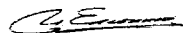


02.00.04 ЭЛК
Е598

На правах рукописи



Елюхина Инна Владимировна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
И ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ
ПРОЦЕССОВ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ
В ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ВИСКОЗИМЕТРИИ**

02.00.04 – физическая химия

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Челябинск – 2007

Работа выполнена в Южно-Уральском государственном университете.

Научный консультант – доктор химических наук,
член-корреспондент РАН Вяткин Г.П.

Официальные оппоненты:

доктор химических наук, профессор
Бухтояров О.И.,
доктор физико-математических наук, профессор
Прокудина Л.И.,
доктор технических наук, профессор
Холпанов Л.П.

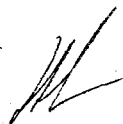
Ведущая организация – Уральский государственный
технический университет (г. Екатеринбург).

Защита состоится 11 апреля 2007 г., в 14 часов, на заседании
диссертационного совета Д 212.298.04 при Южно-Уральском государственном
университете по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, д. 76.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южно-Уральского
государственного университета.

Автореферат разослан “ ___ ” февраля 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н., профессор



Гельчинский Б.Р.

100А

Актуальность проблемы. Высокотемпературные расплавы

(металлические, оксидные, солевые) являются основными рабочими средами в разнообразных технологических процессах металлургии, энергетики и химической промышленности. Ввиду высоких температур и химической агрессивности жидкостей пригодными для изучения их вискозиметрических свойств, определяющих скорость массообменных процессов, возможность транспортировки, кинетику кристаллизации, теплопередающую способность и пр., оказываются лишь немногие методики. Большинство результатов по свойствам металлических расплавов получено методом крутильных колебаний, а оксидных и шлаковых систем – вибрационными методами. Анализ этих экспериментальных данных обнаруживает существенные противоречия, вопрос о причинах которых является одним из принципиальных и дискуссионных в физике жидкометаллического состояния. В связи с этим весьма своевременной представляется разработка методов проверки внутренней согласованности данных прямых измерений и их последующей обработки, позволяющих выявить методические источники аномалий или поставить вопрос о таковых физико-химического характера, например, о сверхчувствительности вязкости к примесям и структурным превращениям.

Метод крутильных колебаний широко используется с момента его обобщения Швидковским Е.Г. в середине прошлого века для ньютоновской жидкости и получил значительное усовершенствование в аппаратном отношении, в то время как теоретическая база в целом ограничивается представленными ранее возможностями. Причиной несогласованности в методическом плане могут служить условия, возникающие в экспериментах, но не учтенные в теории: нерегулярный режим колебаний, вторичные течения, тонкие пленки посторонних фаз на поверхности образца и пр., некоторые из которых, в частности последнее, исследованы в работах Вяткина Г.П. и др.

Противоречия могут быть обусловлены неверной идентификацией реологического типа расплавов. Несмотря на возросший в последнее время интерес к возможности их неньютоновского поведения, подобные исследования выполнялись лишь эпизодически, а области предельно малых скоростей сдвига с этих позиций не рассматривались вовсе. Для метода характерно изменение во времени режима деформирования среды, что делает возможным обнаружение как упругих свойств жидких сред, так и свойств текучих систем с переменным отношением между напряжением и скоростью сдвига. В процессе затухания колебаний можно реализовать малые полные деформации и их скорости и обнаружить, в частности, слабо пластичные свойства. Здесь вывод о реологической принадлежности среды основывается на измерениях параметров колебаний, которые могут быть выполнены с высокой точностью, недоступной для других методик. Поэтому условия, реализуемые в крутильном вискозиметре, позволяют сделать наблюдаемыми отдельные неньютоновские эффекты у жидкостей, обычно считающихся ньютоновскими.

100А

Возможности метода в исследовании неньютоновских свойств не реализованы, и исключением является изучение линейных вязкоупругих свойств модели Фойгта в режиме вынужденных колебаний в работе Клеймана Р.Н. (Kleiman R.N.). Аналогичные вопросы являются открытыми и для вибрационного метода. Известные решения для инициируемых колеблющейся пластиной течений некоторых классов неньютоновских сред, в основном вязкоупругих, касаются несопряженной задачи, когда закон движения зонда задан. Такая постановка используется и в опытных методиках.

При решении задач, связанных с косвенными измерениями, необходимо выполнение оценки неизвестных коэффициентов на основе изучения наблюдаемости и идентифицируемости системы. Методы параметрической идентификации, в которых используется информация, заключенная как в дифференциальных уравнениях процессов переноса, так и в опытных данных, позволяют надежно определять неизвестные свойства и их статистические характеристики по таковым для измеряемых величин. Основы методов разработаны во второй половине прошлого века, но ситуации, возникающие в реальных физико-химических системах, в частности, при проведении вискозиметрических экспериментов, требуют расширения круга теоретических и прикладных вопросов применительно к конкретным задачам оценивания параметров и состояний.

Дальнейший прогресс в вискозиметрии высокотемпературных и химически агрессивных жидкостей может быть обеспечен решением следующих проблем:

- 1) совершенствованием теоретических основ существующих методик с целью выявления и учета факторов, ответственных за противоречивость данных;
- 2) созданием математического аппарата, позволяющего решить фундаментальную задачу о реологической принадлежности этих труднодоступных для экспериментального изучения жидкостей и уточнить реологическое поведение сред, полагаемых ньютоновскими, в области малых скоростей сдвига.

Такое исследование, выполняемое на основе математического моделирования экспериментов, и является целью работы.

Научная новизна работы. Для метода крутильных колебаний развита и апробирована теория проверки согласованности вискозиметрических данных. С помощью построенных численных моделей эксперимента установлено влияние на движение вискозиметра переходных процессов при различных способах возбуждения колебаний и пространственных течений в нем, в т.ч. при развитии гидродинамической неустойчивости. Получены критерии, позволяющие экспериментально идентифицировать принадлежность жидкости к ньютоновскому типу. Обсуждены особенности теории, приводящие к неверной интерпретации данных в вибрационном методе.

Выявлены новые возможности и разработаны теоретические основы высокотемпературной вискозиметрии по измерению нелинейных свойств жидких сред. Построены математические модели экспериментов для исследования жидкостей с вязкой, пластичной и упругой составляющими в

реологическом уравнении состояния для внутренней и внешней сопряженных нелинейных гидродинамических задач о колебаниях цилиндра и пластины соответственно в режимах вынужденных и затухающих колебаний. Установлен характер поведения вязкопластичных, нелинейно вязких и пр. типов сред в таких нестационарных системах. Оценено влияние неньютоновских свойств на наблюдаемые в эксперименте параметры: период и декремент, амплитудно-фазовые характеристики, а также спектры кинематических и динамических параметров, и результаты интерпретированы в рамках известных решений для линейных жидкостей.

Разработаны методы параметрической идентификации для прямой и обратной задач вискозиметрии. Развита теория измерения неньютоновских свойств, в т.ч. основанная на точных решениях без использования численных моделей, в рамках которой идентифицировано нелинейное реологическое поведение образцов в опытах с жидкими металлами. Являются новыми и сами подходы к измерению нелинейных свойств, прежде всего слабо выраженных, когда вывод о реологическом типе жидкости выполняется из прецизионных измерений параметров колебаний, и к интерпретации данных по расплавам с учетом нелинейностей.

Практическая и теоретическая ценность. Предложенные методы одновременной оценки вязкости и плотности ньютоновской среды дают возможность судить как о корректности экспериментов в отношении непротиворечивости исходных данных, так и об адекватности применения теории к реализуемым в эксперименте условиям, позволяют исследовать среды со слабо изученными уравнениями состояния и устранить ошибки, вызванные различием температуры и давления при раздельных измерениях свойств.

Теоретическое обоснование методик вискозиметрии высокотемпературной вискозиметрии для многих реализуемых на практике случаев, в частности, когда есть основания считать жидкость неньютоновской, и их распространение на жидкости с иными реологическими типами позволяет: а) получить новую информацию о физико-химической природе металлических расплавов и шлаков и сделать правомочной постановку проблемы о микроскопических причинах их неньютоновского поведения; б) обнаружить новые классы сред со слабо выраженными неньютоновскими свойствами, а ввиду метрологической точности экспериментов и количественно определить их.

Результаты представляют интерес, прежде всего для физики конденсированного состояния и физико-химической гидродинамики, и могут быть использованы во всех отраслях, где применяются такие жидкости – в металлургической, химической, биологической, пищевой промышленности, в энергетике и медицине: при проведении исследований в теории наследственных сред и разработке микроскопических моделей жидкостей, интерпретирующих их реологическое поведение; при проектировании технологических процессов с участием текучих компонентов и разработке средств контроля их состояния.

Достоверность полученных результатов подтверждается их согласием с экспериментальными и теоретическими результатами других исследователей, соответствием численных и аналитических моделей. Обеспечивается корректной постановкой задачи, использованием фундаментальных законов сохранения и адекватным учетом существенных условий экспериментов при математическом моделировании процессов, выбором современных средств решения.

Апробация работы. Результаты работы апробированы на одиннадцатой российской конференции по теплофизическим свойствам веществ (Санкт-Петербург, 2005 г.), двадцать втором и двадцать третьем симпозиумах по реологии (Валдай, 2004 и 2006 г.), десятой и одиннадцатой российских конференциях «Строение и свойства металлических и шлаковых расплавов» (Екатеринбург, 2001 и 2004 г.), двенадцатой международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам ВМСПС-2003 (Владимир), международном научном семинаре «Актуальные проблемы реологии» (Алтай, 2003 г.), на 11–15 всероссийских конференциях «Математическое моделирование и краевые задачи» ММ-2001–ММ-2005 (Самара), международных и всероссийских конференциях молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям УМ-2002–УМ-2005 (Новосибирск, Красноярск, Кемерово), двадцать четвертой российской школе по проблемам науки и технологий (Миасс, 2004).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 48 работ (из которых 25 работ в изданиях, включенных в перечень ВАК), в т.ч. 1 монография. Все приведенные в диссертации результаты получены лично автором и являются новыми.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, основных выводов, списка литературы из 209 названий и трех приложений. Изложена на 219 страницах машинописного текста, содержит 3 таблицы, 69 рисунков.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность проблематики диссертации. Обсуждены открытые вопросы физики жидкометаллического состояния, важные как для фундаментальной науки, так и для практических приложений на производстве, и поставлены задачи математического моделирования вискозиметрических высокотемпературных систем физико-химической гидродинамики. Дана краткая характеристика разделов диссертации.

В первой главе проанализировано развитие теории метода крутильных колебаний. Выполнено математическое моделирование экспериментов по исследованию в общем случае неньютоновских жидкостей исходя из фундаментальных законов сохранения. Уточнена существующая методика измерения, основными положениями которой являются: 1) скольжение между средой и внутренней поверхностью тигля отсутствует; 2) амплитуды колебаний

малы, что в свою очередь позволяет допустить: 2.1) течение жидкости осесимметричное, 2.2) единственной существенной компонентой вектора скорости является азимутальная ϑ_φ ; 3) рассматривается регулярный режим затухающих колебаний; 4) жидкость является ньютоновской.

Пусть цилиндрический сосуд с внутренним радиусом R подвешен вдоль своей оси на упругой нити и совершает вокруг нее крутильные колебания с периодом τ_0 и декрементом затухания колебаний δ_0 . При заполнении тигля жидкостью массой M с плотностью ρ , во-первых, вследствие увлечения ее движущимися ускоренно стенками цилиндра возрастает эффективный момент инерции подвесной системы и увеличивается период колебаний τ : $\tau > \tau_0$, а во-вторых, растет скорость затухания колебаний: $\delta > \delta_0$, вследствие дополнительной диссипации механической энергии системы, обусловленной вязким трением между подвергаемыми сдвигу слоями жидкости. Задача заключается: прямая – в определении свойств жидкости, а обратная – в предсказании закона колебаний $\alpha = \alpha(t)$, т.е. зависимости от времени t углового смещения α цилиндра из положения равновесия, и является сопряженной: движение сосуда непосредственно связано с возбуждаемым им движением жидкости.

Введем безразмерные переменные:

$$A = MR^2/(2K), \quad \xi_0 = R/d; \\ q_0 = \frac{2\pi}{\tau_0}, \quad U = \frac{\vartheta_\varphi}{dq_0}, \quad T = q_0 t, \quad d = \sqrt{\frac{v}{q_0}}, \quad \xi = \frac{r}{d}, \quad \eta = \frac{z}{d}, \quad \eta_0 = \frac{2H}{d}, \quad (1)$$

где A – отношение моментов инерции жидкости в вискозиметре и пустой подвесной системы K ; d – естественный масштаб длины, толщина пограничного слоя; H – полувысота столба жидкости; q_0 – циклическая частота колебаний пустого тигля; r и z – радиальная и осевая координаты ($r=0$ на оси цилиндра; $z=0$ на нижнем и $z=2H$ на верхнем торцах цилиндра); v – кинематическая вязкость жидкости.

