

01.02.06

M 749

КОНТРОЛЬ

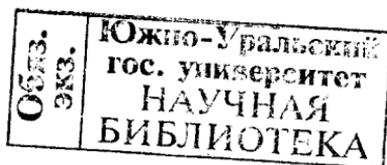
На правах рукописи

МОКЕЕВ Владимир Викторович

**ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА
КОЛЕБАНИЙ ТОНКОСТЕННЫХ
КОНСТРУКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ
ЖИДКИЕ И ВЯЗКОУПРУГИЕ СРЕДЫ**

Специальность 01.02.06 – "Динамика, прочность машин,
приборов и аппаратуры"

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора технических наук



Челябинск
1999

Работа выполнена в Южно-Уральском государственном университете.

Научный консультант –

профессор, доктор технических наук Павлюк Ю.С.

Официальные оппоненты:

профессор, доктор технических наук Пальчиковский В. Г.,

профессор, доктор технических наук Лизин В. Т.,

профессор, доктор технических наук Лысов А. Н.

Ведущая организация –

Государственный ракетный центр "КБ им. академика В.П. Макеева".

Защита состоится 02 июня 1999 г., в 15 часов, на заседании диссертационного совета Д 053.13.01 Южно-Уральского государственного университета: 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке университета.

Отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенных печатью, просим направлять по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, ЮУрГУ, Ученый совет.

Тел. (351-2) 39-94-57.

Автореферат разослан "___" _____ 1999 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.т.н., доцент



В.М. Кононов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и формулировка проблемы. Одним из основных направлений развития современного промышленного производства является широкое применение ресурсосберегающих проектных решений и технологий, что непосредственно связано с уменьшением материалоёмкости конструкций. К решению этой проблемы прямое отношение имеет развитие методов исследования конструкций в направлении более полного учёта свойств материалов. Одним из таких свойств является вязкоупругость материала конструкции. Вязкоупругие материалы, к которым относятся полимеры и композиты, металлы при повышенных температурах, бетон и т. п., находят сегодня широкое применение в промышленности. Другой средой, поведение которой существенно отличается от упругого, является жидкость. Конструкции, содержащие вязкоупругие и жидкие среды, довольно часто встречаются в различных отраслях современной техники: авиации и космонавтике, судостроении, энергетическом, химическом и транспортном машиностроении, гидротехническом и промышленном строительстве. Резервуары для хранения токсичных и горючих жидкостей, топливные баки жидкостных ракет, оборудование нефтегазопромыслов, транспортные поезда и танкеры, перевозящие большие объёмы жидкости, ракетные двигатели на твердом топливе – все это примеры конструкций с жидкими и вязкоупругими средами. Особое место в инженерных расчетах занимают методы исследования виброн нагруженности конструкций при различного рода динамических воздействиях. Эксплуатация конструкций при интенсивных ударных и вибрационных воздействиях может привести к их разрушению либо нарушению заданных режимов работы. Подробная и оперативная информация о режимах динамического нагружения требуется на всех этапах процесса проектирования, так как по ней определяются геометрические размеры и материал несущих элементов конструкции. Актуальность темы возрастает ещё и в связи с тем, что интенсивная и продолжительная вибрация оболочек топливных емкостей, цистерн для перевозки токсичных и горючих жидкостей может приводить к авариям и экологическим катастрофам. Большие объёмы перевозимых "экологически грязных жидкостей" предъявляют особые требования к прочности и надёжности транспортных средств, поскольку последствия загрязнения окружающей среды становятся все более необратимыми, а расходы на их устранение и восстановление естественных природных условий всё обременительнее.

Задачами исследования динамики тонкостенных конструкций с жидкими и вязкоупругими средами занимались многие видные российские и зарубежные ученые. Большой вклад в разработку теоретических основ современных методов расчета тонкостенных конструкций внесли работы Н.А. Алфутова, Н.А. Амбарцумяна, Л.И. Балабуха, В.В. Болотина, А.Н. Гузя, И.И. Гольденבלата, В.Т. Лизина, И.Ф. Образцова, В.И. Усюкина и многих других. Математические основы исследования вязкоупругих сред

заложены в работах Д. Бленда, Л. Больцмана, В. Вольтера, В.В. Москвитина, Р.М. Кристенсена, М.А. Колтунова, Ю.Н. Работнова, А.Р. Ржаницына, Е.С. Сорокина и других ученых. Решение некоторых задач расчета конструкций из вязкоупругих материалов приведено в работах К.Д. Джонсона, Д.А. Кинхольца, В.П. Майбороды, В.Г. Пальчиковского, Я.С. Садикова, И.Е. Трояновского и др. Большой вклад в развитие методов исследования динамики тонкостенных конструкций с жидкостью внесли работы В.Н. Антонова, И.Б. Богоряда, А.С. Вольмира, А.Г. Горшкова, В.Г. Григорьева, М.А. Ильгамова, К.С. Колесникова, Р.Е. Лампера, Г.Н. Микишева, Н.Н. Моисеева, Ю.С. Павлука, А.А. Пожалостина, Б.И. Рабиновича, В.В. Румянцева, К.В. Фролова, Ф.Н. Шклярчука, В.П. Шмакова, H.N. Abramson, H.F. Bauer, D.D. Kana, O.C. Zienkiewicz и др. Появление ЭВМ дало толчок развитию численных методов, среди которых ведущее место занимает метод конечных элементов (МКЭ), позволяющий учесть реальную геометрическую форму конструкции, неоднородность изменения механических свойств конструкции.

Использование конечно-элементных моделей, учитывающих особенности динамического взаимодействия тонкостенных конструкций с жидкими и вязкоупругими средами, позволяет повысить надежность проектируемых конструкций, снизить их материалоемкость и повысить качество всего процесса проектирования. Анализ динамического нагружения конструкций является составной частью сложных проектных задач таких как многовариантный анализ, оптимизация и структурный синтез, т.е. его приходится выполнять многократно. Поэтому высокая эффективность используемых методов исследования динамики конструкций есть необходимая предпосылка успешного выполнения многовариантного проектного анализа и оптимизации сложных технических объектов. Анализ наиболее распространенных конечно-элементных программ, используемых при проектировании конструкций, показывает, что в большинстве из них возможность расчета колебаний конструкций с жидкими и вязкоупругими средами либо отсутствуют либо ограничены и не обладают достаточной надежностью и эффективностью, что объективно отражает состояние развития методов исследования в данной области.

Вышеизложенные положения определили общую цель работы: создать эффективные методы исследования динамики конструкций, содержащих жидкие и вязкоупругие среды.

Общая цель достигается решением следующих задач:

- создание эффективного метода решения проблемы собственных значений больших матричных систем, возникающих при конечно-элементной дискретизации конструкций с вязкоупругими и жидкими средами;
- создание эффективного метода исследования динамики конструкций с жидкостью;
- разработка метода исследования динамики конструкций, содержа-

щих вязкоупругие среды;

- разработка комплекса программ, реализующих разработанные методы;
- испытание разработанных методов, алгоритмов и программ с целью определения точности, достоверности и эффективности получаемых решений.

Научную новизну работы составляют:

1. Метод частотной конденсации, позволяющий определять собственные значения в заданном интервале и соответствующие им собственные векторы больших матричных систем, возникающих при решении задач динамики с жидкими и вязкоупругими средами.
2. Метод обобщенных комплексных форм для решения задач динамики конструкций с вязкоупругими средами, основанный на конечно-элементной дискретизации конструкции, описании свойств вязкоупругих сред дифференциальными операторами и решении полученных уравнений движения с помощью разложения по обобщенным комплексным формам конструкции.
3. Схема приближенного учета сжимаемости жидкости, позволяющая снизить трудоемкость решения задач динамики систем "упругая конструкция – сжимаемая жидкость" в области низкочастотных колебаний.

Достоверность результатов обосновывается: строгостью используемого в работе математического аппарата, исследованиями точности разработанных методов и алгоритмов, сопоставлением результатов, полученных автором, с теоретическими и экспериментальными решениями других исследователей, опубликованных в литературе.

Практическая значимость работы. Разработанные методы исследования динамики конструкций реализованы в виде комплекса программ ДИАС, позволяющего решать широкий круг задач по исследованию динамического поведения конструкций, содержащих жидкие и вязкоупругие среды, при различного рода внешних воздействиях. Разработанные методы и алгоритмы использовались:

- при оценке динамической нагруженности твердотопливных и жидкостных ракет в Государственном ракетном центре "КБ им. академика В.П. Макеева",
- для определения динамических характеристик топливных баков ракетносителя "Энергия" в Волжском филиале НПО "Энергия" (г. Самара),
- при проектировании энергонапряженных машиностроительных конструкций в КБ ПО "Полет" (г. Омск), КБ "Арсенал" (Санкт-Петербург) и других предприятиях.

Настоящая работа поддержана грантами Министерства общего и профессионального образования РФ по фундаментальным исследованиям в области транспортных наук (96-10-4.1-15), в области фундаментальных проблем охраны окружающей среды и экологии человека (проект 1-21), в области машиностроения (97-24-12.3-1).

