УДК 517.977

ИГРОВАЯ ЗАДАЧА ВЫБОРА НАИЛУЧШЕГО КУРСА ЯХТЫ

В. И. Ухоботов, И. В. Цеунова

GAME PROBLEM OF THE BEST YACHT COURSE CHOICE

V.I. Ukhobotov, I.V. Tseunova

Рассматривается задача об управлении яхты с переменным ветром. Задача рассматривается в виде дифференциальной игры. Второй игрок управляет ветром.

Ключевые слова: управление, дифференциальная игра, игрок

The authors handle a problem of controlling a yacht in the baffling wind conditions. The problem is analyzed in the form of differential game. The second player controls the wind.

Keywords: management, differential game, player

1. Постановка задачи

В известной задаче выбора наилучшего курса яхты скорость яхты зависит от угла, который образует курс яхты и направление ветра. При постоянной по направлению и по величине скорости ветра в [1] рассмотрена конкретная модель такой зависимости. Исследуется задача, когда выгоднее идти галсами, чем прямо по заданному курсу.

Если рассматривать случай, когда вектор скорости v ветра может меняться, находясь в некотором множестве V, то вектор скорости u яхты можно выбирать из некоторого множества $U(v)$, зависящего от скорости ветра. Цель управления яхтой заключается в том, чтобы побыстрее вывести ее на заданное множество Z (например, причалить к острову). В каждый момент времени скорость ветра считается известной.

Рассмотренный пример является частным случаем задачи управления с помехой

$$\dot{z} = -u, \quad z \in R^n, \quad u \in U(v) \subset R^n, \quad v \in V. \tag{1.1}$$

Здесь V-множество произвольной природы; при каждом $v \in V$ множество $U(v)$ является непустым компактом в R^n. Считаем, что ограниченным является множество

$$K = \bigcup_{v \in V} U(v). \tag{1.2}$$

Первый игрок, выбирая управление $u \in U(v)$, стремится побыстрее осуществить встречу

$$z(t) \in Z, \tag{1.3}$$

где Z является выпуклым и замкнутым множеством в R^n. Второй игрок, выбирая управление $v \in V$, стремится сделать время встречи (1.3) как можно дольше.

Будем рассматривать игру, когда управление первого игрока строится в зависимости от реализовавшегося в момент времени t состояния $z(t)$ и от значения в этот момент времени управления $v(t)$ второго игрока. Будем строить управление первого игрока так, чтобы они допускали движение галсами [1].

Будем предполагать, что изменение управления $v(t)$ с течением времени меняется не очень сильно. Чтобы строго сформулировать это допущение введем, в рассмотрение евклидов шар S в R^n единичного радиуса и с центром в начале координат. Требование на $v(t)$ запишем в следующем виде: для любого отрезка [0,p] существует число $L > О$ такое, что

$$U(v(t)) \subset U(v(\tau)) + L(\tau - t)S \quad \text{при} \quad 0 \le t < \tau \le p. \tag{1.4}$$

Под управлением $(\bar{u}, \bar{\lambda})$ первого игрока понимаем правило, которое каждому состоянию $t \ge 0, z \in R^n$ и любому $v \in V$ ставит в соответствие конечный набор

$$u_s = u_s(t,z,v) \in U(v), \quad s = 1, ..., k = k(t,z,v), \quad \lambda_s = \lambda_s(t,z,v) > 0, \quad \lambda_1 + ... + \lambda_k = 1. \tag{1.5}$$

Движение системы (1.1) будем определять с помощью ломаных. Пусть заданы начальное состояние $t_0 \ge 0$, $z_0 = z(t_0) \in R^n$ и конечный момент времени $p > t_0$. Возьмем разбиение

$$\omega : t_0 < t_1 < ... < t_i < t_{i+1} < ... < t_{l+1} = p \tag{1.6}$$

с диаметром

$$d(\omega) = \max_{0 \le i \le l} (t_{i+1} - t_i). \tag{1.7}$$

Построим ломаную

$$z_\omega(t) = z_\omega(t_i) - \int_{t_i}^{t} u_i^*(r)dr, \quad t_i < t \le t_{i+1}, \quad i = \overline{0,l}. \tag{1.8}$$