Построенная в рамках приближений 1 и 2 математическая модель эксперимента записывается следующим образом:

1) уравнение движения цилиндра

$$\frac{d^2 \alpha}{dT^2} + \frac{\delta_0}{\pi} \frac{d\alpha}{dT} + \left(1 + \frac{\delta_0^2}{4\pi^2}\right) \alpha = P; \quad (2)$$

2) уравнение движения жидкости

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial \sigma_{\xi\varphi}}{\partial \xi} + \frac{2\sigma_{\xi\varphi}}{\xi} + \frac{\partial \sigma_{\eta\varphi}}{\partial \eta}; \quad (3)$$

3) начально-краевые условия для (2), (3):

$$T=0: \alpha_0 \sim \delta^2, \quad \frac{d\alpha}{dT} = U=0; \quad \eta=0, \quad \eta=\eta_0: U = \frac{d\alpha}{dT} \xi; \quad \xi=0: U=0; \quad \xi=\xi_0: U = \frac{d\alpha}{dT} \xi_0; \quad (4)$$

4) реологические уравнения состояния, например, для реостабильных жидкостей:
 4.1) для ньютоновской жидкости

$$\sigma_{\xi\varphi}(\eta\varphi) = D_{\xi\varphi}(\eta\varphi); \quad (5)$$

4.2) для нелинейно вязкой жидкости по модели Оствальда-Веяля (Ostwald-de Waale)

$$\sigma_{\xi\varphi}(\eta\varphi) = bD^{m-1}D_{\xi\varphi}(\eta\varphi); \quad (6)$$

4.3) для линейно вязкопластичной жидкости по модели Бингама (Bingham)

$$\sigma_{\xi\varphi}(\eta\varphi) = \begin{cases} (1 + \text{Bm}/D)D_{\xi\varphi}(\eta\varphi) & \text{при } D \geq D_0, \\ k_{\sigma}D_{\xi\varphi}(\eta\varphi) & \text{при } D < D_0; \end{cases} \quad (7)$$

4.4) для нелинейно вязкопластичной жидкости по модели Балкли-Гершеля (Bulkley-Hershel)

$$\sigma_{\xi\varphi}(\eta\varphi) = \begin{cases} (bD^{m-1} + \text{Bm}/D)D_{\xi\varphi}(\eta\varphi) & \text{при } D \geq D_0, \\ k_{\sigma}D_{\xi\varphi}(\eta\varphi) & \text{при } D < D_0, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$D_{\xi\varphi} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{U}{\xi}, \quad D_{\eta\varphi} = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad D = \sqrt{D_{\xi\varphi}^2 + D_{\eta\varphi}^2}; \quad \text{Bm} = \frac{\sigma_0}{\nu \rho \alpha_0}, \quad b = \frac{q_0^{m-1} K}{\nu \rho}, \quad D_0 = \frac{\text{Bm}}{k_{\sigma} - 1};$$

$$P = -\frac{4A}{\xi_0^2 \eta_0} \int_0^{\eta_0} \sigma_{\xi\varphi} \Big|_{\xi=\xi_0} d\eta + \frac{4A}{\xi_0^4 \eta_0} \left[\int_0^{\xi_0} \sigma_{\eta\varphi} \Big|_{\eta=0} \xi^2 d\xi - \int_0^{\xi_0} \sigma_{\eta\varphi} \Big|_{\eta=\eta_0} \xi^2 d\xi \right]; \quad (9)$$

Bm – число Бингама; D^2 – безразмерный второй инвариант тензора скоростей деформации \mathbf{D} ; D_0 – значение D , соответствующее переходу среды между нетекучим состоянием и вязкопластическим течением; $D_{\xi\varphi}(\eta\varphi)$ – $\xi\varphi(\eta\varphi)$ -я компонента тензора \mathbf{D} ; K и m – постоянная и показатель степенного реологического закона соответственно; k_{σ} – модельный коэффициент; P – момент сил трения, приложенный к цилиндру со стороны среды; α_0 – начальное смещение тигля; $\sigma_{\xi\varphi}(\eta\varphi)$ – $\xi\varphi(\eta\varphi)$ -я компонента тензора напряжений σ ; σ_0 – предел текучести; в (4) принято, что среда смачивает оба торца тигля. В (7), (8) использована модель bi-viscosity, обеспечивающая при решении этой внутренней гидродинамической задачи хорошее согласие с идеальной бингамовской жидкостью: при $k_{\sigma} \sim 10^3 \dots 10^4$ расхождение в рассчитанных значениях параметров колебаний составляет менее 0.1%. Некоторые частные модели будут приведены отдельно.

В приближении длинного цилиндра уравнения (3), (9) имеют вид:

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial \sigma_{\xi\varphi}}{\partial \xi} + \frac{2\sigma_{\xi\varphi}}{\xi} \quad \text{и} \quad P = -\frac{4}{\xi_0^2} A \sigma_{\xi\varphi} \Big|_{\xi=\xi_0}, \quad (10)$$

в (4) отсутствуют условия для $\eta=0$ и $\eta=\eta_0$, в (5)–(8) – $\eta\phi$ -я компонента тензоров \mathbf{D} и $\boldsymbol{\sigma}$, а $D = |D_{\xi\phi}|$. В этом случае для решения системы дифференциальных уравнений использован метод прямых. Производные по пространственной координате аппроксимировались разностными отношениями с пятью узловыми точками, обеспечивающими точность порядка четвертой степени шага. Система обыкновенных дифференциальных уравнений интегрировалась, в частности, методом Рунге–Кутты четвертого порядка с контролем точности и автоматическим выбором шага по времени, методом Адамса пятого порядка точности в форме Нордсика и пр. Для интегрирования жестких систем, возникающих при определенных условиях эксперимента, использован метод Гира шестого порядка точности. Большинство задач работы, включая таковые и для вибрационного вискозиметра, выполнены также. Численное решение (2)–(4), (9) и (5), (6), (7) или (8) проводилось методом переменных направлений по схеме Бараката (Barakat) и Кларка (Clark), значение кажущейся вязкости принималось с предыдущего временного слоя.

Цилиндр, заполненный линейными, вязкими или вязкоупругими, средами, после завершения переходного процесса совершает регулярные изосинхронные колебания, характеризующиеся неизменными в процессе их затухания параметрами τ и δ . Если реологическое уравнение включает, например, пластические или нелинейно вязкие составляющие, то возможно нарушение подобного асимптотического поведения. Параметры колебаний для неизосинхронных случаев будем определять для каждого полупериода:

$$\tau = 2T_r, \delta = 2 \ln |\alpha_1 / \alpha_2|, \lambda = \tau / \tau_0, \quad (11)$$

где T_r – разница между двумя соседними моментами времени, когда α обращается в нуль; α_1, α_2 – соседние экстремальные значения α ($|\alpha_1| > |\alpha_2|$).

При обсуждении вопросов, связанных с традиционной методикой, использовано вискозиметрическое уравнение, полученное при решении системы (2)–(5), (9) Швидковским Е.Г., которое можно представить как

$$\bar{F} = \left[p \left(1 + \frac{p_0^2 + q_0^2}{p^2 + q^2} \right) - 2p_0 \right] K + i \left[q \left(1 - \frac{p_0^2 + q_0^2}{p^2 + q^2} \right) \right] K - (L_1 + L_2) = 0; \quad (12)$$

$$L_1 = -2\nu M \beta \frac{J_2(\beta)}{J_1(\beta)}, \quad L_2 = 4 \frac{M}{H} \frac{k^2}{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{th}(\theta_n H)}{\mu_n^2 \theta_n^3}, \quad (13)$$

где

$p = \delta / \tau$, $q = 2\pi / \tau$, $p_0 = \delta_0 / \tau_0$, $\beta = R\sqrt{k/\nu}$, $k = p + iq$, $\theta_n^2 = \mu_n^2 - k/\nu$; $i = \sqrt{-1}$; J_1, J_2 – функции Бесселя первого рода первого и второго порядков; L_1, L_2 – функции трения, учитывающие трение на боковой поверхности цилиндра и его торцах соответственно; p – коэффициент затухания колебаний; q – циклическая частота; μ_n – корни уравнения $J_1(\mu_n R) = 0$.

Вспомним характер поведения параметров колебаний в зависимости от ξ_0 (1), что представляет интерес при интерпретации результатов и для ньютоновских сред. Период λ уменьшается с ростом ξ_0 в основном на интервале $\xi_0 \in (2 \dots 12)$, а поведение δ зависит от ξ_0 : при $\xi_0 > \xi_{0\delta}$ с ростом ξ_0 декремент уменьшается, а при $\xi_0 < \xi_{0\delta}$ растет. Для длинного цилиндра $\xi_{0\delta} \sim 4,3$, а с уменьшением высоты этот пик смещается в сторону больших ξ_0 . При $\xi_0 \sim \xi_{0\delta}$ чувствительность ν к δ , а, следовательно, и ошибка в ν от ошибок измерения δ , очень высока, также как и к ошибкам в периоде при ξ_0 , близких к нулю, и высоких ξ_0 . С ростом A кривые $\delta = \delta(\xi_0)$ и $\lambda = \lambda(\xi_0)$ менее пологие, т.е. чувствительность к ошибкам меньше. Слева от $\xi_{0\delta}$ сильновязкое приближение, при $\xi_0 > 10$ – слабовязкое, а интервал между ними отвечает промежуточной вязкости.

Найдены области рабочих параметров, обеспечивающие с позиций чувствительности надежную оценку свойств и отвечающие регулярному режиму колебаний. Получены значения A и ξ_0 , выше которых переходные процессы продолжительнее основной гармонике; определены вносимые ими в τ и δ ошибки при различных способах возбуждения колебаний, в частности (4) и $d\dot{\alpha}/dT \sim 0,1$, $\alpha_0 = 0$, и выполнены рекомендации по обработке экспериментальных данных. Расчеты проводились как в рамках численной модели (2)–(5), так и на основе аналитических выражений, полученных операторным методом, в т.ч. использованы результаты Ньюэлла Г.Ф. (Newell G.F.) и др.

Разработаны методы проверки внутренней корректности данных. Заключение о получении надежной оценки вязкости здесь выводится из сравнения известного из независимых источников значений плотности и определенного одновременно с ней. Развита теория вне ограничений работы Ньюовдта Дж.С. (Nieuwoudt J.C.) и др., затрудняющих реализацию работоспособной методики проверки на практике, в которой: а) проведен учет ошибок прямых измерений только τ и δ ; б) не учтены взаимные ошибки одновременной оценки ν и ρ ; в) принята высокая точность измерения τ и δ , которую не всегда можно реализовать на практике; г) рекомендуемые параметры установки не относятся к обычно используемым для повышения качества эксперимента и пр.

В качестве рабочего уравнения, связывающего свойства ньютоновской среды с наблюдаемыми в эксперименте параметрами колебаний, принято (12), а также использованы безразмерные комплексы A , ξ_0 , $\chi = 2H/R$. Далее размерные величины даны в СГС, под чувствительностью понимается $\psi_{y,x} = |(x/y) \cdot \partial y / \partial x|$, а под ошибками Δ_y параметров y – их относительные

величины; значение $\delta_0 \sim 0$. Неизвестные коэффициенты ν и ρ определены из условия минимума функции качества

$$f(\nu, \rho) = \sqrt{c_{Re} \cdot Re^2(F) + c_{Im} \cdot Im^2(F)}, \quad (14)$$

где c_{Re} , c_{Im} – весовые коэффициенты; Re , Im – действительная и мнимая части от вискозиметрической функции F (12).

Выявлены причины, затрудняющие решение задачи, а именно: а) овражистый характер функции (14); б) высокая чувствительность определяемых через $Im(F)$ свойств к изменению τ . Расчеты показали криволинейный тип оврага со слабым изменением $f(\nu, \rho)$ вдоль его оси, тангенс угла между касательной к которой и осью ρ близок по значению к $\psi_{\nu, \rho}$. Заметим, что

$$\psi_{\rho, x} \sim \psi_{\nu, x} \psi_{\rho, \nu}. \quad (15)$$

В случае, если число смачиваемых жидкостью торцов $a=1$, значение $\psi_{\rho, \nu}$ выше приблизительно в 2 раза (по сравнению с $a=2$) и несколько выше $\psi_{\nu, x}$, где x – измеряемые величины (K , R и пр.). На рис. 1а показан поворот оси оврага в зависимости от отношения вкладов в момент трения от торцов и боковой поверхности при базовом варианте задачи (обозначим его как $(*)$): $R=1$, $K=50$, $\tau_0=5$, $M_1=3$, $\nu=0,01$, $\rho=1$, $a=2$ ($A=0,03$, $\xi_0=11,21$, $\chi=0,956$) – кривая 1; кривая 2 – $a=1$, $M_1=3$; 3 – $a=2$, $M_2=30$ ($A=0,3$, $\chi=9,56$). Из анализа чувствительности, проведенного в предположении независимой оценки вязкости и плотности, установлено, что при $c_{Re}=1$, $c_{Im}=0$ функции $\psi_{\nu, x} \sim 1...5$. При расчете по мнимой части (14) они отличаются несущественно от этих значений, кроме чувствительности $\psi_{\nu, \tau}$, которая может быть в тысячи раз выше. Учитывая это обстоятельство и зависимость (15), получаем (при близком к горизонтальному положении оврага на рис. 1а) ошибку в оценке плотности $\Delta_\rho \sim 10^2...10^3\%$ при $\Delta_\tau \sim 0,1\%$.

При одновременной оценке ситуация еще более усугубляется, и к тому же в опытных данных присутствуют ошибки и в параметрах установки, некоторые из которых могут составлять $\sim 1\%$ (в K или R), что приводит к $\Delta_\rho \sim 10^2\%$. При наличии ошибок в данных происходит заметный сдвиг оси оврага и минимума $f(\nu, \rho)$, который обычно становится менее выраженным (рис. 16). Здесь овраги 1а и 2а соответствуют 0,99R, 16 и 26 – 1,01R, а остальные параметры – $(*)$. Точки пересечения оврагов, отвечающих одинаковым радиусам (точки 1 на рис. 16), имеют на плоскости $(\rho, \nu \cdot 10^2)$ координаты: (0,98; 0,97), (1; 1), (1,04; 1,02), начиная с нижней. Для $\Delta_R \sim 1\%$ при одновременном определении свойств $\Delta_\rho \sim 32\%$, $\Delta_\nu \sim 15\%$ при $M=M_1$ (при M_2 : $\Delta_\rho \sim 52\%$, $\Delta_\nu \sim 8\%$) – этим значениям отвечают минимумы $f(\nu, \rho)$ (точки 2); при

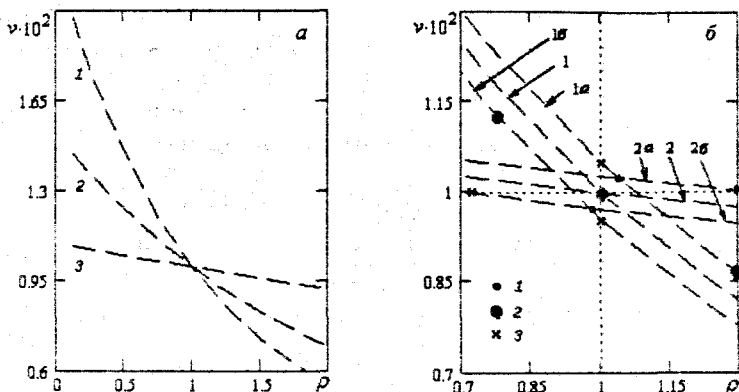


Рис. 1. Зависимость положения оси оврага от условий эксперимента

независимом оценивании $\Delta_\rho \sim 7\%$, $\Delta_v \sim 5\%$ при $M = M_1$ (при M_2 : $\Delta_\rho \sim 30\%$, $\Delta_v \sim 2,5\%$) – точки пересечения осей с прямыми $v = \text{const}$, $\rho = \text{const}$ (точки 3). На рис. 1б точки 1 лежат ближе к истинному значению, чем минимум на оси, как и в большинстве случаев.

При определении только вязкости среды требуется одно уравнение ($\text{Re}(F)=0$ или $\text{Im}(F)=0$ (14)), а при оценке еще и ρ его следует дополнить вторым соотношением. Обсудим три основных варианта оценки v и ρ :

1) предлагаемый метод, когда идентификация выполняется по $\text{Re}(F)$, а при планировании оптимального эксперимента на множестве всех допустимых выборок измерений определяются точки, минимальное число которых (обычно две) обеспечивает надежное решение. Точки отвечают различным массам образца и находятся из анализа в терминах Якобиана:

$$c_\delta \begin{vmatrix} \frac{\partial \delta^{(1)}}{\partial \rho} & \frac{\partial \delta^{(1)}}{\partial v} \\ \frac{\partial \delta^{(2)}}{\partial \rho} & \frac{\partial \delta^{(2)}}{\partial v} \end{vmatrix} + c_\tau \begin{vmatrix} \frac{\partial \tau^{(1)}}{\partial \rho} & \frac{\partial \tau^{(1)}}{\partial v} \\ \frac{\partial \tau^{(2)}}{\partial \rho} & \frac{\partial \tau^{(2)}}{\partial v} \end{vmatrix} \rightarrow \text{max}, \quad (16)$$

где $^{(1)}, ^{(2)}$ – номера измерений; c_δ и c_τ – весовые коэффициенты, зависящие от точности измерения τ и δ и чувствительности v и ρ к ним (элементы матриц также могут включать коэффициенты в зависимости от того, какой из параметров должен быть оценен наиболее точно, или во избежание преобладания какой-либо из точек, т.к. при изменении M меняется наклон откосов оврага). При выборе условий согласно (16) учитывается, что:

а) оси оврагов должны значительно расходиться (минимум функции качества тогда более выражен); б) чувствительность свойств к ошибкам в параметрах колебаний растет при уменьшении A (т.е. при уменьшении высоты и прочих

равных условиях); в) величина $\psi_{v,\rho}$ уменьшается с ростом χ (влияние торцов ослабевает). В начальном приближении можно принять $\chi_{\max} \sim 10\chi_{\min}$, $\chi_{\min} \sim 1$.