Апробация работы. Основные результаты доложены и обсуждены на Пятом Всесоюзном симпозиуме "Колебания упругих конструкций с жидкостью" (Новосибирск, 13-20 сентября 1982), на межвузовских научно-технических семинарах по проектированию конструкций (МВТУ им. Баумана, 26-29 января 1982 и 24-26 июня 1986), на 7-й Всесоюзной школе-семинаре "Метод конечных элементов в механике деформируемых тел" (Запорожье, 25-28 ноября 1985), на Шестой межотраслевой школе по проблемам проектирования конструкций (Красноярск, 26-28 июля 1985), на Второй Всесоюзной научной конференции "Современные проблемы строительной механики и прочности летательных аппаратов" (Куйбышев, 1-3 июля 1986), на Восьмой Всесоюзной школе-семинаре "Методы конечных и граничных элементов в строительной механике" (Усть-Нарва, 11-15 мая 1987), на Первом Всесоюзном семинаре "Применение полимерных композиционных материалов в машиностроении" (Ворошиловград 19-21 мая 1987), на Третьей Всесоюзной научной конференции "Современные проблемы строительной механики и прочности летательных аппаратов" (Казань, 20-22 сентября 1988), на Восмом отраслевом совещании "Динамическое нагружение конструкций, методы и режимы виброиспытаний" (Пермь, 9-12 августа 1988), на отраслевом научно-техническом семинаре "Система автоматизированного проектирования космических стартовых комплексов" (Москва, февраль 1988), на Девятой Всесоюзной школе-семинаре "Методы конечных и граничных элементов в строительной механике" (Челябинск, сентябрь 1989), на Второй Всесоюзной конференции "Колебания и Диагностика колебаний. Проблемы Стандартизации" (Горький, сентябрь 1989), на 4-м Всесоюзном совещании "Динамика и прочность автомобиля" (Москва, сентябрь 1990), на Третьем Китайско-Российско-Украинском симпозиуме по Аэрокосмическим наукам и технологиям (China, 16-20 September 1994), на Втором Сибирском конгрессе по прикладной и индустриальной математике (Новосибирск, 25-30 июня 1996), на 15 и 16 Российской школе по проблемам проектирования неоднородных конструкций (Миасс, 25-27 июня 1996 и 24-26 июня 1997), а также на семинарах и совещаниях промышленных предприятий.

На защиту выносятся следующие положения:

- метод частотной конденсации как эффективное средство решения проблемы собственных значений больших матричных систем, представляющий как самостоятельный научный интерес, так и имеющий важное значение для решения задач динамики конструкций с жидкими и вязкоупругими средами;

- алгоритм выбора основных и вспомогательных степеней свободы при понижении порядка матриц как эффективную процедуру, позволяющую находить такое преобразование матриц, при котором вектор основных степеней свободы имеет наименьший размер, а собственные значения исходного и редуцированного матричных уравнений совпадают в требуемом интервале с заданной точностью;
- алгоритм сегментирования фронтальных матриц, позволяющий вычислять собственные значения и собственные векторы больших матричных систем в случае, когда объём требуемой рабочей памяти превышает размер оперативной памяти ЭВМ;
- метод обобщенных комплексных форм как эффективный метод решения задач динамики конструкций, содержащих вязкоупругие среды;
- экономичная схема метода обобщенных комплексных форм, позволяющая в ряде случаев снижать трудоемкость решения задач собственных и вынужденных колебаний конструкций с вязкоупругими средами при незначительной потере точности;
- вычислительную схему решения задач динамики конструкций с жидкостью, которая базируется на конечно-элементной дискретизации конструкции по Лагранжу, а жидкости по Эйлеру, преобразовании полученных уравнений к симметричной матричной форме и их решения с помощью метода частотной конденсации;
- эффективный способ решения проблемы, связанной с сингулярностью гидродинамических матриц при вычислении собственных частот и форм систем "упругая конструкция – сжимаемая жидкость";
- схему приближенного учета сжимаемости жидкости как средство, позволяющее снизить трудоемкость исследований низкочастотных колебаний системы "упругая конструкция–жидкость–поверхностные волны" при незначительной потере точности.

Публикации. Основное содержание диссертационной работы опубликовано в 50 статьях и материалах конференций.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка использованных источников, приложения с описанием комплекса программ ДИАС и документами о внедрении результатов работы. Она содержит 268 страниц, 79 рисунка, 40 таблиц и 124 наименований литературных источников, из которых 66 страниц, 1 рисунок и 12 таблиц составляет приложение.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы исследования, определены основная цель и задачи, отмечена научная новизна, практическая

ценность работы, сформулированы положения, выносимые на защиту.

В первой главе проведен обзор работ по задачам данного исследования, исходя из которого дана постановка задачи, во второй главе рассмотрено решение проблемы собственных значений больших матричных систем, возникающих при конечно-элементной дискретизации конструкций с жидкими и вязкоупругими средами. Третья глава посвящена разработке метода исследования динамики конструкций с жидкостью. В четвертой главе рассмотрены методы и модели исследования динамики конструкций с вязкоупругими средами, в пятой главе проведено исследование конкретных конструкций. В приложении дано описание комплекса программ ДИАС, реализующего разработанные методы.

Основные трудности разработки эффективных методов исследования динамики конструкций с жидкими и вязкоупругими средами связаны с решением полученных уравнений. Если для решения матричных уравнений использовать модальный метод, то задача сводится к нахождению собственных значений больших матричных систем. В отличие от упругой задачи матрицы, получаемые при исследовании конструкций с вязкоупругими и жидкими средами, не являются положительно определенными, что предъявляет к надежности метода нахождения собственных значений довольно жесткие требования.

Метод решения проблемы собственных значений больших матричных систем. В настоящее время для решения проблемы собственных значений больших матричных систем используются итерационные методы и методы конденсации. К итерационным относятся методы, позволяющие находить собственные значения и соответствующие собственные векторы с помощью какой-либо итерационной схемы. Наиболее эффективными среди итерационных методов являются метод Ланцоша и метод итераций в подпространстве. Метод итераций в подпространстве использует редуцированное подпространство, приводящее к проблеме собственных значений меньшей размерности. Метод Ланцоша представляет естественный способ реализации процедуры Релея-Ритца для последовательности подпространств Крылова. Однако, в процессе сходимости к точному решению из-за ошибок округления теряется ортогональность собственных векторов, поэтому дополнительно требуется процедура ортогонализации, а её эффективная реализация является достаточно сложной задачей.

Методы, понижающие порядок матриц, или методы конденсации используют предположение о зависимости одних (вспомогательных) степеней свободы от других (основных), что позволяет исключить вспомогательные степени свободы. Наибольшее распространение среди методов понижения порядка матриц получил метод Гайана. Решение вопроса о том, какое количество основных степеней свободы необходимо для обеспечения приемлемой точности при вычислении заданного числа собственных значений, и о том, какие степени свободы требуется оставлять в качестве основных, является ключевым в методах понижения порядка

матриц. Неудачный выбор основных степеней свободы может привести к появлению большой погрешности решения. В методе Гайана такой выбор, как правило, ведётся инженером-исследователем и зависит от его интуиции и опыта.

При выборе метода решения проблемы собственных чисел необходимо учитывать следующие обстоятельства. Метод Ланцоша и метод итераций в подпространстве требуют положительной определённости хотя бы одной из матриц, что, естественно, сужает область применения этих методов в основном до области задач упругих конструкций. Методы конденсации обладают более широкой областью применения, чем итерационные методы, так как не накладывают никаких ограничений на матрицы. Однако на пути развития и применения методов конденсации долгое время существовал некоторый психологический барьер, связанный с тем, что основные и вспомогательные степени свободы выбирались интуитивно, исходя из опыта инженера. Поиск решения этих проблем привел к созданию метода частотной конденсации, который поднимает методы понижения порядка матриц на новый уровень. В отличие от стандартных схем конденсации выбор основных и вспомогательных степеней свободы в методе частотной конденсации ведётся на основе анализа погрешности аппроксимаций, что превращает его в строгую процедуру.

Большинство задач динамического анализа сводятся к обобщенной проблеме собственных значений вида

$$(K - \omega^2 M) \delta_0 = 0, \quad (1)$$

где K , M – матрицы жесткости и масс конструкции, ω^2 , δ_0 – собственные значения и векторы уравнения (1).

Если вектор δ_0 разделить на две составляющие: вектор исключаемых степеней свободы и вектор удерживаемых степеней свободы, то уравнение (1) переписывается в виде

$$\left(\begin{bmatrix} K_{rr} & K_{rs} \\ K_{sr} & K_{ss} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{rr} & M_{rs} \\ M_{sr} & M_{ss} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \delta_r \\ \delta_s \end{Bmatrix} = 0, \quad (2)$$

где индекс r относится к удерживаемым (основным) степеням свободы, а индекс s – к исключаемым (вспомогательным) степеням свободы. Если исключить вектор вспомогательных степеней свободы δ_s из уравнения (2), то получится

$$(K_{rr} - \omega^2 M_{rr} + D_{rr}(\omega^2)) \delta_r = 0, \quad (3)$$

где $D_{rr}(\omega^2) = -(K_{rs} - \omega^2 M_{rs})(K_{ss} - \omega^2 M_{ss})^{-1}(K_{rs} - \omega^2 M_{rs})^T$. Понижение порядка матриц осуществляется путем аппроксимации матрицы $D_{rr}(\omega^2)$ выражением вида

$$A_{rr}(\omega^2) = K_{rr}^* - \omega^2 M_{rr}^*, \quad (4)$$

где матрицы K_{rr}^* , M_{rr}^* определяются из условия наилучшего приближения матриц $D_{rr}(\omega^2)$ и $A_{rr}(\omega^2)$ в области диапазона собственных значений $\omega_1^2 \dots \omega_2^2$ и имеют вид

$$\begin{aligned} K_{rr}^* &= D_{rr}(\omega_1^2) - \omega_1^2 \frac{D_{rr}(\omega_2^2) - D_{rr}(\omega_1^2)}{\omega_2^2 - \omega_1^2}, \\ M_{rr}^* &= -\frac{D_{rr}(\omega_2^2) - D_{rr}(\omega_1^2)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \end{aligned} \quad (5)$$