Здесь обозначено $u_i^*(r) = u_s(t_i, z_\omega(t_i), v(t_i))$ при $t_i^{(s-1)} < r \le t_i^{(s)}, s = 1, ..., k(t_i, z_\omega(t_i), v(t_i))$,

$$t_i^{(0)} = t_i, \quad t_i^{(s)} = t_i + (t_{i+1} - t_i) \sum_{q=1}^{s} \lambda_q. \tag{1.9}$$

Содержательный смысл управлений (1.9) следующий. С помощью чисел λ_s первый игрок разбивает отрезок $[t_i, t_{i+1}]$ точками $t_i = t_i^{(0)} < t_i^{(1)} < ... < t_i^{(s)} < ... < t_i^{(k)} = t_{i+1}$ и на каждом из промежутков $(t_i^{(s-1)}, t_i^{(s)}]$ движется с постоянной скоростью $u_s(t_i, z_\omega(t_i), v(t_i))$. Управление второго игрока постоянно на промежутке $(t_i^{(s-1)}, t_{i+1}^{(s)}]$ и равно $v(t_i)$.

Из ограниченности множества (1.2) следует, что все ломаные (1.8) удовлетворяют условию Липшица с одной и той же константой. Следовательно, семейство ломаных (1.8) удовлетворяет условию теоремы Арцела[2]. Под движением системы (1.1) с управлением (1.5) и с начальным условием $z(t_0) = z_0$ понимаем любую функцию $z : [t_0, p] \to R^n$, которая является пределом равномерно сходящейся на отрезке $[t_0, p]$ последовательности ломаных (1.8), у которых диаметр разбиения стремится к нулю.

Отметим, что

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} u_i^*(r)dr = (t_{i+1} - t_i) \sum_{s=1}^{k} \lambda_s u_s(t_i, z_\omega(t_i), v(t_i)).$$

2. Оператор программного поглощения и его свойства

Следуя [3], введем для игры (1.1) оператор программного поглощения D_σ. Пусть $X \subset R^n$, $\sigma \geq 0$. Точка $z \in D_\sigma(X)$ тогда и только тогда, когда для любого $v \in V$ найдется измеримое управление $u : [0, \sigma] \to U(v)$ такое, что $z - \int_0^t u(r)dr \in X$ при некотором $0 \leq t \leq \sigma$.

Для любого ограниченного множества $F \subset R^n$ и для любого отрезка $[a, b] \subset R$ имеет место формула [4]

$$\left\{\int_a^b f(r)dr \middle| \quad f : [a, b] \to F \text{ – измерима}\right\} = (b - a)coF. \tag{2.1}$$

Здесь посредством coF обозначена выпуклая оболочка множества F.

Будем использовать операции сложения множеств X и Y из R^n и умножение множества X на число a

$$X + Y = \{z = x + y : x \in X, y \in Y\}, \ a\, X = \{z = ax : x \in X\}.$$

С учетом этих формул, а так же формулы (2.1), оператор программного поглощения принимает вид

$$D_\sigma(X) = \bigcap_{v \in V} \bigcup_{0 \leq \tau \leq 1} (X + \sigma\tau coU(v)). \tag{2.2}$$

Этот оператор обладает следующими свойствами.

Свойство 2. 1. $D_0(X) = X$.

Свойство 2. 2. *Если* $0 \leq \delta \leq \sigma$, $X \subset Y$, *то* $D_\delta(X) \subset D_\sigma(Y)$.

Свойство 2. 3. $D_\sigma(X + Y) \supset D_\sigma(X) + Y$.

Свойство 2. 4. $D_\delta(D_\sigma(X)) \subset D_{\delta+\sigma}(X)$.

Свойство 2. 5. $D_\sigma(\sigma X) = \sigma D_1(X)$.

Свойство 2. 6. *Если X – выпуклое множество, то множество $D_\sigma(X)$ является выпуклым.*

Свойство 2. 7. *Если X – выпуклое множество, то* $D_\delta(D_\sigma(X)) = D_{\delta+\sigma}(X)$.