2) Метод, в котором используется одна экспериментальная точка и оценка проводится по $\text{Re}(F)$ (частный случай варианта 1 при $\chi_{\max} = \chi_{\min}$).

3) Традиционный метод оценивания (по одной точке по $\text{Re}(F)$ и $\text{Im}(F)$).

При расчете по варианту 1 при $\Delta_\tau \sim 10^{-5}$ и $\Delta_\delta \sim 10^{-3}$ и ξ_0 не из окрестности пика функции $\delta = \delta(\xi_0)$ ошибка $\Delta_\rho < 5\%$ (при $\Delta_\delta \sim 10^{-4}$ - $\Delta_\rho < 1\%$), что позволяет проверить согласованность вискозиметрических данных, а в варианте 2 ошибка $\Delta_\rho \sim 1...10^3\%$. В зависимости от условий эксперимента и ошибок в наблюдаемых параметрах лучшим может оказаться вариант расчета по действительной части уравнения с использованием одной или двух точек и для проверки согласованности следует выбрать именно его.

Выполнены практические приложения разработанных методов на различных примерах. Так, рассмотрим обработку опытных данных для воды, представленных проф. Бескачко В.П. (лаборатория физики расплавов ЮУрГУ). Условия опыта: $\Delta_R \sim 0,005$, $\Delta_K \sim 0,02$, $\Delta_M \sim 0,001$, $\Delta_\tau \sim 0,0005$; $\Delta_\delta \sim 0,02$; $R \sim 1,525$, $\chi_{\max} \sim 3,2$ ($\rho_0 \sim 1$). Обозначим номера расчетных точек как, например, 23 - соответствующая второму сверху значению K и массе M_3 (табл. 1). При одновременном определении v и ρ традиционным методом в расчетах 22, 32, 41, 42, 51, 52 значения $\rho \sim 0$, в 11, 13, 21, 43 - $\rho > 2$, а в 12 и 53 - $\Delta_\rho < 10\%$. В варианте 2 величина $\rho \sim 0,88 \pm 0,1$. При расчете по варианту 1 построчно с использованием крайних значений масс M_1 и M_3 в среднем $\Delta_\rho \sim 20\%$, а для второй строки даже при выборе оптимальных высот в рамках (16) $\rho \sim 0$.

В терминах теории чувствительности определены максимальные ошибки, которые могут возникать в вариантах 1-3. При использовании только действительных частей в (14) для указанного диапазона χ и K значения $\Delta_\rho \sim 20 \pm 5\%$, а при $\Delta_\delta < 0,01$, $\Delta_K < 0,01$, $\Delta_R < 0,001$ может оказаться $\Delta_\rho < 5\%$. Заметим, что полученные оценки ρ укладываются в этот интервал. В варианте 1 добавляются дополнительно ошибки в τ, δ, M для второй точки. Ошибка повышается также и из-за роста $\psi_{\rho,\delta}$ (ошибка от Δ_δ в плотности $\Delta_\rho \sim 30\%$; в варианте 2 - $\Delta_\rho \sim 7\%$), т.к. определение свойств среды по $\text{Re}(F)$ учитывает, прежде всего, значения δ и Δ_δ . В этом методе желательно точнее измерять декремент: при $\Delta_\delta < 0,001$ и прочих равных условиях можно надежно получить $\Delta_\rho < 5\%$. В примере ситуация иная, чем на рис. 16: точки пересечения осей оврагов находятся дальше от истинного значения, чем минимум $\text{Re}(F)$. Здесь вариант 3 совершенно не применим к одновременной оценке свойств:

Таблица 1

K	M = 0			M ₁ = 15,115 (x = 1,357)		
	τ ₀	δ ₀	ξ ₀	τ	δ	A
118	7,1315	0,0216	14,3	7,2628	0,1015	0,149
146	7,9217	0,0208	13,6	8,0453	0,0861	0,120
196	9,1579	0,0138	12,6	9,2942	0,0721	0,089
236	9,9976	0,0126	12,1	10,078	0,0639	0,074
274	10,774	0,0137	11,6	10,853	0,0578	0,064
K	M ₂ = 20,197 (x = 1,813)			M ₃ = 25,259 (x = 2,267)		
	τ	δ	A	τ	δ	A
118	7,2925	0,1327	0,199	7,3161	0,1493	0,249
146	8,0531	0,1109	0,161	8,0882	0,1299	0,201
196	9,2332	0,0904	0,12	9,2715	0,1060	0,150
236	10,090	0,0792	0,099	10,222	0,0967	0,124
274	10,854	0,0726	0,086	10,915	0,0838	0,107

помимо высоких значений Δ_p от ошибок в K и R (~15%) ошибки Δ_τ ведут или к $\rho \sim 0$, или к $\Delta_p > 500\%$; при оценке только v : $\Delta_v \sim 5\%$. Итак, ошибки Δ_x оказали такое влияние, что даже традиционный вариант оказался лучше предлагаемого.

В рамках приближений 1 и 2.1 построена модель, описывающая движение ньютоновской среды в тигле с учетом осевой \mathcal{G}_η и радиальной \mathcal{G}_ξ компонент скорости, которая в естественных переменных скорость-давление имеет вид:

$$\frac{d^2\alpha}{dT^2} + \alpha = -\frac{4A}{\xi_0^2 \eta_0} \int_0^{\eta_0} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{U}{\xi} \right)_{\xi_0} d\eta + \frac{4A}{\xi_0^4 \eta_0} \left[\int_0^{\xi_0} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_0 \xi^2 d\xi - \int_0^{\xi_0} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_{\eta_0} \xi^2 d\xi \right]; \quad (17)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T} + V \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + W \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + S, \quad (18)$$

где коэффициенты обобщенного уравнения (18)

$$\Phi = [V, U, W]^T, \quad S = [-(\partial P / \partial \xi) - V / \xi^2 + U^2 / \xi, -U / \xi^2 - VU / \xi, -(\partial P / \partial \eta) - G]^T;$$

$$\frac{V}{\xi} + \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial \eta} = 0; \quad (19)$$

$$T = 0: \alpha_0 \sim 6^\circ, \quad d\alpha/dT = 0, \quad V = U = W = 0; \quad \eta = 0, \quad \eta = \eta_0: \quad V = W = 0, \quad U = d\alpha/dT \xi;$$

$$\xi = 0: \quad V = U = dW/d\xi = 0; \quad \xi = \xi_0: \quad V = W = 0, \quad U = d\alpha/dT \xi_0, \quad (20)$$

где

$$V, U, W = \mathcal{G}_\xi, \mathcal{G}_\eta, \mathcal{G}_\eta / (dq_0), \quad P = p / (\rho d^2 q_0^2), \quad G = g / dq_0^2;$$

g – ускорение свободного падения; p – давление; в (17) принято, что $\delta_0 = 0$. Дискретизация уравнений проводилась методом контрольных объемов. согласование поля давления с полем скорости – с помощью SIMPLE-алгоритма. а представление конвективных членов – по QUIC-схеме.

Обсуждены условия эксперимента, способствующие усилению влияния вторичных течений на движение тигля. Установлено, что при малых колебаниях вне переходных процессов составляющие \mathcal{S}_η и \mathcal{S}_z не вносят в закон колебаний ошибку, большую точности измерений, в диапазоне значений η_0 (ξ_0 и A), обычно реализуемых на практике. Для использования традиционных расчетных выражений в экспериментах по проверке согласованности целесообразно ограничиться областью слабвязкого приближения и $\eta_0 > \xi_0$.

В линейном приближении исследована гидродинамическая устойчивость осесимметричного течения ньютоновской жидкости в цилиндре, совершающем гармонические крутильные колебания малой амплитуды, представляющая интерес и с позиций формирования вторичных вихревых структур, анализа влияния де- и стабилизирующих факторов. Использована линеаризованная система уравнений Навье–Стокса и неразрывности, которая после введения возмущенного распределения скоростей в виде суммы основного течения V_φ^0 и бесконечно малых нестационарных возмущений V_φ , V_r и V_z , учета уравнений невозмущенного движения и пренебрежения малыми второго порядка имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} &= 2 \frac{V_\varphi^0 V_\varphi}{r} - \frac{V_\varphi^0}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + v \left[\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} &= - \frac{V_\varphi^0}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} + v \left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \varphi^2} \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \\ \frac{\partial V_\varphi}{\partial t} &= \frac{V_\varphi^0}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} - V_r \left[\frac{\partial V_\varphi^0}{\partial r} + \frac{V_\varphi^0}{r} \right] + v \left[\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right] - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial r V_r}{\partial r} + \frac{\partial r V_z}{\partial z} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Решения для возмущений разыскивались в виде гармонического колебания, собственные значения (осевое волновое число, критическое число Рейнольдса, комплексная фазовая скорость волны) определялись с использованием метода дифференциальной прогонки. Изучена зависимость критических параметров от опытных условий, построены кривые нейтральной устойчивости для различных азимутальных спектральных мод. Показано, что в условиях реальных экспериментов неустойчивые структуры не возникают как в режиме затухающих колебаний, так и вынужденных, характеризуемых высокими значениями ξ_0 , а их развитие возможно при больших α .

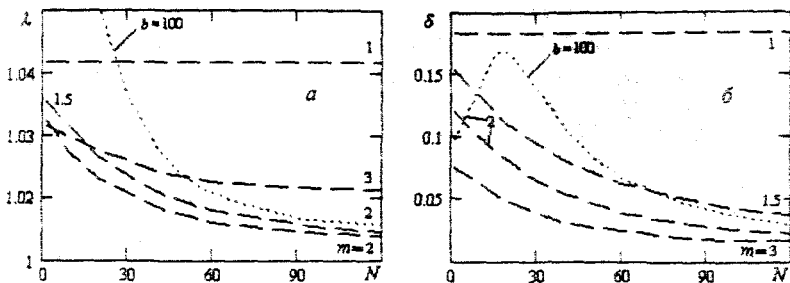


Рис. 2. Зависимость параметров колебаний λ (а) и δ (б) от их номера для нелинейно вязких сред ($A = 0,2$, $\xi_0 = 6$, $b = 1$)

Во второй главе путем численного моделирования выявлены наблюдаемые в эксперименте эффекты, связанные с неньютоновским типом образца, и развиты возможности метода крутильных колебаний по идентификации постоянной и показателя степенного реологического закона, предела текучести, времени релаксации и пр. свойств жидкостей. Отмеченные ниже для сравнения решения для ньютоновской среды получены с помощью уравнения (12) в терминах (1) и отвечают величинам, определенным по численным моделям (2)–(10) при $b = m = 1$ и $\text{Вп} = 0$ для регулярного режима колебаний. Результаты для наглядности приведены в основном для случая длинного цилиндра.

Установлено, что при заполнении вискозиметра нелинейными средами свойство изосинхронности колебаний нарушается и их параметры зависят от номера колебания N . Закономерности в поведении δ и λ (11) от ξ_0 для ньютоновских сред подтверждаются и для случая нелинейно вязких сред (рис. 2), если в качестве ξ_0 рассматривать эффективное значение $\xi_{0\text{эф}}$, которое для такой жидкости $\xi_{0\text{нв}} = \xi_0 / \sqrt{b\tilde{D}^{m-1}}$, где \tilde{D} – усредненная по полупериоду величина D при $\xi = \xi_0$. Значение $\xi_{0\text{нв},\delta} \sim 4,3$, и, например, соответствует экстремуму $\delta = \delta(N)$ при $b = 100$ на рис. 2б.

В условиях вискозиметра $D < 1$ и в процессе колебаний амплитудное значение D уменьшается, поэтому для дилатантных сред ($m > 1$) кажущаяся вязкость падает и $\xi_{0\text{нв}}$ растет, а для псевдопластичных ($m < 1$) – наоборот, и соответствующим образом изменяются с течением времени λ и δ . Так, для дилатантной среды если $\xi_{0\text{нв}}$ в начале колебаний отвечает слабвязкому приближению, то параметры колебаний уменьшаются с течением времени, а если сильвязкому – $\delta = \delta(N)$ проходит через максимум. При $\xi_{0\text{нв}}$, близких к $\xi_{0\text{нв},\delta}$, тогда реализуются высокие значения δ и колебания обычно затухают быстрее, чем достигается $\xi_{0\text{нв},\delta}$. Для ньютоновских сред при высоких ξ_0 с ростом ξ_0 период уменьшается слабее, чем декремент, и для нелинейных сред

выход на асимптотический режим, характеризуемый мало изменяющимися во времени значениями λ_{ac} и δ_{ac} , также происходит быстрее по λ , чем по δ .

Выбор условий эксперимента определяется совокупностью причин таких, как достаточное число колебаний до момента, пока возможна уверенная регистрация α , значительное изменение τ и δ в процессе колебаний. Чувствительность реологических свойств к ошибкам в экспериментальных параметрах и др. При этом учитывается, что: а) для большей наблюдаемости неньютоновских эффектов и, в частности, обеспечения большей разницы между $\lambda_{ac} = \lambda|_{N \rightarrow \infty}$ и $\lambda_1 = \lambda|_{N \rightarrow 1}$, $\delta_{ac} = \delta|_{N \rightarrow \infty}$ и $\delta_1 = \delta|_{N \rightarrow 1}$, например, для дилатантной среды значение $\xi_{0нв}$ должно быть меньшим, но не близким к $\xi_{0нв,с}$; б) при снижении A уменьшается разница в δ и в λ при различных N , а при росте A в большем диапазоне значений b колебания затухают раньше, чем происходит выход на асимптотический режим.

Начальную оценку свойств можно выполнить по параметрам λ_{ac} и δ_{ac} , λ_1 и δ_1 (например, табл. 2 и рис. 3, соответствующие $\xi_0 = 6$, $A = 0,1$), а уточнить путем минимизации функции качества, являющейся критерием соответствия экспериментальных $y_э$ и расчетных y_p значений параметров колебаний, построенной, например, по методу наименьших квадратов:

$$f(m, b) = \sum_l (y_{pl} - y_{эl})^2, \quad (22)$$

где l – номер экспериментальной точки; вектор $y = [\delta; \lambda]$. Функция (22) имеет криволинейный овраг на плоскости (m, b) , и поэтому используются овражные методы поиска, имеющие нелокальный характер. В общем случае вектор $y = \alpha$, т.е. сравниваются экспериментальный и расчетный законы колебаний. Для повышения точности измерения нелинейных свойств проводится выбор оптимальных условий эксперимента из решения экстремальной задачи: $\sum \sqrt{(\partial y_l / \partial b)^2 + (\partial y_l / \partial m)^2} \rightarrow \max$, в пространстве параметров установки и колебаний.