Матрица погрешности аппроксимации $D_{rr}(\omega^2)$ определяется по формуле

$$E_{rr}(\omega^2) = D_{rr}(\omega^2) - A_{rr}(\omega^2). \quad (6)$$

Редуцированное матричное уравнение имеет вид

$$(K_{rr} + K_{rr}^* - \tilde{\omega}^2 (M_{rr} + M_{rr}^*)) \tilde{\delta}_r = 0, \quad (7)$$

где $\tilde{\omega}^2$ и $\tilde{\delta}_r$ – собственные значения и собственные векторы редуцированного уравнения, которые отличаются от собственных значений и векторов исходного матричного уравнения на величину погрешности. Получена формула для приближенной оценки максимальной погрешности вносимой в собственные значения диапазона $\omega_1^2 \dots \omega_2^2$

$$\Delta\omega^2 < \text{Tr}((M_{rr} + M_{rr}^*)^{-1} E_{rr}(\omega_f^2)), \quad (8)$$

где $\text{Tr}()$ – след матрицы, ω_f^2 – значение ω^2 из диапазона $\omega_1^2 \dots \omega_2^2$, при котором значения коэффициентов матрицы $E_{rr}(\omega^2)$ достигают максимальных значений.

Алгоритм метода частотной конденсации включает в себя пять этапов:

Э т а п 1 (конденсация). Осуществляется понижение порядка матриц уравнения (1). В основе алгоритма понижения порядка матриц лежит фронтальный метод, в котором процесс формирования глобальных матриц совмещается с процессом их сокращения. При использовании фронтального метода требуемая память ЭВМ и время решения задачи не зависят от нумерации узлов, как в ленточных алгоритмах, а только от нумерации элементов. Опыт показывает, что гораздо быстрее и легче найти оптимальный порядок элементов для минимизации ширины фронта, чем оптимальный порядок узлов для минимизации ширины ленты. Кроме того фронтальный метод лучше подходит для конечно-элементного анализа, чем ленточные методы из-за по-элементного способа хранения данных.

Все операции фронтального метода выполняются в рамках заполненных, так называемых фронтальных матриц, которые увеличиваются, когда степень свободы появляется первый раз, и уменьшаются, когда она исключается. Решение о том исключать степень свободы или нет, ведется с помощью критерия ψ

$$\psi = \frac{1}{n \omega_f^2} \sum_i^n \left| \frac{\varepsilon_{ii}(\omega_f) + \varepsilon_{ii}^*(\omega_f)}{m_{ii} + m_{ii}^*} \right|. \quad (9)$$

Если выполняются условия $\psi < \psi_0$, то степень свободы обозначается как вспомогательная и исключается. Заданием допустимого уровня погрешности ψ_0 , накладывается ограничение на величину погрешности, вносимой в определяемые собственные значения и, таким образом, регулируется точность расчета. Фронтальные матрицы жестко фиксируются в оперативной памяти, поэтому предельный размер фронтальных матриц определяется объемом оперативной памяти. Для того чтобы снять ограничение на размер фронтальных матриц предлагается использовать алгоритм сегментирования. При этом каждая фронтальная матрица разбивается на сегменты и только один из её сегментов постоянно находится в оперативной памяти. В разработанном алгоритме сегментирования фронтальных матриц порядок передачи сегментов фронтальных матриц в оперативную память определяется запросами, возникающими при формировании матриц, поиске и исключении вспомогательных переменных. На сегменты разбивается только часть фронтальной матрицы, которая выходит за пределы оперативной памяти. Представлены примеры расчёта конкретных конструкций, демонстрирующие эффективность разработанного алгоритма.

Э т а п 2 (редуцированный базис). Вычисляются собственные значения и матрица собственных векторов редуцированного матричного уравнения (7). Для решения задачи нахождения собственных значений ($\tilde{\omega}_i^2$) и векторов ($\tilde{\delta}_{ri}$) матричного уравнения (7) используется обобщенный метод Якоби.

Э т а п 3 (восстановление). Вычисляется полная матрица собственных векторов $\Delta = [\tilde{\delta}_{01}, \tilde{\delta}_{02}, \dots, \tilde{\delta}_{0l}]$, где l — количество вычисленных собственных векторов. Так как каждый из векторов $\tilde{\delta}_{0i}$ состоит из вектора основных степеней свободы ($\tilde{\delta}_{ri}$) и вектора вспомогательных степеней свободы ($\tilde{\delta}_{si}$), то восстановление векторов $\tilde{\delta}_{0i}$ заключается в определении вектора $\tilde{\delta}_{si}$ по формуле

$$\tilde{\delta}_{si} = -(K_{ss} - \tilde{\omega}_i^2 M_{ss})^{-1} (K_{sr} - \tilde{\omega}_i^2 M_{sr}) \tilde{\delta}_{ri}.$$

Векторы $\tilde{\delta}_{0i}$ не удовлетворяют условиям ортогональности, поэтому дополнительно требуются четвертый и пятый этапы для получения матрицы ортогональных собственных векторов.

Э т а п 4 (приведение матриц). Вычисляются приведённые матрицы жёсткости и масс

$$K_l = \Delta^T K \Delta, \quad M_l = \Delta^T M \Delta.$$

Э т а п 5 (уточнение). Находится решение приведённого матричного уравнения

$$(K_l - \omega^2 M_l) q = 0 \quad (10)$$

и формируется решение уравнения (1), которое включает собственные значения уравнения (10) в интервале $\omega_1 \dots \omega_2$ и соответствующие им собственные векторы, вычисленные по формуле $\delta_{0i} = \Delta q_i$.

Выбор основных и вспомогательных степеней свободы является ключевым звеном алгоритма понижения порядка матриц. Неудачный выбор основных степеней свободы может привести к значительным искажениям собственных значений и даже потере некоторых из них. Разработанный автором способ выбора основных и вспомогательных степеней свободы по критерию ψ сравнивается с наиболее распространенной в настоящее время процедурой выбора основных степеней свободы по парциальной частоте ($\omega_s^2 = k_{ii}/m_{ii}$). При выборе основных степеней свободы по парциальной частоте последняя сравнивается с некоторой заданной частотой (частотой среза). Если парциальная частота выше частоты среза, то степень свободы относится к вспомогательным и исключается. Сравнение двух способов выбора основных и вспомогательных степеней свободы осуществляется путём анализа их точности и эффективности на примерах решения конкретных задач. Проведённые исследования показывают, что точность решения задач при выборе основных степеней свободы по парциальной частоте оказывается низкой, в то время как при использовании разработанного автором способа собственные частоты и собственные векторы вычисляются с достаточно высокой точностью при меньших затратах оперативной памяти и времени ЭВМ.

Одним из важных критериев численных методов является точность получаемых результатов. Для итерационных методов точность решения тесно связана со сходимостью итерационного процесса. Другими словами, итерационный процесс нельзя прервать до тех пор, пока не достигнута сходимость. В методе частотной конденсации точность решения зависит от величины допустимого уровня погрешности ψ_0 . В диссертационной работе показано, как меняется точность решения в зависимости от величины ψ_0 . Для количественной оценки точности вычисления собственных частот и векторов используются относительная погрешность собственных частот ε_ω и относительная погрешность собственных векторов ε_v ,

$$\varepsilon_\omega = \left| \frac{\omega - \omega^{exact}}{\omega^{exact}} \right|, \quad \varepsilon_v = \frac{\|\delta_0 - \delta_0^{exact}\|}{\|\delta_0^{exact}\|}, \quad (11)$$

где ω^{exact} — точное значение собственной частоты, δ_0^{exact} — точное значение собственного вектора.

На примерах расчета конкретных конструкций (консольная балка, каркасная конструкция, переходник, конструкция в виде части цилиндра) демонстрируется точность решений, получаемых методом частотной конденсации. Расчеты всех конструкций проведены с тремя уровнями точности, которые получаются путем задания ограничений ψ_0 : (а) $\psi_0 = 0, 1$, (б) $\psi_0 = 0, 05$, (в) $\psi_0 = 0, 0125$. Наибольшие значения погрешности были получены при вычислении собственных частот и собственных векторов переходника. Они показаны в табл. 1. Анализ точности полученных

Таблица 1

Погрешности собственных частот и векторов (%)

Номер тона	Вариант точности					
	а		б		в	
	ϵ_{ω}	ϵ_v	ϵ_{ω}	ϵ_v	ϵ_{ω}	ϵ_v
1	0,006707	1,121201	0,001479	0,534835	0,000316	0,169469
2	0,006256	0,977638	0,001318	0,518079	0,000626	0,195054
3	0,003303	1,676791	0,001311	0,694302	0,000934	0,502259
4	0,004441	3,153208	0,001736	1,237302	0,001144	0,484181
5	0,001300	1,832250	0,000347	0,655149	0,000158	0,229685
6	0,000030	0,116038	0,000029	0,256782	0,000010	0,092591

решений показывает, что метод частотной конденсации позволяет вычислять частоты и формы собственных колебаний с достаточно высокой точностью. Максимальная погрешность собственных частот, не превышает десятых долей процента. Точность расчета собственных векторов ниже. Она колеблется от 0,4% (уровень точности (в)) до 3,2% (уровень точности (а)). При расчете динамических характеристик конструкций такая точность вычисления собственных частот и собственных векторов вполне достаточна для инженерных расчетов. Повышение точности решений не приводит к потере ортогональности собственных векторов и требует только дополнительных затрат времени и памяти ЭВМ.