Свойство 2. 8. *Если X – замкнутое множество, то множество $D_\sigma(X)$ является замкнутым.*

Свойство 2. 9. *Пусть X – замкнутое множество, последовательность* $0 \leq \sigma_{k+1} \leq \sigma_k$, $\sigma_k \to \sigma$ *и точка* $z \in D_{\sigma_k}(X)$. *Тогда* $z \in D_\sigma(X)$.

Свойства 2.1 – 2.6 непосредственно следуют из формулы (2.2). При доказательстве свойства 2.7 применим схему доказательства из работы [5]. В силу свойства 2.1 нужно рассмотреть случай $\delta > 0$ и $\sigma > 0$. Обозначим $X_* = (\delta + \sigma)^{-1}X$. Тогда из выпуклости множества X следует равенство $\delta X_* + \sigma X_* = X$. Отсюда, используя свойства 2.2, 2.3 и 2.5, получим

$$D_\delta(D_\sigma(X)) = D_\delta(D_\sigma(\delta X_* + \sigma X_*)) \supset D_\delta(D_\sigma(\sigma X_*) + \delta X_*) \supset$$

$$\supset D_\delta(\delta X_*) + D_\sigma(\sigma X_*) = \delta D_1(X_*) + \sigma D_1(X_*) \supset$$

$$\supset (\delta + \sigma)D_1(X_*) = D_{\delta+\sigma}((\delta + \sigma)X_*) = D_{\delta+\sigma}(X).$$

Обратное включение следует из свойства 2.4.

При доказательстве свойств 2.8 и 2.9 используется тот факт, что выпуклая оболочка компакта в R^n является компактом [6, теорема 1.1.7].

3. Оптимальное время встречи

Для каждой точки $z \in R^n$ положим $T(z) = +\infty$, если $z \overline{\in} D_\sigma(Z)$ при всех $\sigma \geq 0$. В противном случае

$$T(z) = \inf \sigma, \quad \sigma \geq 0, \quad z \in D_\sigma(Z). \tag{3.1}$$

Эта функция обладает следующими свойствами.

Свойство 3. 1. *Если $\sigma = T(z) < +\infty$, то $z \in D_\sigma(Z)$.*

Свойство 3. 2. *$T(z) \geq 0$ при любом $z \in R^n$; $T(z) = 0$ тогда и только тогда, когда $z \in Z$.*

Свойство 3. 3. *Функция $T(z)$ является выпуклой.*

Доказательство свойства 3.1 следует из замкнутости множества Z и из свойства 2.9 оператора D.

Первая часть свойства 3.2 следует из формулы (3.1). Если $T(z) = 0$, то из свойства 3.1 следует, что $z \in D_0(Z) = Z$. Если же $z \in Z$, то равенство $T(z) = 0$ очевидно.

Докажем свойство 3.3. Возьмем точки $z_i \in R^n$, $i = 1,2$, у которых $\sigma_i = T(z_i) < +\infty$. Тогда из свойства 3.1 и из формулы (2.2) следует, что для любой точки $v \in V$ найдутся числа $0 \leq \tau_i \leq 1$, $i = 1,2$, такие, что $z_i \in Z + \sigma_i \tau_i coU(v)$, $\quad i = 1,2$. Возьмем числа $\lambda_i > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Тогда из предыдущего включения, используя выпуклость множеств Z и $coU(v)$, получим

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \in Z + (\lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2)\tau coU(v), \; \tau = \frac{\lambda_1\sigma_1}{\lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2}\tau_1 + \frac{\lambda_2\sigma_2}{\lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2}\tau_2 \in [0,1].$$

Отсюда и из формулы (3.1) получим, что $T(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) \leq \lambda_1 T(z_1) + \lambda_2 T(z_2)$.