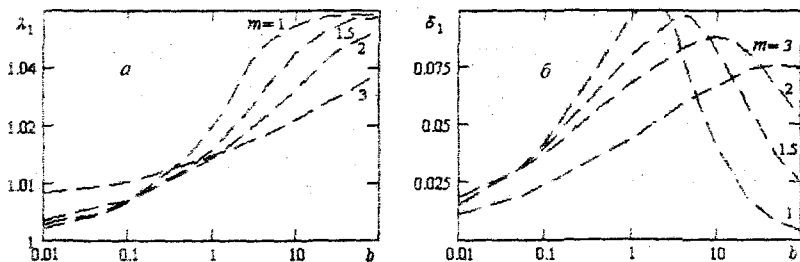


Рис. 3. Параметры колебаний λ_1 (а) и δ_1 (б) для сред с уравнением состояния Оствальда–Вейля

m	$b = 0,1$		$b = 1$		$b = 10$	
	$(\lambda_{ac} - 1) \times 10^2$	$\delta_{ac} \times 10^2$	$(\lambda_{ac} - 1) \times 10^2$	$\delta_{ac} \times 10^2$	$(\lambda_{ac} - 1) \times 10^2$	$\delta_{ac} \times 10^2$
1	0,72	4,13	2,31	9,45	4,7	3,91
1,25	0,43	2,53	0,73	4,16	1,4	6,61
1,5	0,32	1,92	0,47	2,68	0,66	3,65
2	0,3	1,34	0,34	1,69	0,42	1,99
2,5	0,42	1,12	0,5	1,28	0,52	1,46
3	0,86	0,87	0,91	0,92	0,91	0,98

При заполнении тигля вязкопластичной жидкостью около его оси всегда присутствует твердое ядро (зона I на рис. 4), где сдвиговые напряжения не превосходят предела текучести. В потоке также имеется тонкий твердотельный слой (зона II на рис. 4), который возникает у поверхности цилиндра и перемещается к ядру. Граница ядра в это время движется от центра, и затем зоны I и II объединяются. В следующую четверть периода происходит обратное движение, а в новом полупериоде при $\xi = \xi_0$ вновь образуется такой слой (или несколько) и т.д.

В застойных, или твердотельных, зонах скорость по радиальной координате изменяется линейно: $dU/d\xi - U/\xi = 0$, и в случае, когда ядро заполняет весь объем, $U(\xi, T) = d\alpha/dT \cdot \xi$. Этим зонам отвечают прямолинейные участки на профилях скорости сдвига и скорости среды, начиная от $\xi = 0$ (зона I), а также участки с искривлением профиля $D_{\xi\varphi}$ при смене знака (зона II); это области с $D < D_0$ на рис. 4.

В процессе затухания область твердотельного течения растет, и при номере колебания $N_{тр}$ и далее она заполняет весь вискозиметр в любой момент времени. В этом случае эффективный момент инерции системы достигает своего наибольшего значения, равного сумме моментов инерции замороженной жидкости $MR^2/2$ и пустой системы K , а вместе с ним наибольшим становится и период, пропорциональный корню из этой величины. Значение δ тогда минимально и совпадает с δ_0 ввиду отсутствия диссипации механической энергии вследствие вязкого трения.

Эти качественные соображения подтверждаются результатами расчетов. Зависимость безразмерного периода колебаний заполненного жидкостью цилиндра λ от N (рис. 5а) является монотонно возрастающей и тем быстрее

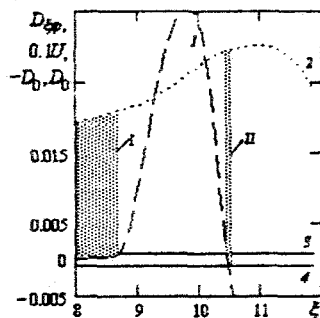


Рис. 4. Распределения скорости сдвига 1 и скорости среды 2 вдоль радиуса цилиндра, $\xi - D_0$, $\xi - (-D_0)$; I и II — твердотельные зоны

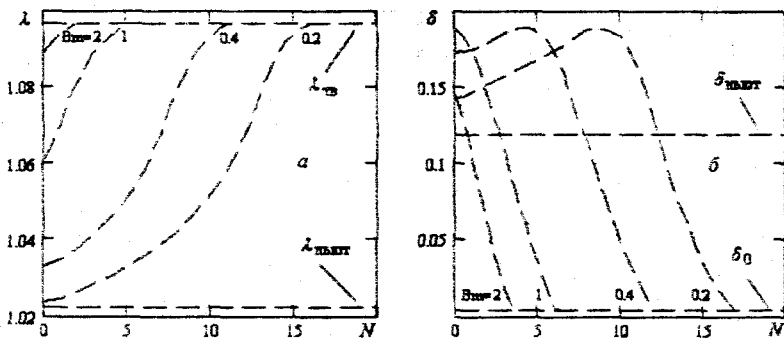


Рис. 5. Зависимость параметров колебаний λ (а) и δ (б) от их номера для бингамовских сред ($A = 0,2$, $\xi_0 = 12$)

достигает величины $\lambda_{ТВ} = (1 + A)^{1/2}$, чем больше Bm , а $\delta = \delta(N)$ (рис. 5б) сначала растет до некоторого значения δ_m , одинакового для всех Bm при прочих равных условиях, а затем сравнительно быстро падает до $\delta \sim \delta_0$ (на рис. 5 величины $\delta_{Ньют}$ и $\lambda_{Ньют}$ отвечают ньютоновской среде). При увеличении числа Bm кривая $\delta = \delta(N)$ смещается к оси ординат и становится монотонно убывающей. Поведение параметров колебаний для вязкопластичных сред также можно объяснить с позиций ньютоновских жидкостей. Эффективное значение $\xi_{0вп}$ в процессе колебаний, как и для псевдопластичных сред, уменьшается и при $\xi_{0вп} \sim 4,3$ наблюдается экстремум $\delta = \delta(N)$, а если с начала колебаний реализуется значение $\xi_{0вп} < \xi_{0вп,с}$, то функция $\delta = \delta(N)$ убывает.

Исходя из отмеченных свойств колебательных процессов предложен достаточно простой и оригинальный метод измерения предела текучести, основанный на наблюдении числа колебаний $N_{ТВ}$, совершаемых до момента установления полностью твердотельного режима. В отличие от зависимости $N_{ТВ} = N_{ТВ}(\xi_0)$ (рис. 6) функции $N_{ТВ} = N_{ТВ}(A)$ являются монотонно убывающими, а наибольшее изменение $N_{ТВ}$ наблюдается при одновременном варьировании A и ξ_0 . Оставляя свободным один параметр: A или ξ_0 , при фиксированном другом, можно получить соответствующую кривую и оценить число Bm из условия $\sum (N_{ТВ,1} - N_{ТВ,2})^2 \rightarrow \min$, где $N_{ТВ,1}$ и

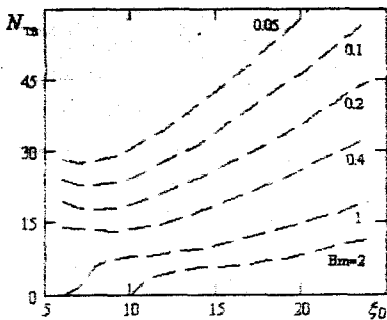


Рис. 6. Зависимости $N_{ТВ} = N_{ТВ}(\xi_0)$ для различных чисел Бингама ($A = 0,15$)

$N_{\text{тв}}$ – экспериментальные и расчетные значения $N_{\text{тв}}$, определяемые по кривым, аналогичным приведенным на рис. 6. Зависимости $N_{\text{тв}} = N_{\text{тв}}(\xi_0)$ для различных A идентичны друг другу: $N_{\text{тв}} A \sim \text{const}$ (отклонение от равенства связано с дискретностью $N_{\text{тв}}$) при одном и том же ξ_0 , т.е. $N_{\text{тв}}$ при любых A для $\text{Вт} \in [0,05; 2]$ можно найти по рис. 6 с учетом того, что $N_{\text{тв}} \sim 0,15 N_{\text{тв}0,15} / A$, где $N_{\text{тв}0,15}$ – значение $N_{\text{тв}}$ при $A = 0,15$.

Жидкости, близкие по характеру к вязкопластичным и свойства которых можно исследовать в вискозиметре, слабо, но текут и при напряжении $\sigma = |\sigma_{\xi\varphi}| < \text{Вт}$, и их вязкость при $D \rightarrow 0$ конечна, хотя и весьма велика. Поэтому рассмотрены также иные, чем в (7), варианты моделирования среды: а) модель bi-viscosity с различными коэффициентами k_σ (штриховые линии на рис. 7, 8: 1 – $k_\sigma = 10$; 2 – 100); б) экспоненциальная зависимость эффективной вязкости от D , предложенная Папанастасио Т.К. (Papanastasiou Т.С.): $\sigma_{\xi\varphi} = \{1 + \text{Вт}[1 - \exp(-nD)] / D\} D_{\xi\varphi}$ (штрих-пунктирные линии: 1 – параметр $n = 10$; 2 – 100); в) степенной реологический закон (6) с показателем $m < 1$ (сплошные линии: 1 – $b = 0,75$, $m = 0,9$; 2 – 1,25, 0,7; рис. 7, 8 – для $\xi_0 = 10$, $A = 0,1$, $\text{Вт} = 0,5$; $\lambda_{\text{ньют}} \sim 1,014$ и $\delta_{\text{ньют}} \sim 0,069$, а $\lambda_{\text{тв}} \sim 1,049$).

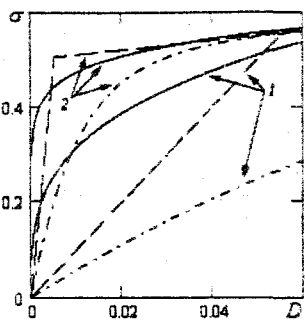


Рис. 7. Кривые течения псевдопластичных сред

Кривые течения (рис. 7) показывают как модели приближают поведение сред к бингамовскому при малых D , а степень их неньютоновости проявляется в наблюдаемом в эксперименте законе колебаний (рис. 8). Для таких материалов

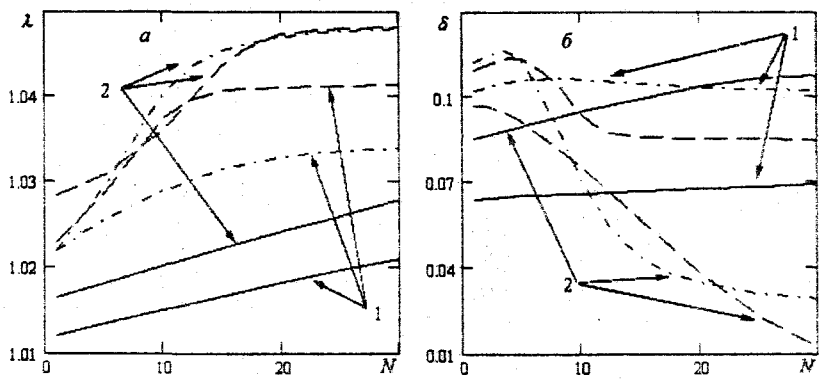


Рис. 8. Зависимость параметров колебаний λ (а) и δ (б) от их номера для псевдопластичных сред

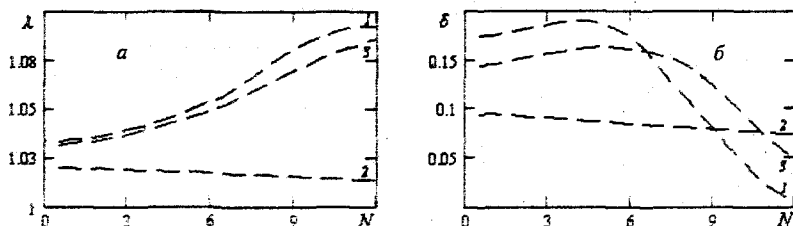


Рис. 9. Зависимость параметров колебаний λ (а) и δ (б) от их номера для реостабильных сред ($A = 0.2$, $\xi_0 = 12$, $m = 2$, $Wm = 0.4$).

1 – Бингама, 2 – Оствальда-Вейля, 3 – Балкли-Гершеля

после установления изосинхронных колебаний еще присутствует диссипация вследствие вязкого трения и $\delta > \delta_0$, а $\lambda < \lambda_{TB}$, т.к. не вся жидкость внутри тигля выполняет роль присоединенной массы.

Для нелинейно вязкопластичной жидкости темпы роста периода и изменения декремента во времени изменяются соответственно по сравнению с линейно вязкопластичной и нелинейно вязкой средами (рис. 9). Оценивание реологических свойств модели (8) выполняется из исследования кривых $\delta = \delta(N)$ и $\lambda = \lambda(N)$ или $\alpha = \alpha(T)$. Полученные оценки для изменения параметров колебательных процессов при затухании в зависимости от нелинейных свойств жидкостей (например, рис. 2, 3, 5, 6, 8, 9) могут существенно превосходить точность измерений, что позволяет предположить наблюдаемость нелинейных эффектов и в натуральных экспериментах.

Обсуждены возможности параметрической идентификации жидкостей с упругой составляющей в уравнении состояния. Свойства линейных сред: вязкость, время релаксации и пр., находились из построенного в терминах комплексной вязкости вискозиметрического уравнения

$$4A\sqrt{\chi}J_2(\sqrt{\chi}\xi_0\sqrt{\gamma}) + \phi\xi_0\sqrt{\gamma}J_1(\sqrt{\chi}\xi_0\sqrt{\gamma}) = 0, \quad (23)$$

где $\chi = (\Delta + i)/\lambda$, $\phi = \Delta\tau^{-1} \left[1 + (\chi^{-2} + \chi^{-2}\Delta^2)^{-1} \right] + i\chi^{-1} \left[1 - (\chi^{-2} + \chi^{-2}\Delta^2)^{-1} \right]$;

$\gamma = 1 - \chi We$ и $\gamma = [1 - 1/(\chi We)]^{-1}$ – для сред Максвелла и Фойгта; $\Delta = \delta/2\pi$; $\delta_0 = 0$; $We = \theta q_0$ – число Вейссенберга (Weissenberg), $\theta = \nu\rho/G$ – время релаксации (или запаздывания). Зависимость, например, δ от ξ_0 при различных числах We для сред Максвелла продемонстрирована на рис. 10. Изучены переходные режимы колебаний для таких сред и особенности их гидродинамики.