Исследовано влияние погрешности вычисления собственных значений и собственных векторов на точность расчета вынужденных колебаний модальным методом. Выполнены расчет установившихся и неустановившихся вынужденных колебаний трёх конструкций (консольная балка, переходник, конструкция в виде части цилиндра) с использованием разложения по собственным векторам, вычисленным с тремя уровнями точности (а), (б) и (в), описанными выше. Анализ точности решений показывает, что максимальная погрешность вычисления амплитуд вынужденных колебаний при разложении решения в ряд по собственным векторам может изменяться от 5% при уровне точности (а) до 0,5% при уровне точности (в). Уровень точности (а) дает решения с наибольшей погрешностью, которая вполне допустима при инженерных расчетах.

Быстродействие является одним из традиционных критериев сравнения методов. Анализ быстродействия осуществляется путем сравнения времени решений конкретных задач. В табл. 2 представлены результаты сравнения времени вычисления собственных частот и форм восьми различных конструкций. Под временем расчета понимается календарное время решения задачи. Все расчеты проведены на ЭВМ PENTIUM (100 MHz). При вычислении собственных частот и форм методом итераций в подпространстве и методом Ланцоша используются пакеты программ ANSYS 5.0 и COSMOSM. В случае решения задачи методом частотной конденсации применяется пакет программ ДИАС. Время вычис-

ления методом частотной конденсации с уровнем точности (а), (б) и (в) представлено в таблице столбцами T_{F1} , T_{F2} , T_{F3} , соответственно. Время вычисления методом итераций в подпространстве и методом Ланцоша показано в таблице столбцами T_S и T_L , соответственно. В таблице для каждой конструкции представлено число степеней свободы конечно-элементной модели, число вычисленных собственных частот и векторов (m), максимальная ширина фронта (n_{fr}^{max}), максимальная ширина ленты (n_{band}^{max}).

Таблица 2

Сравнение быстродействия различных методов

Конструкция	Число степеней свободы	m	n_{fr}^{max}	n_{band}^{max}	T_S	T_L	T_{F1}	T_{F2}	T_{F3}
Балка	2412	10	12	12	65	80	45	52	58
Каркасная конструкция	1416	6	40	42	75	62	36	41	47
Треугольная пластина	846	12	76	84	75	68	45	48	57
Криволинейная панель	1008	4	118	100	75	65	38	40	42
	5808	12	126	126	-	150	162	-	-
Тонкостенная балка	882	13	58	54	70	60	46	53	57
Рычаг	1164	11	88	84	70	80	64	67	70
Часть цилиндра	540	11	79	75	75	65	51	60	75
Переходник	1008	6	118	96	75	-	66	75	-
	4320	3	264	286	-	120	132	-	-

Сравнение результатов показывает, что по быстродействию метод частотной конденсации не уступает наиболее эффективным сегодня методам. Однако необходимо учитывать относительный характер подобных оценок, так как при решении больших матричных систем становится все более затруднительно изолировать метод от операционной среды ЭВМ. Быстродействие метода зависит от удачного сочетания программ формирования и хранения больших матриц, перемещения информации в оперативную память, вычисления результатов, управления процессом ввода-вывода.

Метод исследования динамики конструкций с жидкостью. Конечно-элементные подходы, на основе которых могут быть получены решения задач динамики конструкций с жидкостью, обычно связываются с именами Лагранжа и Эйлера. По Лагранжу поведение жидкости описывается с использованием основных теорем механики сплошной среды, поэтому в каждом узле конечно-элементной модели жидкости задаются три компоненты перемещения. Размерность такой модели получается до-

статочно большой, а ранг матрицы жесткости в несколько раз меньше её порядка, что затрудняет решение полученных уравнений. Описание движения жидкости по Эйлеру позволяет сосредоточить внимание на изучении распределения давления в жидкости. При этом размерность конечно-элементной модели жидкости существенно ниже, поэтому использование метода Эйлера для многих исследователей оказывается более предпочтительным.

Рассматривается решение задачи гидроупругого взаимодействия системы, состоящей из упругой конструкции и жидкости. Для жидкости принимаются следующие допущения: возмущения среды малые, вязкость отсутствует. Используется метод конечных элементов. Жидкость описывается сеткой конечных элементов с давлением в качестве узловых неизвестных, а упругая конструкция – набором конечных элементов с перемещениями в качестве узловых неизвестных. Такая постановка приводит к системе уравнений, которые преобразуются к следующему уравнению с симметричными матрицами:

$$K \delta + C \dot{\delta} + M \ddot{\delta} = F, \quad (12)$$

где

$$M = \begin{bmatrix} M_s & L^T & 0 \\ L & -H & Q \\ 0 & Q & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_s + K^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^{-1} Q \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} C_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta = \begin{Bmatrix} u \\ \gamma \\ p \end{Bmatrix}, \quad F = \begin{Bmatrix} F_s \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Здесь u – вектор узловых перемещений конструкции и нормальных перемещений свободной поверхности жидкости, γ – вектор узловых значений потенциала перемещений жидкости, p – вектор узловых значений давлений жидкости, K_s, C_s, M_s – матрицы жесткости, вязкости и масс конструкции, L – матрица площадей раздела "конструкция – жидкость – свободная поверхность", H, Q – матрицы гидродинамических жесткостей и масс жидкости, K^* – гидродинамическая матрица свободной поверхности жидкости, F_s – вектор внешних сил, действующих на упругую конструкцию, ρ – плотность жидкости. С помощью уравнения (12) описываются колебания системы "упругая конструкция – сжимаемая жидкость – поверхностные волны". Если положить $Q = 0$ и вычеркнуть нулевую строку и столбец, то получим уравнение описывающее колебания системы "упругая конструкция – несжимаемая жидкость – поверхностные волны".

Решение уравнения (12) ищется в виде линейной комбинации собственных векторов, полученных в результате решения задачи собственных значений (1). При этом вектор узловых перемещений определяется по формуле

$$\delta = \sum_i \delta_{0i} \cdot q_i(t),$$

где $q_i(t)$ – коэффициенты пропорциональности при собственных векторах. Значения $q_i(t)$ определяются из решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для определения собственных значений и собственных векторов уравнения (1) используется метод частотной конденсации. Применение метода частотной конденсации к решению задач динамики конструкций с жидкостью имеет ряд особенностей.

1. Предусматривается масштабирование для выравнивания численных значений коэффициентов матриц Q и K_s , что обеспечивает устойчивость процесса понижения порядка матриц. Компоненты вектора γ исключаются по схеме метода Гаусса, а компоненты векторов u и p – по схеме метода частотной конденсации.

2. Конечно-элементное моделирование гидроупругих систем "тонкостенная конструкция – жидкость – свободная поверхность", "тонкостенная конструкция – газ" приводит к сингулярной гидродинамической матрице H . Исключение последней компоненты вектора γ по схеме Гаусса в этих случаях создаёт известную ситуацию "деление на нуль". Для разрешения подобных трудностей обычно используется способ нормализации "нулевого" коэффициента. Суть его заключается в добавлении к "нулю" числа, равного $-\alpha \cdot h_{m+1}$. Здесь h_{m+1} – исходное значение "нулевого коэффициента". Значение параметра α зависит от числа значащих цифр, используемых в вычислениях. Если в вычислениях участвуют 15-16 значащих цифр, то $\alpha = 10^{-6} \dots 10^{-8}$. После такой операции компонента γ_{m+1} исключается по стандартной схеме Гаусса. Такой способ приводит к появлению больших по величине коэффициентов в редуцированной матрице, что существенно усложняет её дальнейшее сокращение. В диссертационной работе разработан более эффективный способ решения этой проблемы: для исключения компоненты γ_{m+1} используется соотношение $\gamma_{m+1} = (\omega^2 \varrho)^{-1} p_{m+1}$. Сопоставление разработанного способа с известным приёмом нормализации "нулевого" коэффициента проведено на примере решения задачи собственных колебаний цилиндрической оболочки с жесткими днищами, заполненной газом. Полученные результаты показывают, что предлагаемый способ позволяет на порядок повысить точность вычисления собственных векторов при более низких затратах памяти ЭВМ и времени расчёта.

Достоверность решения задач собственных колебаний, получаемых разработанным автором методом, демонстрируется на примерах расчёта собственных частот и форм различных оболочек с жидкостью, решения которых известны. В табл. 3 представлены низшие частоты цилиндрической оболочки с плоским упругим днищем, заполненной водой, при различных значениях отношения длины оболочки к её радиусу (H/R), вычисленных с помощью разработанного автором метода (комплекс про-

грамм ДИАС). В первой строке показаны значения низшей собственной частоты, полученной без учета сжимаемости жидкости, а во второй строке – с учетом её сжимаемости. Для сравнения в таблице приведены также результаты, полученные аналитически Шклярчуком Ф.Н. Сопоставление результатов говорит о хорошей точности решений, получаемых разработанным автором методом.

Таблица 3

Собственные частоты цилиндрического оболочки с водой (Гц)

H/R = 1		H/R = 2		H/R = 4	
ДИАС	Теория	ДИАС	Теория	ДИАС	Теория
129,02	129,64	71,04	71,30	36,59	36,77
123,30	123,88	66,70	66,95	34,12	34,29

Известно, что весь спектр частот колебаний упругой конструкции, содержащей жидкость, можно условно разделить на подспектры упругих, волновых и акустических колебаний. В работе Фролова К.В. и Антонова В.Н. упругие колебания определяются как колебания преимущественно упругой конструкции, а волновые – как преимущественно колебания свободной поверхности жидкости. Акустические колебания представляют колебания преимущественно жидкости за счет её сжимаемости. При анализе прочности и надежности конструкции наибольший интерес представляют упругие колебания конструкций с жидкостью. Обычно первые частоты упругих колебаний существенно ниже наименьших частот акустического спектра. Это обстоятельство позволяет построить приближенную схему учета сжимаемости жидкости.