Утверждение 3. 1. *Пусть начальное состояние $z(0) = z_0 \overline{\in} Z$. Тогда для любого числа $0 < p < T(z_0)$ существует точка $v \in V$ такая, что постоянное управление второго игрока $v(t) = v$ при всех $0 \leq t \leq p$ обеспечивает для любого управления (1.5) первого игрока выполнение условия*

$$z(t) \overline{\in} Z \text{ при всех } 0 \leq t \leq p. \tag{3.2}$$

Доказательство. Поскольку $z_0 \overline{\in} D_p(Z)$, то из формулы (2.2) следует, что найдется точка $v \in V$, для которой

$$z_0 \overline{\in} Z + tcoU(v) \text{ при всех } 0 \leq t \leq p. \tag{3.3}$$

Из формул (1.8) и (1.9) следует, что при $u(t) = v$ каждая ломаная удовлетворяет равенству

$$z_\omega(t) = z_0 - tu(t) \text{ при некотором } u(t) \in coU(v).$$

Следовательно, аналогичному равенству удовлетворяет и любое движение $z(t)$. Отсюда и из (3.3) получим (3.2). □

4. Построение управления первого игрока

При построении управления первого игрока, обеспечивающего встречу (1.3) из начального состояния $z(0) = z_0$ к моменту $T(z_0)$, воспользуемся схемой из работы [7].

Лемма 4. 1. *Пусть $z \in D_{\delta+\sigma}(Z)$ при $\delta > 0$ и $\sigma > 0$. Тогда для любой точки $v \in V$ существует точка $u \in coU(v)$ такая, что либо*

$$z - \delta u \in D_\sigma(Z), \tag{4.1}$$

*либо при **некотором** $0 \leq t \leq \delta$*

$$z - tu \in Z. \tag{4.2}$$

Доказательство. Из формулы (2.2) и из свойства 2.7 отображения D следует, что для точки $v \in V$ непустым является множество чисел

$$0 \le t \le \delta, \quad z \in D_\sigma(Z) + tcoU(v). \tag{4.3}$$

Обозначим через t_0 верхнюю грань таких чисел t. Из замкнутости множества $D_\sigma(Z)$ и из компактности множества $coU(v)$ следует, что включение (4.3) выполнено при $t = t_0$. Если $t_0 = \delta$, то из (4.3) следует (4.1)

Пусть $0 \le t_0 < \delta$. Возьмем число $0 < \gamma < \delta - t_0$, чтобы $j\gamma = \sigma$ при некотором целом $j > 1$. Тогда из включения (4.3) при $t = t_0$ получим, что

$$z - t_0 u_1 \in D_{j\gamma}(Z) = D_\gamma(D_{(j-1)\gamma}(Z))$$

при некотором $u_1 \in coU(v)$. Отсюда следует, что найдется число $0 \le t_1 \le \gamma$ такое, что

$$z - t_0 u_1 \in D_{(j-1)\gamma}(Z) + t_1 coU(v).$$

Отсюда, используя свойство 2.2 отображения D, получим, что при $t = t_0 + t_1$ выполнено включение (4.3). Поскольку число t_0 является верхней гранью чисел t, удовлетворяющих (4.3), то $t_1 = 0$. Продолжая этот процесс дальше, найдем точку $u \in coU(v)$ такую, что при $t = t_0$ будет выполнено включение (4.2). $\square$

Теорема 4. 1. *Пусть начальное состояние z_0 такое, что $p = T(z_0) < +\infty$. Тогда существует управление (1.4) первого игрока такое, что для любого управления $v(t)$ второго игрока будет выполнено включение (1.3) при некотором $t \le p$.*

Доказательство. Обозначим

$$U_0(v) = \{z = u - u_* : u \in coU(v), u_* \in coU(v)\}. \tag{4.4}$$

При каждых $z \in R^n$, $0 \le t \le p$, $v \in V$ положим

$$\varepsilon(t, z, v) = \min \varepsilon, \quad \varepsilon \ge 0, \quad z \in D_{p-t}(Z) + \varepsilon U_0(v) + \varepsilon S. \tag{4.5}$$

Множество $D_{p-t}(Z)$ является замкнутым, а множества $U_0(v)$ и S – компакты. Поэтому включение (4.5) выполнено при $\varepsilon = \varepsilon(t, z, v)$. Из определения множества (4.4) следует, что

$$z + \varepsilon(t, z, v)(u_*(t, z, v) - u(t, z, v)) \in D_{p-t}(Z) + \varepsilon(t, z, v)S \tag{4.6}$$

при некоторых $u_*(t, z, v) \in coU(v)$ и $u(t, z, v) \in coU(v)$.