Исследована чувствительность неизвестных свойств к параметрам установки и колебаний. При оптимальном планировании установлено, что метод затухающих колебаний для наблюдения, прежде всего слабо упругих свойств, малоэффективен в виду узкого диапазона значений ξ_0 . Адекватной в плане одновременной оценки вязких и упругих свойств является область, где

значения длин вязкой и упругой волн близки. Тогда чувствительности $\psi_{We,\lambda}$ минимальны и, например, $\psi_{We,\lambda} \sim 0,1 \dots 1$, а при уменьшении числа We на порядок значение $\psi_{We,\lambda}$ увеличивается в 5–10 раз и далее всякий раз приблизительно на порядок при его дальнейшем уменьшении на порядок. Чувствительность $\psi_{We,\lambda}$, также как и при $We = 0$, при расчете по мнимой части функции качества обычно на несколько порядков выше, а с ростом We от этой области растет число локальных минимумов функции. В связи с этим при наличии ошибок в данных даже для ньютоновской среды можно получить значения упругих свойств, близкие к возможно наблюдаемым: например, при $A = 0,15$, $\xi_0 = 12$ и ошибкам, отвечающих табл. 1, $We \sim 0,05$.

Выявлено, что крutiльно-колебательный метод может быть использован для изучения неаналитического поведения течения, обусловленного существованием среды при одинаковых скоростях сдвига (или напряжениях) в различных микроскопических состояниях, что представляет интерес при обсуждении образования т.н. сдвиговых зон, наблюдаемых в водных растворах ПАВ, органических растворах металлокомплексов, течениях лиотропных жидких кристаллов и пр. На основе реологического уравнения состояния Джонсона–Сигельмана построена модель эксперимента:

$$\frac{d^2 \alpha}{dT^2} + \alpha = -\frac{4}{\xi_0^2} A \sigma_{\xi\varphi}^{\Sigma} \Big|_{\xi=\xi_0}; \quad \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial \sigma_{\xi\varphi}^{\Sigma}}{\partial \xi} + \frac{2\sigma_{\xi\varphi}^{\Sigma}}{\xi};$$

$$\sigma_{\xi\varphi} + We \left(\frac{\partial \sigma_{\xi\varphi}}{\partial T} + \frac{1-a}{2} D_{\xi\varphi} \sigma_{\varphi\varphi} - \frac{1+a}{2} D_{\xi\varphi} \sigma_{\xi\xi} \right) = D_{\xi\varphi},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} + We \left(\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial T} - (1+a) D_{\xi\varphi} \sigma_{\xi\varphi} \right) = 0, \quad \sigma_{\xi\xi} + We \left(\frac{\partial \sigma_{\xi\xi}}{\partial T} + (1-a) D_{\xi\varphi} \sigma_{\xi\varphi} \right) = 0;$$

$$\alpha_0 \sim 6^\circ, \quad \frac{d\alpha}{dT} \Big|_{T=0} = 0, \quad \sigma_{\varphi\varphi, \xi\xi, \xi\varphi}(\xi, 0) = U(\xi, 0) = 0;$$

$$U(\xi_0, T) = \frac{d\alpha}{dT} \xi_0; \quad \sigma_{\xi\varphi}(0, T) = U(0, T) = 0, \quad (24)$$

где в отличии от (1), (9)

$$d = \sqrt{\frac{\eta_p}{q_0 \rho}}, \quad \sigma_{\xi\varphi}^{\Sigma} = \sigma_{\xi\varphi} + g D_{\xi\varphi}, \quad g = \frac{\eta_s}{\eta_p};$$

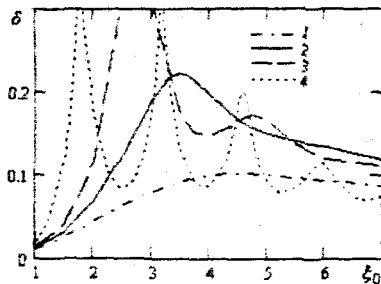


Рис. 10. Зависимость $\delta = \delta(\xi_0)$
($A = 0,1$): 1 – $We = 0$; 2 – 1; 3 – 2; 4 – 5

a – параметр скольжения: $a \in [0, 1]$ и, например, для разбавленных растворов полимеров $a \in [0,2; 0,89]$, с уменьшением a растет проскальзывание; η_p, η_s – динамические вязкости (полимера и растворителя); $\sigma_{\varphi\varphi}(\xi\xi^F)$ – безразмерная $\varphi\varphi(\xi\xi^F)$ -я компонента тензора напряжений; $\delta_0 = 0$.

Стационарная кривая течения $\sigma = \nu D$, где $\nu = \vartheta + (1 + We^2(1 - a^2)D^2)^{-1}$, $\sigma = \left| \sigma_{\xi\varphi}^{\Sigma} \right|$ (рис. 11), при $a \neq 1$ и малых $\beta = \eta_s / (\eta_p + \eta_s) < 1/8$ не монотонна: на ней

имеются максимум и минимум, при реализации значений D между которыми на диаграмме стационарных решений модели (24) возможно возникновение вещественных и комплексных бифуркаций. При выходе на участок с отрицательной вязкостью происходит скачок параллельно осям координат (см. рис. 11). Так, рис. 12 относится к интервалу времени, когда происходит горизонтальный переход до участка с высокой вязкостью (на рис. 12,

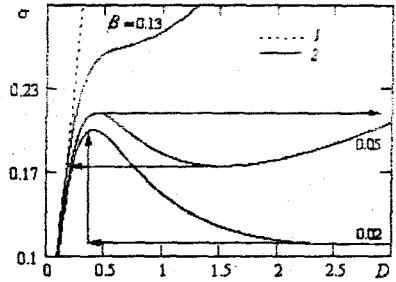


Рис. 11. Кривые течения ($We = 3$):
1 – $a = 1$; 2 – 0,5

13 $\sigma_{ct} = \sigma_{\xi\varphi}^{\Sigma} \Big|_{\xi=\xi_0}$, $D_{ct} = D_{\xi\varphi} \Big|_{\xi=\xi_0}$; здесь $A = 0,2$, $\xi_0 = 8$, $We = 3$, $\beta = 0,01$, $a = 0,5$).

Зависимость $\sigma_{ct} = \sigma_{ct}(D_{ct})$ для жидкости Максвелла вне переходных процессов представляет спираль в форме овала, закручивающуюся с течением времени к началу координат; для ньютоновской среды это прямая. Здесь также характерны овалы (рис. 13), но только после выхода на режим с малыми $D_{\xi\varphi}$. Наблюдается гистерезис, а в переходных процессах траектории $\sigma_{ct}(D_{ct})$ неупорядочены и на спектре $D_{\xi\varphi}$ присутствуют субгармоники, характерные для

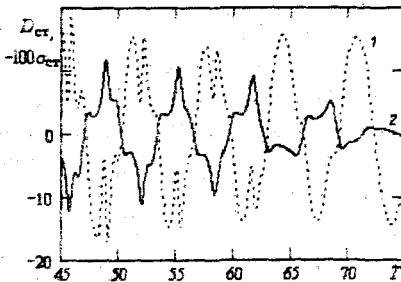


Рис. 12. Изменение напряжения 1 и скорости сдвига 2 на стенке цилиндра во времени

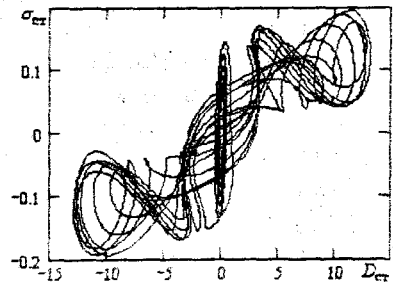


Рис. 13. Зависимость $\sigma_{ct} = \sigma_{ct}(D_{ct})$

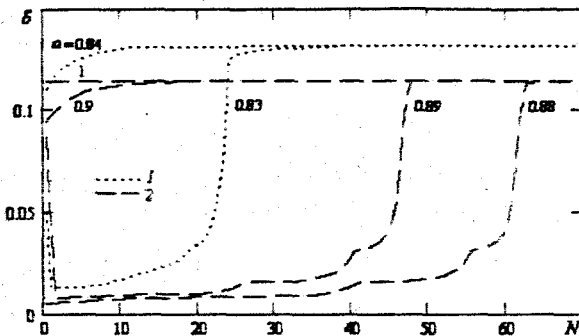


Рис. 14. Изменение декремента затухания в процессе колебаний ($\xi_0 = 12$, $A = 0,2$, $\beta = 0$): 1 – $We = 2$; 2 – 3

систем с малой размерностью в хаотических режимах их колебаний.

Колебания неизосинхронны (рис. 14), и переход к устойчивой ветви кривой течения, выходящей из нуля, характеризуется скачком в зависимости их параметров от номера. С уменьшением a от единицы значение $\delta_1 = \delta|_{N \rightarrow 1}$ монотонно падает, а при некотором a_0 и ниже декремент δ_1 начинает принимать значительно более низкие значения. Свойства жидкости определяются по характеристикам этапа изосинхронных колебаний, коэффициент a при $a > a_0$ – по зависимостям параметров колебаний от их номера: $\delta = \delta(N)$ и $\lambda = \lambda(N)$, в частности, по значениям δ и λ при $N \rightarrow 1$, а при $a < a_0$ – по числу колебаний, проходимых до скачка. В случае неустойчивого состояния оценка свойств ненадежна.

Исследован общий случай упругой вязкопластичной среды. Для описания такого поведения в (2), (4), (10) использована модель Максвелла: $\sigma_{\xi\varphi} + We\zeta \partial\sigma_{\xi\varphi}/\partial T = \zeta D_{\xi\varphi}$ ($\sigma_{\xi\varphi}(\xi, 0) = 0$), где в множителе ζ учтена и пластичная компонента в рамках модели bi-viscosity: $\zeta = 1 + Bm/D$ при $D \geq D_0$ и $\zeta = k_\sigma$ при $D < D_0$, или экспоненциальной зависимости: $\zeta = 1 + Bm[1 - \exp(-nD)]/D$, с высокими модельными коэффициентами.

При $We \neq 0$ (и $Bm \neq 0$) при больших N асимптотические значения $\delta \neq \delta_0$, и к тому же зависимость $\delta = \delta(N)$ может носить колебательный характер (рис. 15). В рамках линейных моделей это объясняется наличием одного экстремума на зависимости $\delta = \delta(\xi_0)$ для ньютоновской среды и ростом их числа с усилением упругих свойств (см. рис. 10), в то время как при увеличении N , $1/\bar{D}$ и кажущейся вязкости падает $\xi_{0эф}$ и растет $We_{эф} = We\zeta$. График зависимости $\sigma_{ст} = \sigma_{ст}(D_{ст})$ симметричен относительно $(0; 0)$. С усилением пластичных свойств траектории становятся более сложными (рис. 16), а «ось» фигуры стремится к вертикали. При ослаблении упругих свойств

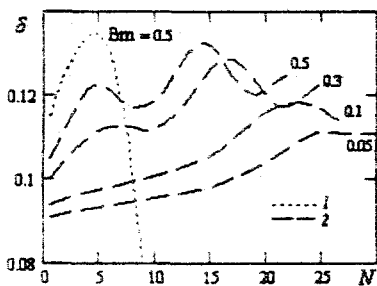


Рис. 15. Изменение декремента затухания в процессе колебаний ($\xi_0 = 10, A = 0,1$):
1 - $We = 0,01$; 2 - 1

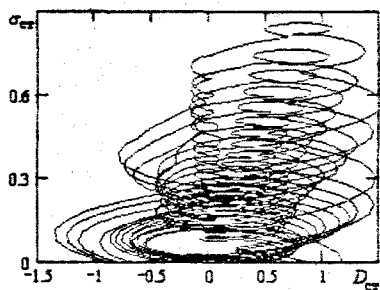


Рис. 16. Зависимость напряжения от скорости сдвига на стенке цилиндра ($\xi_0 = 10, A = 0,1, We = 1, Bm = 0,05$)

зависимость приближается к стационарной кривой течения, т.е. к прямой, выходящей из точки с координатами $(0; Bm)$. Предел текучести, время релаксации и вязкость оцениваются аналогично предлагаемому ранее, например, по $\alpha = \alpha(T)$.

Описанные выше с помощью эффективных значений $\xi_{0эф}$ особенности в поведении $\delta = \delta(N)$ и $\lambda = \lambda(N)$ для нелинейных жидкостей наблюдаются и в случае цилиндра конечной высоты, когда величина \bar{D} усредняется по внутренней поверхности тигля. Так, для ньютоновских сред при заданных ξ_0 и A при меньшем η_0 период λ выше и для слабовязкого приближения также выше δ . Для короткого тигля скорость сдвига меньше, т.е. больше $\xi_{0эф}$, а δ и λ , например, для дилатантной жидкости меньше, чем для среды с $m=1$ (рис. 17; здесь $\xi_{0нв} > \xi_{0нв\delta}$, для $m=1$ при $\xi_0 \sim 6,025$ и ниже декремент $\delta_{\eta_0=1} < \delta_{\eta_0 \rightarrow \infty}$).

Методика идентификации свойств основана на законе колебаний с учетом переходных процессов, а в рамках матрицы Якоби выбираются условия эксперимента, в т.ч. оптимальная высота тигля. Найдена граница по высоте, выше которой можно использовать приближение длинного цилиндра, обладающее рядом преимуществ, как-то: ошибки в плотности среды и высоте тигля слабее влияют на оценку вязкостных свойств, вдоль оси оврага на плоскости неизвестных параметров минимум функции качества обычно более выражен, численная реализация модели проще, что обеспечивает большую эффективность решения и пр.

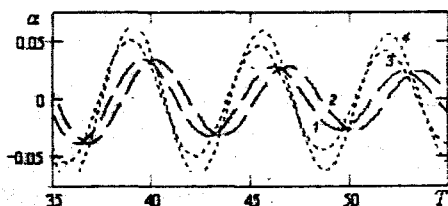


Рис. 17. Закон колебаний тигля ($A = 0,2, \xi_0 = 6, b = 1$): 1 - $m = 1, \eta_0 \rightarrow \infty$; 2 - 1, 6;
3 - 2, ∞ ; 4 - 2, 42

Задачи о течениях нелинейных сред решены численно, т.к., в частности, смена знака скорости деформации с течением времени и вдоль пространственной координаты не позволяет найти точное решение, что затрудняет использование результатов на практике. Поэтому разработан также аналитический метод оценивания свойств, основанный на использовании зависимостей для линейных сред, и сформулированы его особенности для решения прямой и обратной задач вискозиметрии. В методе функция качества строится по эффективным значениям $\xi_{0эф}$ для каждого полупериода $n = N/2$, и, например, течению нелинейно вязкой жидкости в длинном тигле отвечает

$$f(m, b) = \sqrt{\sum_n \left\{ \xi_0 / \sqrt{b \cdot \left| \operatorname{Re} \left(\kappa \xi_{0нв} \alpha_0 \chi \sqrt{\chi} J_2(\sqrt{\chi} \xi_{0нв}) / J_1(\sqrt{\chi} \xi_{0нв}) \right) \right|^{m-1} - \xi_{0нв} \right\}^2}, \quad (25)$$

где $\chi = (\Delta + i) / \lambda$; $\kappa = \kappa(\Delta)$ – коэффициент усреднения $\exp(-\chi T)$ по n ; χ , α_0 , $\xi_{0нв}$ находятся для каждого n : $\xi_{0нв}$ – по χ из вискозиметрического уравнения; вид первого слагаемого в общем случае определяется реологической моделью.