Основная идея схемы приближенного учета сжимаемости жидкости заключается в том, что первоначально определяются собственные частоты и собственные векторы системы "конструкция – несжимаемая жидкость", которые затем корректируются с учетом сжимаемости жидкости. При реализации такой схемы понижение порядка матриц в методе частотной конденсации осуществляется для уравнения, описывающего колебания системы "упругая конструкция – несжимаемая жидкость". Порядок матриц в этом случае намного меньше размерности матриц, описывающих поведение конструкции, содержащей сжимаемую жидкость, поэтому трудоемкость выполнения данного этапа существенно ниже. После восстановления векторов u и γ определяется вектор $p = \rho \tilde{\omega}^2 \gamma$, где $\tilde{\omega}^2$ – квадраты собственных частот редуцированного матричного уравнения. При вычислении приведенных матриц M_i и K_i используются матрицы, описывающие поведение системы "упругая конструкция – сжимаемая жидкость".

Применение схемы приближенного учета сжимаемости жидкости ограничено областью частот колебаний, лежащих ниже наименьшей частоты акустического спектра колебаний, которые обусловлены преимущественно колебаниями жидкости за счет её сжимаемости. В работе пред-

лагается верхнюю границу этой области определять по формуле

$$f_a = \frac{c}{2\pi H_a} \cdot \sqrt{1 + c^2 \rho H_a / Eh}, \quad (13)$$

где E , h – модуль упругости и толщина оболочки, c , ρ – скорость звука и плотность жидкости, H_a – характерный размер объема жидкости. Частота f_a должна быть в 2-3 раза меньше низшей частоты акустического спектра. Эффективность схемы приближенного учета сжимаемости жидкости демонстрируется на примере решения задачи собственных колебаний цилиндрической оболочки с жидкостью. Полученные результаты показывают, что разница в частотах, лежащих ниже f_a , является незначительной, в то время как различие в частотах, лежащих выше f_a , возрастает с увеличением номера тона и через два-три тона разница в них достигает 30% и выше.

Точность схемы приближенного учета сжимаемости демонстрируется на примерах расчета установившихся и не установившихся колебаний двух конструкций: цилиндрической и полусферической оболочках, заполненных жидкостью. Для не установившихся колебаний результаты были представлены в виде ударных спектров, а для установившихся – в виде амплитудно-частотных характеристик ускорений. На рис. 1 показаны ударные спектры ускорений сферической оболочки, а на рис. 2 – амплитудно-частотные характеристики радиального ускорения свободного края цилиндрической оболочки. Результаты получены для случая сжимаемой (сплошная линия) и несжимаемой жидкости (пунктирная линия), а также по схеме приближенного учёта сжимаемости жидкости (штриховая линия).

$S(\omega)$, m/c^2

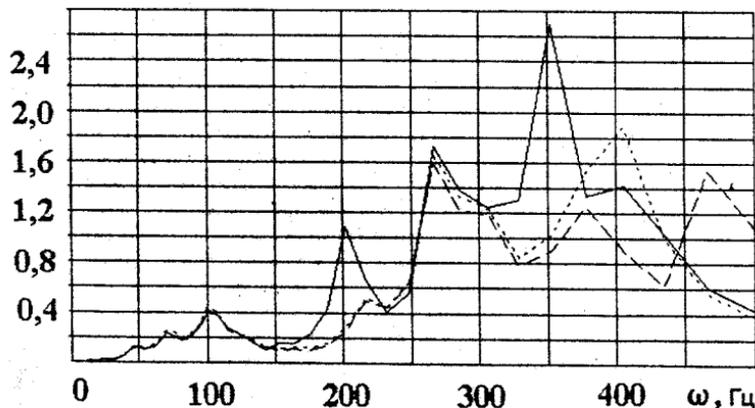


Рис. 1. Ударные спектры ускорения полусферической оболочки

Сравнение результатов показывает, что существует область частот вынужденных колебаний, для которой решения, полученные по схе-

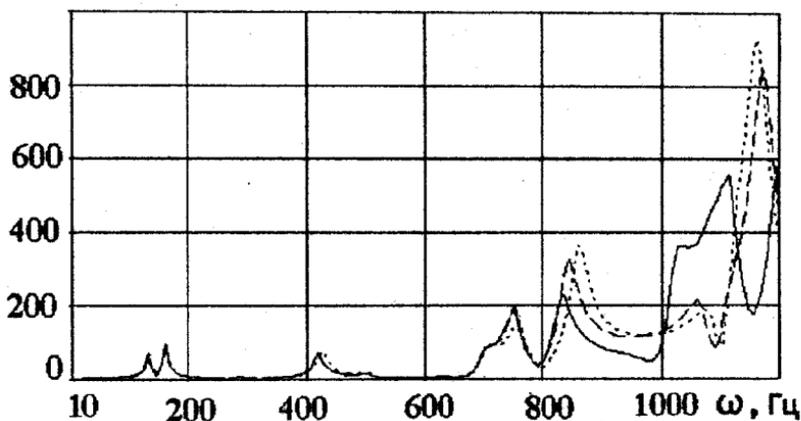
$A(\omega), \text{ м/с}^2$ 

Рис. 2. АЧХ ускорения цилиндрической оболочки

ме приближенного учета, с учётом и без учёта сжимаемости жидкости, практически совпадают. Верхняя граница этой области хорошо определяется частотой f_a . Для рассмотренных оболочек значение частоты f_a равно 104 Гц (полусферическая оболочка) и 389 Гц (цилиндрическая оболочка). Если в качестве "точного" решения принять результаты, полученные с учётом сжимаемости жидкости, то амплитуды вынужденных колебаний, вычисленные без учета сжимаемости жидкости, определяются с погрешностью $\epsilon_A(\omega) = |(S_n(\omega) - S_c(\omega))/S_c(\omega)|$. Здесь $S_n(\omega)$ – амплитуды вынужденных колебаний оболочки с несжимаемой жидкостью, $S_c(\omega)$ – амплитуды вынужденных колебаний оболочки, содержащей сжимаемую жидкость. Подставляя вместо $S_n(\omega)$ амплитуды вынужденных колебаний, вычисленных по схеме приближенного учета сжимаемости жидкости, получим формулу для определения погрешности расчёта по схеме приближенного учета сжимаемости жидкости. На рис. 3 показаны погрешности расчета амплитуд вынужденных колебаний полусферической оболочки, а на рис. 4 – цилиндрической оболочки. Результаты получены для случая несжимаемой жидкости (сплошная линия) и по схеме приближенного учёта сжимаемости (пунктирная линия). Использование схемы приближенного учета сжимаемости позволяет существенно уменьшить погрешности для частот, лежащих ниже частоты f_a .

Метод обобщённых комплексных форм. Изучение работ, посвященных исследованию динамики вязкоупругих конструкций показывает, что существует много различных способов описания вязкоупругих свойств. Среди них можно назвать использование ядер наследственности со слабой особенностью (сингулярностью) в нулевой момент времени, применение непрерывного или дискретного набора экспоненциальных ядер, дифференциальных операторов, прямое использование комплексно-

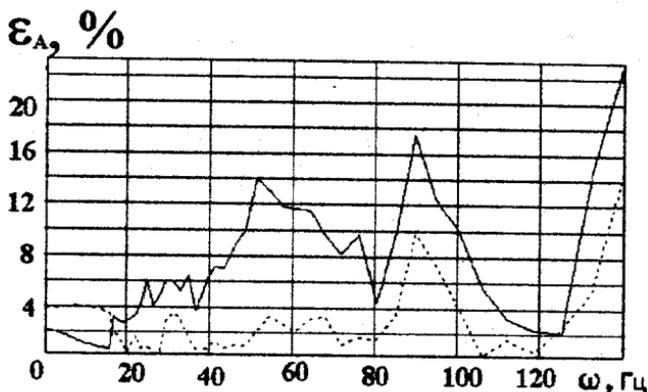


Рис. 3. Погрешности ударных спектров полусферической оболочки

го модуля. На основе этих моделей разработаны различные методы исследования динамики вязкоупругих конструкций: методы комплексных собственных значений, методы прямого вычисления частотных характеристик, методы, использующие собственные формы упругой конструкции. В методах комплексных собственных значений для описания вязкоупругих свойств используется либо простейшая форма дифференциального оператора (модель Фойхта), либо модель Сорокина, а решение сводится к нахождению комплексных собственных чисел и векторов. Использование методов прямого вычисления частотных характеристик связано с естественным желанием учесть реальные свойства вязкоупругих материалов. Эти методы требуют больших вычислительных затрат, поскольку при построении общего решения необходимо, чтобы матрица динамической жесткости пересчитывалась, раскладывалась и запоминалась для каждого интересующего значения частоты. Другая группа методов (метод энергии деформаций, методы интегральных операторов, метод комплексного модуля) используют при решении задачи формы собственных колебаний упругой конструкции. Однако, в случае неоднородной вязкоупругой конструкции формы колебаний упругой конструкции не образуют пространств нормальных векторов и получаемые решения являются приближенными.