По теореме Каратеодори [6, теорема I.1.1]

$$u(t, z, v) = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(t, z, v) u_s(t, z, v), \quad \lambda_s(t, z, v) > 0,$$

$$\sum_{s=1}^{k} \lambda_s(t, z, v) = 1, \quad u_s(t, z, v) \in U(v). \tag{4.7}$$

Здесь $k = k(t, z, v) \le n + 1$.Эти функции берем в качестве управления (1.5) первого игрока.

Пусть в процессе игры реализуется управление $v(t) \in V$ второго игрока, удовлетворяющее условию (1.4). Тогда из формулы (4.4) следует, что включению (1.4) удовлетворяет и многозначная функция $U_0(v(t))$. Отсюда получим, что

$$U_0(v(t)) \subset U_0(v(\tau)) + L(\tau - t)S \text{ при } 0 \le t < \tau \le p. \tag{4.8}$$

Возьмем разбиение ω (1.6) и построим ломаную (1.8) с функциями (4.7). Обозначим

$$z_i = z_\omega(t_i), \quad v_i = v(t_i), \quad u^{(i)} = u(t_i, z_i, v_i), u_*^{(i)} = u_*(t_i, z_i, v_i), \quad \varepsilon_i = \varepsilon(t_i, z_i, v_i).$$

Тогда из (4.6) следует, что при i = *0* выполнено включение

$$z_i + \varepsilon_i u_*^{(i)} - \varepsilon_i u^{(i)} \in D_{p-t_i}(Z) + \varepsilon_i S, \tag{4.9}$$

причем $\varepsilon_0 = 0$. Предположим, что в момент времени t_i, $i < l+1$ выполнено включение (4.9). Тогда, используя лемму 4.1, найдем точку $u \in coU(v_i)$ такую, что либо

$$z_i + \varepsilon_i u_*^{(i)} - \varepsilon_i u^{(i)} - (t_{i+1} - t_i)u \in D_{p-t_{i+1}}(Z) + \varepsilon_i S, \tag{4.10}$$

либо при некотором $t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$z_i + \varepsilon_i u_*^{(i)} - \varepsilon_i u^{(i)} - (t - t_i)u \in Z + \varepsilon_i S. \tag{4.11}$$

Рассмотрим случай (4.10). Из формулы (1.10) получим, что $z_{i+1} = z_i - (t_{i+1} - t_i)u^{(i)}$. Отсюда и из (4.10) будем иметь, что

$$z_{i+1} + (t_{i+1} - t_i - \varepsilon_i)u^{(i)} + \varepsilon_i u_*^{(i)} - (t_{i+1} - t_i)u \in D_{p-t_{i+1}}(Z) + \varepsilon_i S. \tag{4.12}$$

Пусть $t_{i+1} - t_i \geq \varepsilon_i$. Тогда $(t_{i+1} - t_i - \varepsilon_i)u^{(i)} + \varepsilon_i u_*^{(i)} \in (t_{i+1} - t_i)coU(v_i)$. Отсюда и из (4.12) получим, что

$$z_{i+1} \in D_{p-t_{i+1}}(Z) + (t_{i+1} - t_i)U_0(v_i) + \varepsilon_i S \subset D_{p-t_{i+1}}(Z) + (t_{i+1} - t_i)U_0(v_{i+1}) + (\varepsilon_i + L\,|t_{i+1} - t_i|^2)S.$$

Здесь было использовано включение (4.8). Отсюда и из (4.5) следует, что

$$\varepsilon_{i+1} \leq (t_{i+1} - t_i)(1 + L(t_{i+1} - t_i)).$$

Пусть $t_{i+1} - t_i < \varepsilon_i$. Тогда

$$(\varepsilon_i - t_{i+1} + t_i)u^{(i)} + (t_{i+1} - t_i)u \in \varepsilon_i coU(v_i)$$

и, как следует из (4.12) и (4.8),

$$z_{i+1} \in D_{p-t_{i+1}}(Z) + \varepsilon_i U_0(v_i) + \varepsilon_i S \subset$$

$$\subset D_{p-t_{i+1}}(Z) + \varepsilon_i U_0(v_{i+1}) + (\varepsilon_i + L(t_{i+1} - ti)\varepsilon_i)S.$$