При планировании оптимального эксперимента установлено, что при наличии 20...50 точек измерения и изменении в процессе затухания одного из параметров колебаний, обычно Δ , на 15...20% и выше можно обеспечить ошибку в свойствах жидкости не более 10% (при точности измерения периода и декремента затухания не хуже 0,1%), учитывая также общие рекомендации по чувствительности ξ_0 к Δ и λ для ньютоновских сред. Методика апробирована на различных численных примерах, в т.ч. отвечающих рис. 2, 5, 17, и применялась в обратных задачах проверки идентифицируемости свойств и оптимальных условий опыта, когда для точного описания движения тигля учитываются переходные процессы с помощью соотношений для линейной среды при $\xi_{0эф}$. В терминах $\xi_{0эф}$ в рамках (17)–(20) аналогично оценивается влияние вторичных течений на колебания тигля, заполненного нелинейными средами. Для сред с упругими свойствами помимо $\xi_{0эф}$ вводится $We_{эф}$. Сходимость принятых в методе точных решений для линейной жидкости и численных моделей, например (2)–(10), позволяет подтвердить их достоверность.

Разработанная теория использована при идентификации нелинейно вязкого поведения, в общем случае с наличием упругой компоненты, наблюдаемого в экспериментах с жидкими металлами. Анализ выполнен на основе данных, полученных в лаборатории исследования физических свойств расплавов УГТУ и любезно предоставленных с.н.с. Вьюхиным В.В. и проф. Тягуновым Г.В. Условия эксперимента следующие: $\delta_0 \sim 0,006$, $\tau_0 \sim 3$, $R \sim 0,7$, $2H/R \sim 3$; $\xi_0 \sim 12 \pm 2$, $A \sim 0,075 \pm 0,025$ (размерные величины даны в СГС). Константы реологической модели, например K в комплексе с m , в расчетах соответствовали эффективной вязкости, определяемой по традиционной методике для усредненных по всем N параметрам колебаний в диапазоне реализуемых в опытах \bar{D} и отвечающей представленным в литературе результатам.

Особенности неьютоновского характера проявлялись при малых значениях исследуемого температурного диапазона, в т.ч. в гетерогенной зоне между точками солидуса и ликвидуса, и угасали по мере роста температуры T , а также в области аномалий на зависимостях $\nu = \nu(T)$. Так, в опытном образце около точки ветвления кривой $\nu = \nu(T)$ показатель степенного закона $m \sim 0,74$, причем на общей ветви при нагреве и охлаждении при одинаковых T и α_0 (т.е. \bar{D}) поведение $\delta = \delta(N)$ воспроизводилось полностью. При удалении от точки псевдопластичные свойства становились слабее, что может свидетельствовать о структурных превращениях в этом интервале T . После расплавления, например, в экспериментах с железом число $Bm \sim 0,3$, а пластическая вязкость, входящая в Bm (9), по порядку величины совпадала с ньютонической для более высоких T ($\nu \sim 0,005$). Этим значениям отвечал локальный минимум, выраженный слабее, что возможно обусловлено влиянием ошибок и низкой наблюдаемостью при этих условиях вязкопластических эффектов. При интерпретации в рамках модели Оствальда-Вейля $m \sim 0,65$, а при расчете по ньютонической модели вязкость $\nu \sim 0,2$ соответствовала сильновязкому приближению ($\xi_0 \sim 2$). Представлены рекомендации по оптимизации условий опыта для уточнения типа и свойств расплавов и показано, что неучет даже слабых нелинейностей приводит к противоречиям в данных по вязкости, полученных на различных установках.

Развита теория метода вынужденных крутильных колебаний для исследования нелинейных свойств. Построена модель эксперимента:

$$\frac{d^2 \alpha}{dT^2} + \alpha = -\frac{4}{\xi_0^2} A \sigma_{\xi\varphi} \Big|_{\xi=\xi_0} + \alpha_0 \sin \frac{T}{\lambda}; \quad (26)$$

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial \sigma_{\xi\varphi}}{\partial \xi} + \frac{2\sigma_{\xi\varphi}}{\xi}; \quad (27)$$

$$\alpha(0) = 0, \frac{d\alpha}{dT} \Big|_{T=0} = 0; U(\xi, 0) = 0, U(\xi_0, T) = \frac{d\alpha}{dT} \xi_0, U(0, T) = 0, \quad (28)$$

где

$$U = \frac{F}{d\omega_0}, T = \omega_0 t, \lambda = \frac{\omega_0}{\omega}, \alpha_0 = \frac{F}{K\omega_0^2}, Bm = \frac{\sigma_0}{\nu\rho\omega_0}, We = \theta\omega_0, b = \frac{\omega_0^{m-1}K}{\nu\rho};$$

ω и F - частота и амплитуда вынуждающей силы; ω_0 - собственная частота осциллятора; $\delta_0 = 0$ (см. также (1)). Модель отвечает случаю длинного тигля и традиционным допущениям 1 и 2, дополнена реологическим уравнением состояния, например, для нелинейно вязкой среды: $\sigma_{\xi\varphi} = bD_{\xi\varphi}D^{m-1}$; для упругой вязкопластичной среды: $\sigma_{\xi\varphi} + We\zeta \partial \sigma_{\xi\varphi} / \partial T = \mathcal{D}D_{\xi\varphi}$ ($\sigma_{\xi\varphi}(\xi, 0) = 0$), $\zeta = 1 + Bm/D$ при $D \geq D_0$, $\zeta = k_\sigma$ при $D < D_0$, $k_\sigma \sim 10^3$.

Для режима установившихся колебаний построены частотные спектры кинематических и динамических параметров (например, рис. 18 для нелинейно вязкой среды). Выявлено появление нечетных гармоник вынуждающей силы, обнаруженных ранее, в частности, Вильгельмом М. (Wilhelm M.) в упрощенной модели с сосредоточенными параметрами.

Распределение интенсивностей I пиков спектра, в т.ч. вид их огибающей, определяется нелинейными свойствами жидкости, что позволяет исследовать их в рамках фурье-реологии. При малых амплитудах a нелинейность не оказывает существенного влияния на гармоничность закона колебаний, но при увеличении вклада силы трения в результирующую силу, усилении нелинейных свойств возникают условия, способствующие росту $I_{3\lambda}, 5\lambda, \dots$ и на спектре $\alpha = \alpha(T)$.

Для ньютоновских сред изучены фазовые и амплитудные $\bar{a} = \bar{a}(\lambda)$ (рис.

19), где $\bar{a} = a/\alpha_0$, характеристики движения. Для линейных сред, разыскивая закон колебаний в виде $\alpha = a \sin(T/\lambda + \varphi)$, где φ — сдвиг фаз колебаний системы относительно фазы возбуждающей силы, из (26)–(28) получаем, что

$$a = \alpha_0 \left([\operatorname{Re}(L)]^2 + [\operatorname{Im}(L)]^2 \right)^{-1/2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{Im}(L)/\operatorname{Re}(L), \quad (29)$$

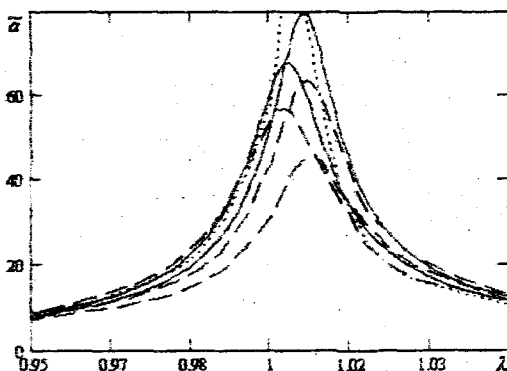


Рис. 19. Амплитудно-частотные характеристики ($\xi_0 = 20, A = 0,1$, нумерация кривых — по убыванию \bar{a} в резонансе): 1 — нелинейно вязкая среда ($m = 2, b = 1, \alpha_0 = 0,001$); 2 — ньютоновская среда; 3 — среда Максвелла ($We = 1$); далее — упругая вязкопластичная среда: 4 — $We = 0,5, We = 0,1, \alpha_0 = 0,0025$; 5 — $0,5, 1, 0,001$; 6 — $0,5, 0,1, 0,001$

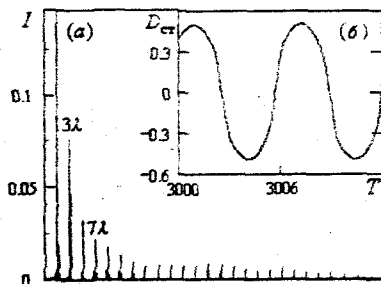


Рис. 18. Спектр (а) и зависимость от времени (б) скорости сдвига на стенке цилиндра ($\xi_0 = 20, A = 0,1, \lambda = 1,01, \alpha_0 = 0,0015, b = 1, m = 3$)

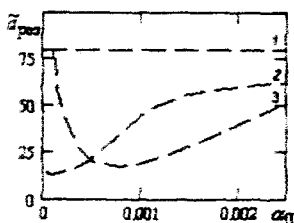


Рис. 20. Зависимость амплитуды при резонансе от амплитуды вынуждающей силы ($A = 0,1$, $\xi_0 = 20$): 1 – ньютоновская среда; далее – упругая вязкопластичная среда: 2 – $Bm = 0,5$, $We = 0,1$; 3 – 1, 0,01

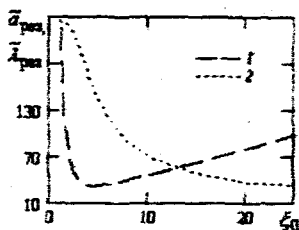


Рис. 21. Зависимость характеристик колебаний от ξ_0 ($A = 0,1$): 1 – $\bar{a}_{рез} = \bar{a}_{рез}(\xi_0)$; 2 – $5 \cdot 10^3 (\lambda_{рез} - 1) = \bar{\lambda}_{рез}(\xi_0)$

где $L = 1 - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{4Ai\sqrt{i} J_2(\xi_0\gamma\sqrt{i/\sqrt{\lambda}})}{\xi_0\gamma\lambda\sqrt{\lambda} J_1(\xi_0\gamma\sqrt{i/\sqrt{\lambda}})}$, $\gamma = 1$ – для ньютоновской среды,

$\gamma = \sqrt{1 - iWe/\lambda}$ – для среды Максвелла. Величина \bar{a} (29) не зависит от α_0 , а при наличии пластических и нелинейно вязких составляющих в уравнении состояния амплитудные кривые при изменении α_0 сдвигаются (рис. 20), что дает возможность идентифицировать их нелинейное поведение.

При увеличении A резонансные кривые становятся более пологими, резонансная частота $\lambda_{рез}$ растет. Изменение частоты и амплитуды $\bar{a}_{рез}$ в резонансе в зависимости от ξ_0 продемонстрировано на рис. 21 (для ньютоновской среды). С усилением упругих свойств величина $\bar{a}_{рез}$ обычно сначала становится ниже таковой для ньютоновской среды, а потом выше, что определяется отношением длин вязкой и упругой волн. Для псевдо- и вязкопластичных жидкостей по сравнению с вязкой характерно уменьшение $\bar{a}_{рез}$, а для дилатантных – увеличение $\bar{a}_{рез}$ (см. рис. 19). Для вязкопластичных сред с ростом пластических свойств значение $\lambda_{рез}$ увеличивается, амплитуда $\bar{a}_{рез}$ сначала падает, а затем возможен ее рост. Такое поведение согласуется с результатами для режима затухающих колебаний и интерпретируется с помощью эффективных значений $\xi_{0эф}$.

Обсуждены способы оценки реологических параметров, например, из зависимостей $\bar{a} = \bar{a}(\lambda)$ и $\varphi = \varphi(\lambda)$ при высоких отношениях моментов инерции A , из $\bar{a}_{рез} = \bar{a}_{рез}(\alpha_0)$ при выраженном резонансе. Свойства можно найти и из кривых $a_{рез} = a_{рез}(\xi_0)$, $a_{рез} = a_{рез}(A)$ и пр. или из значений α_0 , соответствующих при различных λ одинаковой амплитуде колебаний. Величина A/α_0 не зависит от K , комплексу $A/\alpha_0 = \text{const}$ при $A = \text{var}$ соответствует серия резонансных кривых с $\lambda_{рез}$ и $a_{рез}$, и константы определяются из $a_{рез} = a_{рез}(\lambda_{рез})$. Оценка

выполняется путем минимизации функции качества, где наблюдаемым параметром может служить также α . Для прецизионности эксперимента целесообразно частоту ω_0 , недоступную прямым измерениям, определять совместно с добротностью осциллятора из значений $\lambda_{рез}$ и $a_{рез}$ в отсутствие среды. Аналитический метод измерения неньютоновских свойств может быть применен и в режиме вынужденных колебаний, когда в (25) $\kappa = 2/\pi$, $\chi = i/\lambda$, $\alpha_0 = a$, экспериментальные точки выбираются, например, из амплитудно-фазовых характеристик, а $\zeta_{0эф}$ находится из (29).

В третьей главе вопросы, рассмотренные выше для крутильного вискозиметра, решены для внешней гидродинамической задачи о поступательных колебаниях пластины, также являющейся сопряженной: движение зонда определяется инициируемым им движением среды. Полученная математическая модель эксперимента для традиционного для метода режима вынужденных колебаний имеет вид:

1) уравнение движения пластины

$$\frac{d^2 \xi}{dT^2} + \xi = \sin \frac{T}{\lambda} + \Phi_{тр}; \quad (30)$$

2) уравнение движения жидкости

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial \sigma_{\zeta\zeta}}{\partial \zeta}; \quad (31)$$

3) начально-краевые условия для (30), (31)

$$d\xi/dT|_{T=0} = 0, \quad \xi(0) = 0, \quad U(\zeta, 0) = 0, \quad U(0, T) = y \frac{d\xi}{dT}, \quad U(\infty, T) = 0; \quad (32)$$

4) реологическое уравнение состояния, например, для нелинейно вязкой среды

$$\sigma_{\zeta\zeta} = b D_{\zeta\zeta}^m, \quad (33)$$

где

$$b = \omega_0^{m-1} K / (\nu\rho), \quad \xi = xk / F, \quad T = \omega_0 t, \quad \lambda = \omega_0 / \omega, \quad \omega_0^2 = k / M, \quad \zeta = z / d, \\ d = \sqrt{\nu/\omega_0}, \quad \beta = \sqrt{2}Ay, \quad U = V / (d\omega_0), \quad D_{\zeta\zeta} = \partial U / \partial \zeta, \\ A = S\nu\rho\omega_0 / F, \quad y = F / (kd), \quad \Phi_{тр} = 2A\sigma_{\zeta\zeta}|_{\zeta=0}. \quad (34)$$

Здесь A – безразмерный комплекс, характеризующий условия эксперимента и свойства среды; b – безразмерный показатель консистенции; d – толщина пограничного слоя; D^2 – безразмерный второй инвариант тензора скоростей деформации \mathbf{D} ; $D_{\zeta\zeta}$ – безразмерная $\zeta\zeta$ -я компонента тензора \mathbf{D} ; $\Phi_{тр}$ – действующая на пластину безразмерная сила трения; k – жесткость упругого элемента; K и m – постоянная и показатель степенного реологического закона; M – масса подвесной системы; t – время; V – компонента скорости пластины, направленная вдоль оси X ; X и Z – оси декартовой системы координат, совпадающая и ортогональная плоскости

пластины; x – линейное смещение пластины из положения равновесия; y – коэффициент пропорциональности между масштабами по осям X и Z ; z – координата по оси Z (на пластине $z = 0$); β – безразмерная вязкость; ν – кинематическая вязкость среды; ρ – плотность среды; ω_0 – частота собственных колебаний пластины; $\sigma_{\zeta\xi}$ – безразмерная $\zeta\xi$ -я компонента тензора напряжений. В модели не учитываются краевые эффекты и влияние стенок заполненного средой сосуда, потери в самой колебательной системе; $D = |D_{\zeta\xi}|$.