Автором разработан метод обобщенных комплексных форм, при использовании которого вся конструкция представляется как единое тело, состоящее из упругих и вязкоупругих конечных элементов. Для вязкоупругих конечных элементов связь между напряжениями и деформациями записывается в форме

$$\sigma = D^* \varepsilon, \quad (14)$$

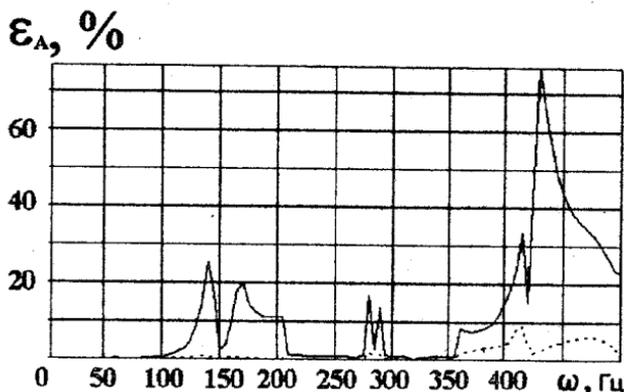


Рис. 4. Погрешности АЧХ ускорения цилиндрической оболочки

где σ, ϵ – векторы напряжений и деформаций, D^* – матрица вязкоупругих операторов. Для изотропного вязкоупругого тела матрица D^* полностью определяется двумя вязкоупругими операторами, а для анизотропных материалов может потребоваться 21 оператор. Пусть для вязкоупругого материала матрица D^* описывается p дифференциальными операторами. В этом случае она может быть представлена в виде

$$D^* = \sum_{j=1}^p H_j^* D_j,$$

где H_j^* – дифференциальные операторы, D_j – матрицы упругих констант. Полный вектор напряжений при этом можно разложить на составляющие:

$$\sigma = \sum_{j=1}^p \sigma_j, \quad (15)$$

каждая из которых связана с полным вектором деформаций соотношением

$$\sigma_j = H_j^* D_j \epsilon.$$

Дифференциальные операторы $1/H_j^*$ представляются в виде суммы элементарных дробей:

$$1/H_j^* = \sum_{i=1}^m \frac{1}{a_{ji} + b_{ji} \frac{d}{dt}}. \quad (16)$$

Такое разложение позволяет представить полную деформацию ϵ в виде суммы элементарных деформаций:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^m \varepsilon_{ji}, \quad (17)$$

каждая из которых связана с напряжением σ_j соотношением вида

$$\varepsilon_{ji} = \frac{1}{a_{ji} + b_{ji} \frac{d}{dt}} D_j^{-1} \sigma_j. \quad (18)$$

Аналогично раскладывается вектор узловых перемещений элемента

$$\delta^e = \sum_{i=1}^m \delta_{ji}^e. \quad (19)$$

Каждая из его составляющих связана с элементарной деформацией соотношением

$$\varepsilon_{ji} = B \delta_{ji}^e, \quad (20)$$

где B – матрица деформаций. Функционал полной энергии с учетом (18), (19), (20) записывается в виде

$$\begin{aligned} \chi = & \delta^{eT} (a_{1i} + b_{1i} \frac{d}{dt}) \int_V B^T D_1 B dV \delta_{1i}^e + \\ & + \delta^{eT} (a_{2k} + b_{2k} \frac{d}{dt}) \int_V B^T D_2 B dV \delta_{2k}^e + \\ & \dots + \delta^{eT} (a_{pr} + b_{pr} \frac{d}{dt}) \int_V B^T D_p B dV \delta_{pr}^e + \\ & + \delta^{eT} \rho \int_V N^T N dV \delta^e - \delta^{eT} \int_V N^T p^e dV, \end{aligned} \quad (21)$$

где $i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, m; \dots r = 1, 2, \dots, m$.

После минимизации функционала по δ^e получим систему связанных матричных уравнений, описывающих колебания вязкоупругого конечного элемента:

$$\begin{aligned} m^e \delta^e + b_{1i} k_1^e \delta_{1i}^e + a_{1i} k_1^e \delta_{1i}^e + \\ + b_{2k} k_2^e \delta_{2k}^e + a_{2k} k_2^e \delta_{2k}^e + \\ + \dots + b_{pr} k_p^e \delta_{pr}^e + a_{pr} k_p^e \delta_{pr}^e = R^e, \end{aligned} \quad (22)$$

$i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, m; \dots r = 1, 2, \dots, m,$

$$\text{где } k_j^e = \int_V B^T D_j B dV, \quad m^e = \rho \int_V N^T N dV.$$

Эти уравнения после преобразования записываются в матричном виде

$$m_s^e \delta_s^e + c_s^e \dot{\delta}_s^e + k_s^e \delta_s^e = R_s^e. \quad (23)$$

Здесь m_s^e, c_s^e, k_s^e – гиперматрицы масс, вязкости и жесткости вязкоупругого конечного элемента, содержащие в качестве подматриц матрицы k_j^e ,

m_s^e ; δ_s^e – гипервектор узловых перемещений вязкоупругого элемента, состоящий из векторов δ^e и δ_{ji}^e ; R_s^e – вектор узловых реакций и внешних сил, действующих на вязкоупругий элемент. Структура и вид матриц вязкоупругого конечного элемента зависят от количества дифференциальных операторов, используемых для описания свойств вязкоупругого материала, и от количества членов ряда, которым представляется каждый дифференциальный оператор. Пусть вязкоупругие свойства описываются двумя дифференциальными операторами H_1^e и H_2^e и пусть $1/H_1^e$ и $1/H_2^e$ представляются двумя членами суммы (16). Тогда матрицы вязкоупругого конечного элемента имеют вид:

$$m_s^e = \begin{bmatrix} m^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$c_s^e = \begin{bmatrix} b_{11} k_1^e + b_{21} k_2^e & -b_{11} k_1^e & -b_{21} k_2^e \\ -b_{11} k_1^e & (b_{11} + b_{12}) k_1^e & 0 \\ -b_{21} k_2^e & 0 & (b_{21} + b_{22}) k_2^e \end{bmatrix}, \quad \delta_s^e = \begin{Bmatrix} \delta^e \\ \delta_{12}^e \\ \delta_{22}^e \end{Bmatrix}, \quad (24)$$

$$k_s^e = \begin{bmatrix} a_{11} k_1^e + a_{21} k_2^e & -a_{11} k_1^e & -a_{21} k_2^e \\ -a_{11} k_1^e & (a_{11} + a_{12}) k_1^e & 0 \\ -a_{21} k_2^e & 0 & (a_{21} + a_{22}) k_2^e \end{bmatrix}, \quad R_s^e = \begin{Bmatrix} R^e \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Формируя из матриц вязкоупругих и упругих конечных элементов глобальные матрицы, в итоге получаем уравнение, описывающее поведение всей конструкции в целом

$$M_s \ddot{\delta}_s + C_s \dot{\delta}_s + K_s \delta_s = F_s. \quad (25)$$

где M_s, C_s, K_s – глобальные матрицы масс, вязкости и жесткости конструкции, δ_s – вектор узловых перемещений конструкции, F_s – вектор внешних сил.

Решение уравнения (25) ищется в виде линейной комбинации собственных векторов, полученных в результате решения задачи о собственных значениях уравнения

$$(p^2 M_s + p C_s + K_s) \delta_{s0} = 0. \quad (26)$$

Это задача о комплексных собственных значениях и векторах. Предлагается эффективный способ нахождения комплексных собственных значений и векторов уравнения (26), который состоит из двух этапов. На первом этапе определяются собственные числа и вектора уравнения (26) без матрицы C_s , т.е. решается уравнение

$$(K_s - \omega^2 M_s) \delta_{s0} = 0. \quad (27)$$

Здесь решается задача действительных собственных значений и векторов, которые находятся методом частотной конденсации. Затем решение уравнения (26) ищется в виде

$$\delta_{s0} = \Delta z, \quad (28)$$

где Δ – матрица собственных векторов уравнения (27), z – комплексные модальные векторы. С помощью соотношения (28) решение (26) сводится к задаче нахождения комплексных собственных чисел и векторов уравнения вида

$$(p^2 \Delta^T M, \Delta + p \Delta^T C, \Delta + \Delta^T K, \Delta) z = 0. \quad (29)$$

На втором этапе определяются собственные значения и векторы уравнения (29). Преимуществом предложенного способа является то, что задача комплексных собственных значений решается для матричного уравнения небольшого порядка. Данный способ даёт хорошую точность вычисления, если матрицы жесткости вязкоупругих элементов моделируют накопление энергии, а матрица вязкости – потери энергии при колебаниях вязкоупругих элементов. Это достигается путем преобразования дифференциального оператора H_j^* к форме, которая в частотной области явно разделяется на действительную и мнимую части. Если $1/H_j^*$ представляется в виде двух членов суммы (16), то, умножая числитель и знаменатель дифференциальный оператор H_j^* на выражение комплексно-сопряженное знаменателю, получаем

$$H_j^* = \frac{x_{j0} + x_{j1} \frac{d}{dt} + x_{j2} \frac{d^2}{dt^2} + x_{j3} \frac{d^3}{dt^3}}{1 + x_{j4} \frac{d^2}{dt^2}}, \quad (30)$$

