Korpusov, A.G. Sveshnikov. – Berlin, N.-Y.:Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2011. – 648 p.
9. Свиридюк, Г.А. Одна задача для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска / Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Математика. – 1989. – № 2. – С. 55–61.

Поступила в редакцию 29 июля 2015 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2015, vol. 7, no. 4, pp. 5–10

DOI: 10.14529/mmph150401

THE START CONTROL AND FINAL OBSERVATION PROBLEM FOR A QUASI-LINEAR SOBOLEV TYPE EQUATION

***E.A. Bogatyreva*[1]**

Sufficient solvability conditions of the start control and final observation problem in a weak generalized meaning for one abstract quasilinear Sobolev type equation are obtained. Sobolev type equations constitute a large area of nonclassical equations of mathematical physics. Techniques used in this article originated in the theory of semilinear Sobolev type equations. Solvability of the start control and final observation problem for the Barenblatt–Gilman model describing the nonequilibrium countercurrent capillary impregnation was proved on the basis of abstract results. The unknown function corresponds to effective saturation. The main equation of this model is nonlinear and implicit with respect to the time derivative which makes it quite difficult to study. Formulation of this problem agrees with consideration of the effect of disequilibrium, which is the characteristic feature of the considered model.

Keywords: quasi-linear Sobolev type equations; start control and final observation problem; weak generalized solution; Barenblatt–Gilman model.

References

1. Barenblatt G.I., Gil'man A.A. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, 1987, Vol. 52, no. 3, pp. 456–461. (in Russ.).

2. Bogatyreva E.A., Semenova I.N. On the uniqueness of a nonlocal solution in the Barenblatt - Gilman model. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical modelling, programming*, 2014, Vol. 7, no 4, pp. 113–119. DOI: 10.14529/mmp140409

3. Fursikov A.V. *Optimalnoe upravlenie raspredelennyimi sistemami. Teoriya i prilozheniya* [Optimal control of distributed systems. Theory and Applications]. Novosibirsk: Nauchnaya kniga Publ., 1999. 350 p. (in Russ.).

4. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators*, Utrecht, Boston, Koln, Tokyo, VSP, 2003. 216 p. DOI: 10.1515/9783110915501

5. Zamyshlyaeva A.A., Tsyplenkova O.N. *Optimal'noe upravlenie resheniyami nachal'no-konechnoj zadachi dlya uravneniya Bussineska–Lyava* [The optimal control over solution of the initial-finish value problem for the Boussinsque–Love equation]. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical modelling, programming*, 2012, no. 5(264), pp. 13–24. (in Russ.).

6. Keller A.V. Numerical solution of the optimal control problem for degenerate linear system of equations with Showalter–Sidorov initial conditions. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2008, no. 27(127), pp. 50–56. (in Russ.).

7. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. An optimal control problem for the Hoff equation. *Journal of Applied and Industrial Mathematics,* 2007, Vol. 1, no. 2, pp. 247–253. DOI: 10.1134/S1990478907020147

8. Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. *Blow-up in nonlinear Sobolev-type equations.* Berlin, N.-Y.: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2011. 648 p. DOI: 10.1515/9783110255294

9. Sviridyuk G.A. *Izv. vuzov. Matematika,* 1989, no. 2, pp. 55–61. (in Russ.).

Received July 29, 2015

[1] Bogatyreva Ekaterina Aleksandrovna is Post-graduate Student, Department of Equation of Mathematical Physics, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.
E-mail: bogatyrevaea@susu.ac.ru