Для режима затухающих колебаний модель эксперимента имеет вид, аналогичный (30)–(34), за исключением того, что уравнение движения пластины запишется как

$$\frac{d^2 \xi}{dT^2} + \xi = \Phi_{\text{тр}}; \quad (35)$$

начально-краевые условия

$$d\xi/dT|_{T=0} = 0, \quad \xi(0) = \xi_0, \quad U(\zeta, 0) = 0, \quad U(0, T) = d\xi/dT, \quad U(\infty, T) = 0, \quad (36)$$

а в параметрах (34)

$$\xi = x/d, \quad \lambda = \omega_0/q, \quad A = Sd\rho/M, \quad (37)$$

где q – частота колебаний зонда, погруженного в исследуемую среду; ξ_0 – безразмерное начальное смещение пластины.

Закономерности в движении среды, определяющие отклик параметров колебаний на ее реологические свойства, можно наглядно объяснить с помощью нелинейной вязкой модели. Кривые течения с $m=1$ и $m \neq 1$ пересекаются при $D=1$, кривая для среды с $m=2$, например, при $D < 1$ проходит ниже прямой для среды с $m=1$ и граница области развитого течения для нее находится ближе к пластине (рис. 22; здесь a – амплитуда установившихся колебаний). Это связано с тем, что глубина проникновения пропорциональна эффективной вязкости bD^{m-1} , которая для дилатантных сред при этих условиях эксперимента падает с ростом m и при уменьшении D .

При $\beta = \text{const}$ с ростом y и, в частности F , расширяется интервал проходимых в процессе колебаний значений скорости сдвига, а при $D > 1$ граница находится дальше от пластины и влиянием стенок пренебрегать нельзя. Вязкопластическое течение при малых D перемежается твердыми прослойками, вследствие увлечения которыми жидкости растет область развитого течения по сравнению с ньютоновской средой, что качественно согласуется с результатами для псевдопластичных сред.

Для режима вынужденных колебаний исследованы амплитудно-фазовые характеристики (рис. 23–25). Результаты для $m=1$ совпадают с приведенными в

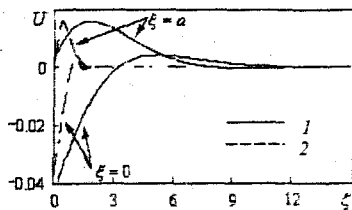


Рис. 22. Зависимость $U = U(\xi)$ ($b=1$, $\beta=1$, $y=0,1$, $\lambda=3$): 1 – $m=1$; 2 – 2

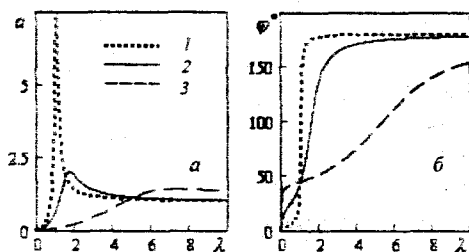


Рис. 23. Амплитудные (а) и фазовые (б) характеристики для ньютоновской среды: 1 - $\beta = 0,1$; 2 - 1; 3 - 10

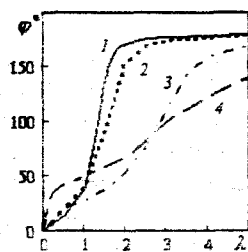


Рис. 24. Зависимость $\varphi = \varphi(\lambda)$ для сред Оствальда-Вейля ($y = 0,1$): 1 - $m = 2, b = 1, \beta = 1$; 2 - 2, 10, 1; 3 - 2, 1, 10; 4 - 0,5, 1, 1

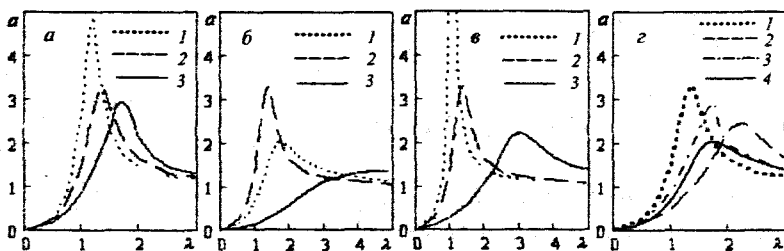


Рис. 25. Зависимость резонансных кривых от условий эксперимента и свойств среды: а) 1 - $b = 0,1$; 2 - 1; 3 - 10 ($m = 2, \beta = 1, y = 0,1$); б) 1 - $m = 1$; 2 - 2; 3 - 0,5 ($b = 1, \beta = 1, y = 0,1$); в) 1 - $\beta = 0,1$; 2 - 1; 3 - 10 ($b = 1, m = 2, y = 0,1$); г) 1 - $y = 0,1$; 2 - 10; 3 - 1; 4 - $m = 1$ ($b = 1, m = 2, \beta = 1$)

работе Каплуна А.Б. и др., если в ней использовать выражение для присоединенной массы $\mu = S\rho\sqrt{2\nu/\omega}$. Развиты методы оценки свойств. Так произведение $y\beta$ не зависит от ν , и при $y\beta = \text{const}$, $y = \text{var}$ и некотором m получается серия резонансных кривых, отвечающих разным ν , с резонансными частотами $\lambda_{\text{рез}}$ и амплитудами $a_{\text{рез}}$ (см. рис. 23а для $m = 1$, где, в частности, для $y\beta = 1$ значения $y = 10, 1, 0,1$). Тогда m находится по зависимости $a_{\text{рез}} = a_{\text{рез}}(\lambda_{\text{рез}})$, в т.ч. по величине $a_{\text{ас}}$ при больших значениях $\lambda_{\text{рез}}$, когда $da_{\text{рез}}/d\lambda_{\text{рез}} \sim 0$, или из монотонно возрастающей функции $a_{\text{ас}} = a_{\text{ас}}(m)$. Оценку можно выполнить по $a_{\text{рез}} = a_{\text{рез}}(\beta)$ и $\lambda_{\text{рез}} = \lambda_{\text{рез}}(\beta)$, $\lambda_{\text{рез}} = \lambda_{\text{рез}}(b)$ и $a_{\text{рез}} = a_{\text{рез}}(b)$ или по амплитудным кривым.

Для метода затухающих колебаний обнаружены эффекты, возникающие в вискозиметре при его заполнении неньютоновскими жидкостями с вязкими, упругими и пластичными составляющими в уравнении состояния, и разработаны способы их идентификации. Построены вискозиметрические

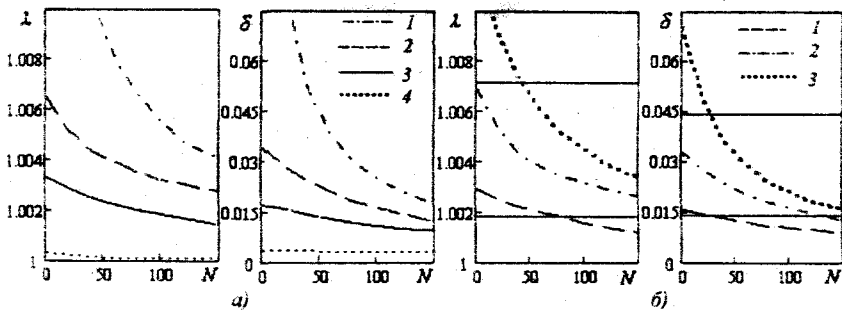


Рис. 26. Зависимость параметров колебаний от их номера при различных значениях A (а) и b (б): а) 1 - $A = 0,05$; 2 - $0,01$; 3 - $0,005$; 4 - $0,001$ ($b = 1, m = 2$); б) 1 - $b = 0,1$; 2 - 1 ; 3 - 10 ($A = 0,01; m = 2$)

уравнения для линейных сред, позволяющие решать как прямую, так и обратную задачи вискозиметрии. Для среды Максвелла уравнение имеет вид

$$\lambda^{-2}(\Delta+i)^2 - 2\Delta_0\lambda^{-1}(\Delta+i) + \Delta_0^2 + 1 + 2[1 - \lambda^{-1}(\Delta+i)\text{We}]^{1/2} i\lambda^{-3/2}(\Delta+i)^{3/2} A = 0,$$

где $\text{We} = \theta q_0$ - число Вейссенберга; q_0 - частота колебаний пластины в пустой системе. При $\text{We} = 0$ в рамках (37) для вязкой среды получаем (при $\Delta_0 = 0$), что

$$1 - (\lambda^{-1} - \Delta i)^2 - 2A\sqrt{i}(\lambda^{-1} - \Delta i)^{3/2} = 0. \quad (38)$$

Изучено влияние некорректного учета в традиционной зависимости массы μ , частоты колебаний и пр. причин, ведущих к неверной интерпретации данных. Оценены ошибки, связанные с ними и наличием переходных процессов. Нелинейное вязкоупругое поведение рассмотрено, как и в (24), на примере модели, отражающей неаффинные деформации и демонстрирующей разницу нормальных напряжений и нелинейно вязкое состояние. На рис. 26, 27 показаны некоторые особенности для нелинейно вязких сред (горизонтальные

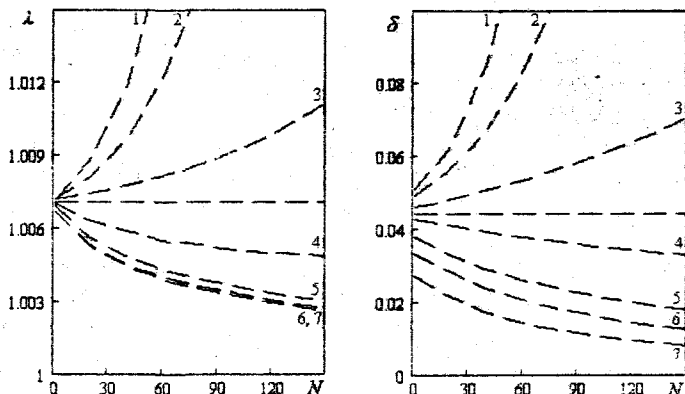


Рис. 27. Зависимость параметров колебаний от их номера при различных значениях m ($b = 1, A = 0,01$): 1 - $m = 2/3$; 2 - $3/4$; 3 - $0,9$; 4 - $1,1$; 5 - $3/2$; 6 - 2 ; 7 - 3

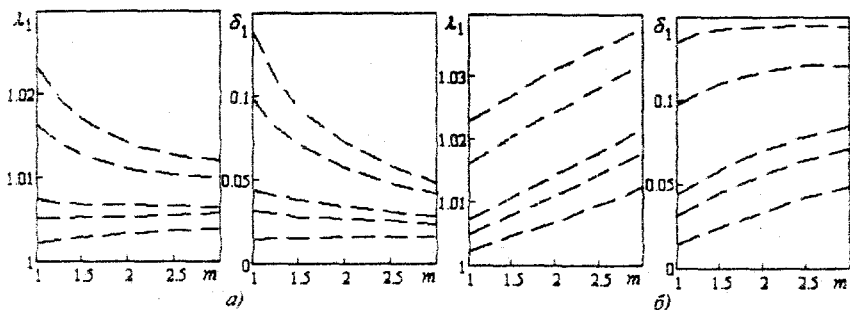


Рис. 28. Параметры колебаний λ_1 и δ_1 при $\xi_0 = 1$ (а) и $\xi_0 = 10$ (б)
 ($A = 0,01$): кривые сверху вниз соответствуют $b = 10, 5, 1, 0,5, 0,1$

линии соответствуют аналитическому решению (38): для $b = 1$ – верхняя линия и $b = 0,1$ – нижняя линия на рис. 26б; для $b = 10$ параметры $\delta = 0,137$ и $\lambda = 1,023$). При $b = 1$ кривые $\lambda = \lambda(N)$ для различных m стремятся при номере колебания $N \rightarrow 1$ к одному значению (рис. 27а), что позволяет определить A из (38) как при $m = 1$ и оценить K в предположении $b = 1$. При $b < 1$ значения параметров колебаний $\lambda_1 = \lambda|_{N \rightarrow 1}$ и $\delta_1 = \delta|_{N \rightarrow 1}$ для нелинейных выше, чем для ньютоновской, а при $b > 1$ – ниже.

Дополнительный способ оценивания свойств по сравнению с крутильным вискозиметром основан на изучении поведения параметров колебаний от номера при различных начальных смещениях ξ_0 (для линейных сред λ и δ не зависят от ξ_0). Характер их изменения определяется типом течения, в т.ч. зависящей от D величиной эффективной вязкости, чем объясняется, в частности, немонотонность кривых на рис. 28. Коэффициенты b и m оцениваются по периоду и декременту затухания колебаний в первом из них (рис. 28) и уточняются путем минимизации функции качества вида (22), где $y = [\delta; \lambda]$ или $y = \xi$. Для оценки нелинейных свойств можно использовать точные решения для ньютоновской среды аналогично представленному в (25).

В рамках создания теоретических основ экспериментальной базы по изучению неньютоновских свойств высокотемпературных жидкостей рассмотрены иные, эпизодически встречающиеся, методы. Так, для маятникового вискозиметра подобная задача сведена к таковой для вибрационного метода, а в приложении выполнена интерпретация данных в условиях модельных экспериментов с капиллярным вискозиметром.

В четвертой главе разработаны методы идентификации неизвестных параметров математических моделей высокотемпературных вискозиметрических систем и продемонстрировано их приложение на примере течений в вибрационном вискозиметре нелинейно вязких сред с показателем $m \in [1; 2,5]$ и постоянной $b \in [0,1; 10]$ степенного закона. Проведен обзор методов, применяемых

для решения задач построения описания процессов с использованием полученной в результате обработки экспериментального материала информации, что представляет собой процесс идентификации. Реализована идентификация в узком смысле, т.е. при известных структуре модели, в качестве которой в данном случае выступает вид уравнения, и зависимости выходных параметров от входных. Математическая модель процесса имеет вид (30)–(33), а модель измерений представляет построенный с помощью вычислительного эксперимента закон колебаний $\xi = \xi(T)$ с внесенной в него ошибкой $\sim 0,1\%$ для условий эксперимента: $\beta = 1$, $\gamma = 0,1$ и λ , близких к резонансным. В общем случае предпочтительный вид этих исходных данных выбирается путем моделирования из условия обеспечения наиболее точной оценки свойств.