где

$$x_{j0} = \frac{a_{j1} a_{j2}}{a_{j1} + a_{j2}}, \quad x_{j1} = \frac{a_{j2}^2 b_{j1} + a_{j1}^2 b_{j2}}{a_{j1} + a_{j2}}, \quad x_{j2} = -\frac{a_{j2} b_{j1}^2 + a_{j1} b_{j2}^2}{a_{j1} + a_{j2}},$$

$$x_{j3} = -\frac{b_{j1} b_{j2} (b_{j1} + b_{j2})}{a_{j1} + a_{j2}}, \quad x_{j4} = -\frac{(b_{j1} + b_{j2})^2}{(a_{j1} + a_{j2})^2}.$$

При приведении дифференциального оператора к форме (30) матрицы вязкоупругого конечного элемента преобразуются

$$m_s^e = \begin{bmatrix} m^e + \sum_{j=1}^2 d_{j1} k_j^e & d_2 k_1^e & d_3 k_2^e \\ d_2 k_1^e & d_4 k_1^e & 0 \\ d_3 k_2^e & 0 & d_5 k_2^e \end{bmatrix}, \quad c_s^e = \begin{bmatrix} r_1 k_1^e + r_2 k_2^e & 0 & 0 \\ r_3 k_1^e & 0 & 0 \\ r_4 k_2^e & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$k_s^e = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^2 a_{j2} k_j^e & a_{12} k_1^e & a_{22} k_2^e \\ a_{12} k_1^e & (a_{11} + a_{12}) k_1^e & 0 \\ a_{22} k_2^e & 0 & (a_{21} + a_{22}) k_2^e \end{bmatrix}, \quad \delta_s^e = \begin{bmatrix} \delta^e \\ \delta_{p1}^e \\ \delta_{p2}^e \end{bmatrix}, \quad R_s^e = \begin{bmatrix} R^e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где

$$d_{j1} = -\frac{b_{j2}^2}{a_{j1} + a_{j2}}, \quad d_2 = -\frac{b_{12}(b_{11} + b_{12})}{a_{11} + a_{12}}, \quad d_3 = -\frac{b_{22}(b_{21} + b_{22})}{a_{21} + a_{22}},$$

$$d_4 = -\frac{(b_{11} + b_{12})^2}{a_{11} + a_{12}}, \quad d_5 = -\frac{(b_{21} + b_{22})^2}{a_{21} + a_{22}}, \quad r_1 = \frac{a_{11} b_{12}}{a_{11} + a_{12}},$$

$$r_2 = \frac{a_{21} b_{22}}{a_{21} + a_{22}}, \quad r_3 = -\frac{b_{11} a_{12} - b_{12} a_{11}}{a_{11} + a_{12}}, \quad r_4 = -\frac{b_{21} a_{22} - b_{22} a_{21}}{a_{21} + a_{22}},$$

$$\delta_{p1}^e = \delta_{12}^e - \delta^e, \quad \delta_{p2}^e = \delta_{22}^e - \delta^e.$$

При этом матрица C_s уравнения (26) становится несимметричной и для каждого собственного значения уравнения (26) необходимо определить один правый и один левый собственный вектор. Коэффициенты дифференциального оператора выбираются из условия наилучшего совпадения в заданной частотной области комплексных характеристик вязкоупругого материала и дифференциального оператора. Дифференциальный оператор вида (30) имеет пять параметров, которые можно считать независимыми при аппроксимации вязкоупругих свойств. Поэтому число коэффициентов дифференциального оператора увеличивается путем добавления двух коэффициентов a_{j3} и b_{j3} , которые используются вместо a_{j2} , b_{j2} при вычислении коэффициентов дифференциального оператора x_{j1} , x_{j3} и коэффициентов матрицы вязкости r_1 , r_2 , r_3 , r_4 . Показано, что такой оператор позволяет аппроксимировать вязкоупругие свойства с точностью 5% для действительной и 10% для мнимой части комплексного модуля. На рис. 5 показаны вязкоупругие свойства нитрилового каучука (сплошная линия) и их аппроксимация дифференциальным оператором (30) (штриховая линия).

При расчете вынужденных колебаний вектор узловых перемещений определяется по формуле

$$\delta_s = \sum_i \delta_{s0i}^{rg} q_i(t). \quad (32)$$

Здесь δ_{s0i}^{rg} — правый собственный вектор, $q_i(t)$ — коэффициенты пропорциональности, которые определяются из решения уравнения

$$\dot{q}_i - p_i q_i = (\delta_{s0i}^{lj})^T F_s,$$

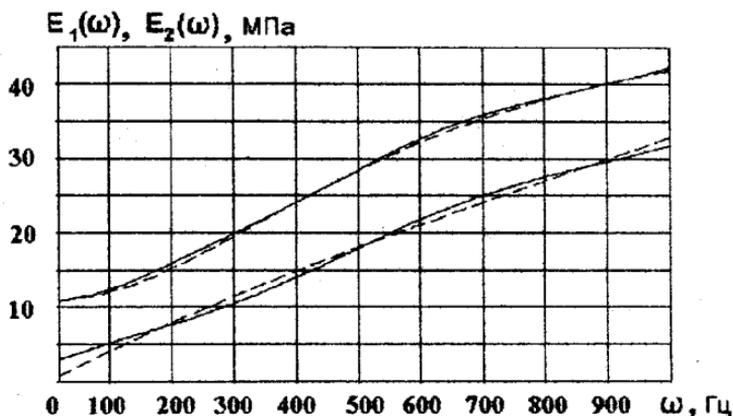


Рис. 5. Вязкоупругие свойства нитрилового каучука

где δ_{s0i}^{rg} , δ_{s0i}^{lf} – правый и левый собственные векторы, соответственно. По аналогичным формулам можно определить векторы узловых скоростей и ускорений.

Для снижения трудоёмкости расчетов была разработана экономичная схема метода обобщённых комплексных форм, базирующаяся на более простой схеме вычисления. При использовании экономичной схемы матрицы жесткости и масс вязкоупругих конечных элементов определяются в предположении, что действительная часть комплексного модуля изменяется в частотной области по квадратичному закону $H_{j1}(\omega) = H_{ja} + \omega^2 H_{jb}$. Коэффициенты H_{ja} и H_{jb} выбираются из условия наибольшего приближения функции $H_{j1}(\omega)$ к действительной части комплексного модуля дифференциального оператора в заданном диапазоне частот. Порядок матриц уравнения (27) существенно уменьшается и соответствует размерности упругой задачи. После вычисления собственных векторов редуцированного матричного уравнения с помощью обратной подстановки восстанавливаются векторы δ_{0i} , зная которые можно вычислить векторы δ_{pj0i} . При вычислении приведенных матриц вязкоупругие свойства описываются дифференциальными операторами (30).

Результаты исследования точности и быстродействия экономичной схемы метода обобщённых комплексных форм для различных вязкоупругих конструкций показывают, что её использование позволяет снизить время вычислений декрементов, собственных частот и комплексных собственных векторов в 2 ... 3 раза при незначительной потере точности в большинстве случаев.

На примерах решения задач динамики однородных и неоднородных вязкоупругих конструкций проведено сравнение метода обобщённых комплексных форм с двумя другими методами: методом комплексного модуля и методом энергии деформаций. Первый из них использует для опи-

сания вязкоупругих свойств комплексный модуль упругости, а для решения полученных уравнений разложение в ряд по формам собственных колебаний упругой конструкции. Для однородных вязкоупругих конструкций метод комплексного модуля позволяет наиболее точно учитывать вязкоупругие свойства, в то время как метод энергии деформаций позволяет это сделать лишь приближенно. На примерах решения задач установившихся колебаний однородных вязкоупругих демонстрируется достоверность получаемых решений путем сравнения результатов, вычисленных методом обобщённых комплексных форм и методом комплексного модуля. На рис. 6 показана конечно-элементная модель полой сферы, нагруженной внутренним давлением, и её вязкоупругие свойства. Сплошной линией показан комплексный модуль вязкоупругого материала, а штриховой линией – комплексный модуль дифференциального оператора, аппроксимирующего вязкоупругие свойства в диапазоне $0 \text{ Гц} \dots 200 \text{ Гц}$.