Отсюда и из (4.5) следует неравенство

$$\varepsilon_{i+1} \leq \varepsilon_i(1 + L(t_{i+1} - t_i)).$$

Объединяя оба случая, будем иметь, что включение (4.9) выполнено при i + 1, причем

$$\varepsilon_{i+1} \leq \max(t_{i+1} - t_i; \varepsilon_i)(1 + L(t_{i+1} - t_i)). \tag{4.13}$$

Поскольку $\varepsilon_0 = 0$, то из этого неравенства следует, что для всех t_i, для которых выполняется включение (4.10), будет выполнено

$$\varepsilon_{i+1} \leq d(\omega)e^{Lt_i}.$$

Обозначим

$$U_0 = co \bigcup_{v \in V} U_0(v).$$

Из ограниченности множества (1.2) следует ограниченность множества U_0.

Пусть включение (4.10) выполнено для всех $i \leq l$. Тогда из (4.5) и (4.14) следует, что

$$z_\omega(p) \in Z + \delta(\omega)(U_0 + S), \quad \delta(\omega) = d(\omega)e^{pL}. \qquad \mathbf{(4.15)}$$

Рассмотрим случай, когда для какого-то $i \leq l$ выполнено включение (4.11). На отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ реализуется управление $u_i^*(r) \in U(v_i)$, которое определяется формулами (1.9). Из (4.11) и (1.8) следует, что

$$z_\omega(t) + \int_{t_i}^{t} u_i^*(r)dr + \varepsilon_i u_*^{(i)} - \varepsilon_i u^{(i)} - (t - t_i)u \in Z + \varepsilon_i S.$$

Поскольку

$$\int_{t_i}^{t} u_i^*(r)dr \in (t - t_i) coU(v_i),$$

то из предыдущего включения получим, что

$$z_\omega(t) \in Z + (t - t_i + \varepsilon_i)(U_0 + S) \subset Z + d(\omega)(1 + e^{pL})(U_0 + S). \qquad (4.16)$$

Отсюда и из (4.15) следует, что для каждой ломаной (1.8) найдется число $0 \leq t(\omega) \leq p$ такое, что при $t = t(\omega)$ выполнено включение (4.16).

Пусть последовательность ломаных $z_{\omega_k}(t)$ с диаметром разбиения $d(\omega_k) \to 0$ равномерно на отрезке $[0, p]$сходится к движению $z(t)$. Для каждой ломаной в точке $t = t(\omega_k)$ выполнено включение (4.16). Можно считать, что $t(\omega_k) \to t_*$ (иначе перейдем к последовательности). Из равномерной сходимости ломаных следует, что $z_{\omega_k}(t(\omega_k)) \to z(t_*)$. Отсюда и из включения (4.16) получим, что $z(t_*) \in Z$. □

Литература

1. Крэггс, Дж.У. Задачи управления движением. Математическое моделирование / Дж.У. Крэггс. - М., 1979. - С. 21 - 34.
2. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, СВ. Фомин. - М., 1972. - 496 с.
3. Пшеничный, Б.Н. Структура дифференциальных игр / Б.Н. Пшеничный // Докл. АН СССР. - 1969. - Т. 184, № 2. - С. 285 - 287.
4. Hermes, H. The Generalized Differential E q u ; $\dot{x} \in R(t,x)$ / H. Hermes // Advances in Mathematics. - 1970. - № 4. - P. 149 - 169.
5. Ухоботов, В.И. К вопросу об окончании за первый момент поглощения / В.И. Ухоботов // Прикл. матем. и мех. - 1984. - Т. 48, № 6. - С. 892 - 897.
6. Пшеничный, Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Б.Н. Пшеничный. - М., 1980. - 320 с.
7. Ухоботов, В.И. Непрерывная игра в пространстве с неполной линейной структурой / В.И. Ухоботов // Теория и системы управления. - 1997. - № 2. - С. 107 - 109.

Кафедра теории управлении и оптимизации
Челябинский государственный университет
ukh@csu.ru, iriska-cat@mail.ru

Поступила в редакцию 13 февраля 2009 г.