Выполнена постановка задачи параметрической идентификации и определены основные этапы процедуры оценивания, исходя из опытных данных: 1) исследование наблюдаемости и идентифицируемости системы; 2) разработка алгоритма оценивания; 3) определение разброса оцениваемых параметров по разбросу экспериментальных данных; 4) проверка соответствия расчетной и эмпирической информации; 5) планирование оптимального эксперимента.

Измерения характеристик возможны в ограниченном числе точек, количество измеряемых параметров обычно невелико и размерность их вектора $\theta \in R^l$ меньше размерности вектора состояния системы $\psi \in R^n$, расширенного вектором неизвестных параметров $\zeta \in R^k$ ($l < (n+k)$). Условие, при котором существует единственное решение задачи оценивания параметров, – условие идентифицируемости. Систему, состоящую из математических моделей процесса и измерений, можно назвать идентифицируемой, если между вектором ψ , расширенным вектором ζ , и вектором θ существует взаимно однозначное соответствие. Система является наблюдаемой, если взаимно однозначное соответствие существует между векторами ψ и θ .

Если модель процесса содержит систему нелинейных дифференциальных уравнений, то для локальной идентифицируемости необходимо, чтобы ее матрица Якоби была невырождена. Глобальная однозначность может не существовать в случае, когда указанный критерий всюду локально выполняется, и для ее обеспечения на систему необходимо наложить дополнительное условие знакоопределенности главных миноров. Это условие является достаточным, но не необходимым, в связи с чем система может быть идентифицируема даже тогда, когда оно не выполняется. В терминах Якобиана

$$J(T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial b} & \frac{\partial \xi}{\partial m} \\ \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{\partial \xi}{\partial T} \right) & \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial \xi}{\partial T} \right) \end{pmatrix} \quad (39)$$

согласно численным расчетам установлены локальная и глобальная идентифицируемость математической модели по эмпирической информации.

Функции чувствительности в матрице (39) находились из решения системы уравнений для функций чувствительности: полученной из исходной дифференцированием ее по оцениваемым параметрам и переменной в левых частях уравнений порядка дифференцирования, с нулевыми начальными условиями. При этом задача идентификации сводилась к задаче наблюдения.

Выбран алгоритм решения задачи параметрической идентификации с учетом ее особенностей. зависящий, прежде всего, от критерия качества, роль которого здесь играет степень соответствия экспериментальных и расчетных данных. Вид функции качества, являющейся аналитическим выражением критерия, численные значения и свойства получаемых оценок параметров зависят главным образом от принципа оценивания, положенного в основу идентификации. В такой постановке решение задачи сводится к минимизации выбранного критерия качества на множестве возможных значений неизвестных параметров. Коэффициенты m и b находились из условия минимума функции, которую при достаточной информации об ошибках измерений можно построить по методу максимального правдоподобия:

$$\Phi(b, m) = (\theta_p(b, m, T) - \theta_3(T))^T \mathbf{B}_1^{-1} (\theta_p - \theta_3), \quad (40)$$

где θ_p, θ_3 – вектор-столбцы расчетных и экспериментальных значений измеряемых величин; \mathbf{B}_1 – ковариационная матрица ошибок измерения, диагональная положительно определенная матрица: $\det \mathbf{B}_1 \neq 0$, элементы (i, i) равны оценкам дисперсии σ_i^2 измерения в точке T_i , остальные элементы нулевые. При этом предполагается, что закон распределения измеряемой величины является нормальным и подчиняется гауссовскому распределению, математическое ожидание ошибок равно нулю.

Геометрически функция $\Phi = \Phi(b, m)$ представляет собой поверхность в пространстве неизвестных характеристик, заданную уравнением (40). В этой задаче она имеет ярко выраженный криволинейный овраг на плоскости (m, b) , а при определенных условиях эксперимента и наборе ошибок во всех измеряемых величинах возможно возникновение локальных минимумов, что затрудняет численную реализацию. Для таких функций эффективным оказался комбинированный поиск на основе метода конфигураций Хука–Дживса, предусматривающего локальное изучение поверхности отклика с помощью пробных шагов и ускоренное движение вдоль оси оврага, а также статистического метода и метода исключения областей, в частности, сеточного метода поиска.

Экспериментальные измерения искажены случайными и систематическими ошибками, ввиду чего по данным эксперимента могут быть найдены не сами неизвестные параметры, а значения некоторых случайных величин – их точечных оценок, точность которых определяется с помощью интервальных оценок при данном уровне доверия. Для нелинейных систем доверительные интервалы характеризуют разброс параметров также и ввиду хаотического

характера процессов. По доверительным интервалам измеряемых величин в предположении нормальности распределения и аддитивности ошибок измерения определены интервалы оцениваемых параметров. Ковариационная матрица ошибок оцениваемых параметров \mathbf{B}_2 связана с \mathbf{B}_1 соотношением

$$\mathbf{B}_2 = (\mathbf{L}^T \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{L})^{-1}, \quad (41)$$

где $\mathbf{L} = ((\partial \xi / \partial b) \quad (\partial \xi / \partial m))$ – матрица функций чувствительности (в общем случае содержит $l \times 2$ элементов, где l – число точек измерения ξ); вид \mathbf{B}_2 аналогичен \mathbf{B}_1 , а ее элементы – дисперсии оцениваемых параметров.

Определение разброса оцениваемых параметров дает возможность рассчитать доверительные интервалы вектора измеряемых величин, что позволяет использовать для доказательства адекватности модели реальному процессу известные методы статистической проверки гипотез. Условие адекватности используется для проверки правильности постановки задачи, а также для выбора наилучшей модели процесса или модели измерения из предлагаемых. Так, располагая комплексом моделей, соответствующих различным реологическим типам среды, и данными натуральных экспериментов, идентифицируются ее реологический тип, а затем и свойства в его рамках. Из кривых вида $\xi = \xi(T)$, $a = a(\lambda)$, $a_{\text{рез}} = a_{\text{рез}}(\lambda_{\text{рез}})$, $a_{\text{рез}} = a_{\text{рез}}(\beta)$ и пр., проводится выбор наилучшей модели представления данных, по которой и реализуется процедура идентификации.

Определитель \mathbf{B}_2 характеризует точность математического описания, что позволяет проводить выбор точек измерения из условия его минимума. Выполнено планирование оптимального эксперимента исходя из решения экстремальной задачи

$$\left| \begin{array}{cc} \sum_{i=1}^l \frac{1}{\sigma_i^2} \left(\frac{\partial \xi(T_i)}{\partial b} \right)^2 & \sum_{i=1}^l \frac{1}{\sigma_i^2} \frac{\partial \xi(T_i)}{\partial b} \frac{\partial \xi(T_i)}{\partial m} \\ \sum_{i=1}^l \frac{1}{\sigma_i^2} \frac{\partial \xi(T_i)}{\partial b} \frac{\partial \xi(T_i)}{\partial m} & \sum_{i=1}^l \frac{1}{\sigma_i^2} \left(\frac{\partial \xi(T_i)}{\partial m} \right)^2 \end{array} \right| \rightarrow \max. \quad (42)$$

При выборе числа точек l в (42) учитывается и нелинейность закона колебаний: при наличии слабо выраженных пиков несобственной гармоники на спектре число l меньше, что обусловлено в т.ч. меньшей суммарной ошибкой от $\xi(T_i)$ (в предельном случае расчет выполняется по a и ϕ), а учет негармонического закона большим l обычно превалирует над такой ошибкой. Наблюдаемость нелинейных эффектов выше в районе резонанса или в общем случае при большей амплитуде вынуждающей силы.

В результате идентификации свойств определены значения постоянной и показателя степенного реологического закона, отклоняющиеся от заданных менее, чем на 3%. Для указанных выше свойств среды и условий эксперимента

оценки b и m дополнены их 95%-ми доверительными интервалами, величины которых для всех расчетных случаев не превышали 10%. Проверка показала адекватность модели (30)–(33) с найденными коэффициентами рассматриваемым процессам колебаний. На практике присутствуют также ошибки в параметрах установки, а точность измерения ξ может быть ниже.

Основные выводы

При математическом моделировании экспериментов по изучению физико-химических свойств высокотемпературных расплавов и в возникающих задачах гидромеханики получены следующие результаты.

1) Для крутильного вискозиметра, заполненного ньютоновской жидкостью, разработаны методы одновременного измерения вязкости и плотности, работоспособность которых подтверждена приложением к опытным данным. Найдены условия эксперимента, когда принятые в теории положения обуславливают противоречия в результатах измерений методического характера.

2) Развита теоретическая основа крутильно-колебательного метода по наблюдению нелинейных свойств и экспериментальной идентификации реологической принадлежности жидкостей, основанные на неизосинхронности колебаний. Построены математические модели экспериментов и выявлены особенности течения в тигле различных типов неньютоновских жидкостей, в т.ч. при наличии проскальзывания. Обнаруженный характер поведения периода и декремента затухания колебаний объяснен в рамках ньютоновской модели.

Установленные закономерности в движении вискозиметра положены в основу выбора реологической модели, в рамках которой по закону колебаний определяются параметры жидкостей. Разработан и апробирован на численных моделях и экспериментальных данных по металлическим расплавам ряд методов измерения свойств линейных и нелинейных вязкопластичных, вязкоупругих, нелинейно вязких и в общем случае упругих вязкопластичных жидкостей, например, метод, в котором используются аналитические зависимости для линейных, вязких и вязкоупругих жидкостей.

3) Для режима вынужденных крутильных колебаний изучены возможности метода для измерения неньютоновских свойств. Оценено их влияние на амплитудно-фазовые характеристики и установлено возникновение нечетных гармоник вынуждающей силы на спектрах зависимостей параметров системы от времени. Предложены способы оценивания нелинейных свойств.

4) Представленные вопросы решены для вибрационного метода. Выявлены особенности вынужденных и затухающих колебаний зонда в неньютоновских жидкостях и разработаны методы измерения их свойств. Получены расчетные уравнения для решения прямой и обратной задач вискозиметрии в случае линейных жидкостей. Показано влияние неточностей в традиционной зависимости, ведущее к неверной интерпретации данных.

5) Разработаны методы параметрической идентификации и установлены наблюдаемость и идентифицируемость течений в таких вискозиметрических системах. На основе построенной методики обработки данных восстановлены реологические свойства и их статистические характеристики по наблюдаемым в эксперименте параметрам колебаний. Сформулированы критерии для планирования оптимального эксперимента по обнаружению и оцениванию неньютоновских свойств и рекомендации по оптимизации параметров установок, а также таковые для одновременной оценки вязкости и плотности ньютоновской среды крутильным вискозиметром.

Основное содержание диссертации изложено в публикациях:

1. Елюхина И.В. Исследование неньютоновских свойств высокотемпературных жидкостей. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2006. – 140 с.
2. Елюхина И.В. Наблюдение и измерение неньютоновских свойств высокотемпературных жидкостей крутильно-колебательным методом // Теплофизика высоких температур, 2006. – Т. 44, № 3. – С. 411–417.
3. Елюхина И.В. Течение жидкости Джонсона–Сигельмана в крутильно-колебательной системе // Журнал физической химии, 2006. – Т. 80, № 5. – С. 940–943.
4. Елюхина И.В. Возможности метода вынужденных крутильных колебаний для исследования неньютоновских свойств жидкостей // Заводская лаборатория. – 2006. – № 5. – С. 26–30.
5. Елюхина И.В. К теории вибрационного метода затухающих колебаний // Расплавы. – 2006. – № 2. – С. 81–89.
6. Елюхина И.В. Устойчивость течения жидкости в крутильном вискозиметре // Расплавы. – 2006. – № 3. – С. 80–83.
7. Вяткин Г.П., Елюхина И.В. Возможности крутильно-колебательного метода для изучения упругих вязкопластичных свойств // Доклады АН. – 2006. – Т. 406, № 6. – С. 753–755.
8. Елюхина И.В., Вяткин Г.П. К оценке влияния вторичных течений на колебания крутильного вискозиметра // Доклады АН. – 2006. – Т. 410, № 1. – С. 36–37.
9. Елюхина И.В., Вяткин Г.П. Одновременное измерение вязкости и плотности жидкости крутильно-колебательным методом // Изв. вузов. Черная металлургия. – 2006. – № 5. – С. 3–6.
10. Елюхина И.В., Вяткин Г.П. Идентификация нелинейно вязких свойств жидкостей вибрационным методом // Инженерно-физический журнал. – 2005. – Т. 78, № 5. – С. 70–77.
11. Елюхина И.В. Определение нелинейных свойств жидкостей крутильным вискозиметром конечной длины // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2005. – № 6. – С. 96–98.

12. Вяткин Г.П., Елюхина И.В. Моделирование движения вязкопластичной среды в цилиндре, совершающем затухающие крутильные колебания // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2005. – № 2. – С. 100–106.
13. Елюхина И.В. Особенности течения неньютоновских сред в осциллирующих реометрических системах // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2005. – № 1. – С. 12–16.
14. Елюхина И.В. К измерению вязкопластичных свойств раствора глицерина капиллярным методом // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2005. – № 2. – С. 110–111.
15. Елюхина И.В. Обсуждение возможностей маятникового вискозиметра для исследования неньютоновских свойств // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2005. – № 2. – С. 112–114.
16. Вяткин Г.П., Елюхина И.В. Разработка методов параметрической идентификации сред Оствальда–Вейля по результатам вибрационной реометрии // Вестник ЮУрГУ. Серия «Металлургия». – 2004. – № 8. – С. 22–27.
17. Елюхина И.В. Крутильно-колебательный вискозиметр: совершенствование методики и новые возможности // Сб. тр. междунар. научн. семинара «Актуальные проблемы реологии». – Барнаул, 2003. – С. 62–64.
18. Елюхина И.В. К вопросу наблюдаемости упругих свойств жидких сред в вискозиметрическом эксперименте по Швидковскому Е.Г. // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2001. – № 7. – С. 77–81.
19. Елюхина И.В. О нерегулярном режиме крутильных колебаний в вискозиметре Швидковского Е.Г. // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2001. – № 7. – С. 82–84.
20. Елюхина И.В. Некоторые вопросы, возникающие в вискозиметрических экспериментах над металлическими расплавами // Матер. X рос. конф. «Строение и свойства металлических и шлаковых расплавов». – Екатеринбург, 2001. – С. 196–200.

Елюхина Инна Владимировна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ
ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПРОЦЕССОВ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ
В ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ВИСКОЗИМЕТРИИ**

02.00.04 – физическая химия

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Издательство Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 10.01.2007. Формат 60×84 1/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2.32. Уч.-изд. л. 2,41. Тираж 100 экз. Заказ 560/8.

Отпечатано в типографии Издательства ЮУрГУ
454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.