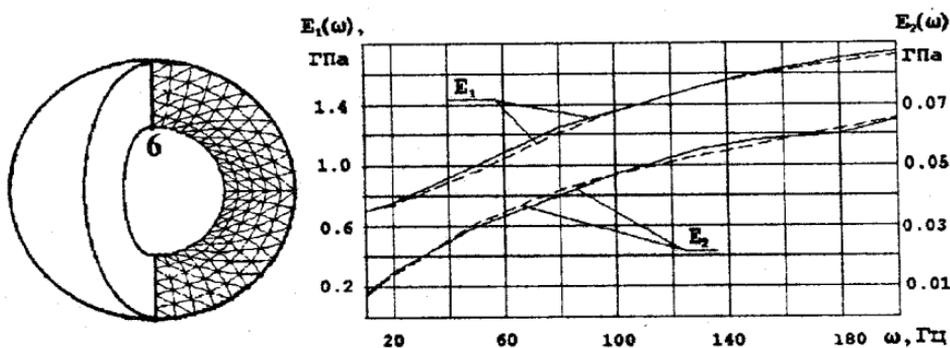


Рис. 6. Модель вязкоупругой сферы и вязкоупругие свойства материала

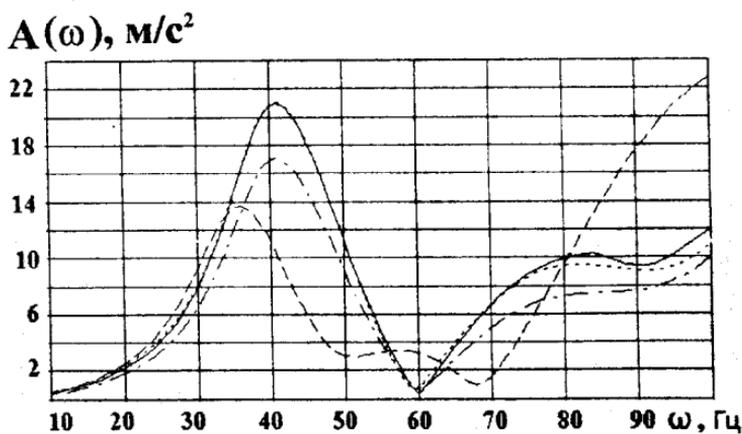


Рис. 7. АЧХ ускорения 6-го узла

На рис. 7 представлены АЧХ, полученные с помощью метода комплексного модуля (пунктирная линия) и метода обобщенных комплексных форм (сплошная линия). При вычислении АЧХ методом комплексного модуля вязкоупругие свойства сферы описываются комплексным модулем, совпадающим с комплексным модулем дифференциального оператора, который используется при расчете АЧХ методом обобщенных комплексных форм. Сравнение АЧХ показывает их прекрасное совпадение (линии на рисунке практически сливаются). Как показывают исследования проведенные автором, для однородных вязкоупругих конструкций расхождение в решениях, найденных методом комплексного модуля и методом обобщенных комплексных форм, не превышает десятих долей процента, что говорит о достоверности решений, получаемых методом обобщенных комплексных форм. На рис. 7 показаны также АЧХ, вычисленные методом энергии деформаций с корректировкой (штрих-пунктирная линия) и без корректировки (штриховая линия) собственных частот. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), вычисленная методом энергии деформаций без корректировки собственных частот, достаточно сильно отличается от решения, полученного методом комплексного модуля и методом обобщенных комплексных форм. Это связано с тем, что этот метод не учитывает изменение по частоте действительной части комплексного модуля вязкоупругого материала. Для однородной вязкоупругой конструкции не представляет труда провести корректировку собственных частот по изменению модуля накопления в частотной области. Как видно из рисунка, АЧХ, вычисленные с помощью метода энергии деформаций с корректировкой собственных частот, отличаются от резонансных кривых, определенных методом комплексного модуля и методом обобщенных комплексных форм, на величину 20% ... 25%.

На рис. 9 показаны результаты исследования неоднородной вязкоупругой конструкции, состоящей из металлической оболочки и вязкоупругого ребра (рис. 7).

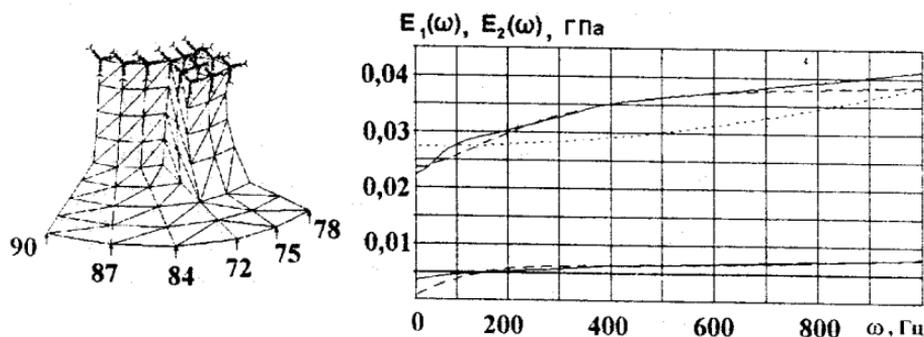


Рис. 8. Модель оболочечной конструкции и вязкоупругие свойства ребра

$A(\omega), \text{ м/с}^2$

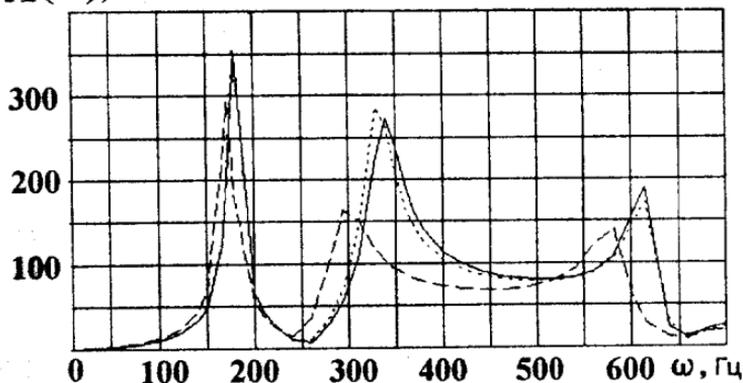


Рис. 9. Сравнение АЧХ ускорения (72-й узел)

Конструкция нагружается гармонически изменяющимися сосредоточенными силами, приложенными к переднему краю оболочки. Вязкоупругие характеристики ребра показаны на рис. 8 сплошной линией, а их аппроксимация дифференциальным оператором (30) – штриховой линией. На этом же рисунке изображена квадратичная аппроксимация действительной части комплексного модуля (пунктирная линия), используемая в экономичной схеме метода обобщенных комплексных форм. Амплитудно-частотные характеристики, полученные с помощью метода обобщенных комплексных форм, показаны на рис. 9 (сплошная линия). На этом же рисунке для сравнения представлены результаты, вычисленные экономичной схемой метода обобщенных комплексных форм (пунктирная линия) и методом энергии деформаций (штриховая линия). Применение экономичной схемы позволяет снизить трудоемкость расчета в 2 ... 3 раза при незначительной потере точности. Метод энергии деформации определяет решение с существенными погрешностями.

Исследуется влияние на амплитуды вынужденных колебаний вязкоупругих свойств, которые описываются двумя функциями: комплексным модулем упругости и комплексным коэффициентом Пуассона. Для достоверного описания комплексного коэффициента Пуассона как функции от частоты колебаний в настоящее время нет достаточного количества данных. Поэтому, в работе рассмотрено три возможных случая вязкоупругих свойств: а) малое, б) среднее и в) сильное изменение действительной части коэффициента Пуассона в частотной области при одном и том же комплексном модуле. Действительная часть коэффициента Пуассона монотонно уменьшается в диапазоне 0 Гц ... 1000 Гц в случае (а) от 0,496 до 0,491, в случае (б) – от 0,496 до 0,417, а в случае (в) – от 0,496 до 0,39. Мнимая часть коэффициента Пуассона во всех случаях полагается пренебрежимо малой. На рис. 10 представлены амплитудно-частотные

$A(\omega), \text{м/с}^2$

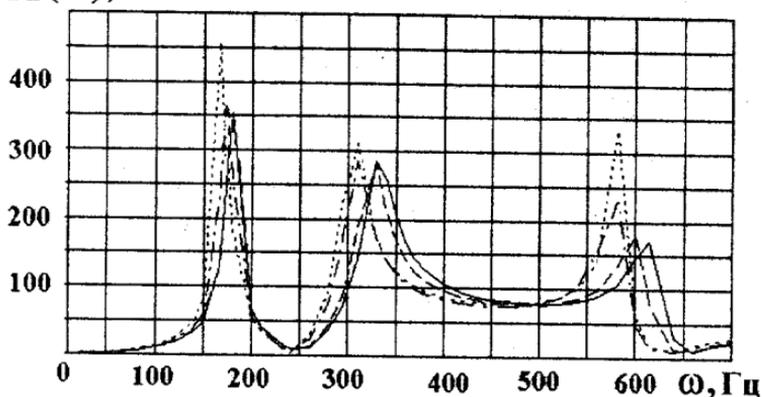


Рис. 10. АЧХ ускорений для трех вариантов вязкоупругих свойств

характеристики ускорений 72 узла, полученные для трех случаев вязкоупругих свойств: случай (а) (штриховая линия), случай (б) (штрихпунктирная линия) и случай (в) (пунктирная линия). На этом же рисунке для сравнения показана амплитудно-частотная характеристика, вычисленная при постоянном коэффициенте Пуассона (сплошная линия). Сравнение решений показывает, что для случая малого изменения коэффициента Пуассона результаты достаточно хорошо согласуются с резонансной кривой, полученной для постоянного коэффициента Пуассона. Влияние на амплитуды вынужденных колебаний вязкоупругих свойств, связанных с изменением коэффициента Пуассона в частотной области, увеличивается с ростом частоты и в области высоких частот может оказаться весьма существенным.

Возможности разработанных методов демонстрируются на примерах расчета аэрокосмических конструкций, создание которых невозможно без проведения достоверного теоретического анализа динамического поведения конструкции в полёте. Достоверность полученных результатов зависит от точности математической модели как конструкции в целом так и её отдельных подконструкций, таких как твердотопливные двигатели, топливные баки жидкостных ракет. В работе проведено сопоставление результатов, полученных разработанным автором методами, и экспериментальных данных для топливных баков различной формы и РДТТ.

Выполнены расчеты частот собственных колебаний полусферического бака, цилиндрического отсека и бака с эллиптическим днищем, заполненных жидкостью. Все перечисленные конструкции были экспериментально исследованы и результаты эксперимента известны из литературы. Сравнение частот собственных колебаний, полученных с помощью вычислительных схем, разработанных автором, и найденных экспериментально показывают их хорошее совпадение. На рис. 11 сплошными

линиями показано изменение двух низших собственных частот цилиндрического отсека от уровня его заполнения (H – высота столба жидкости, L – длина цилиндрической обечайки отсека). На этом же рисунке треугольными маркерами изображены результаты эксперимента. Сравнение показывает, что наибольшее расхождение между величинами собственных частот, полученными экспериментально и расчетным путем, лежит в пределах 10%.

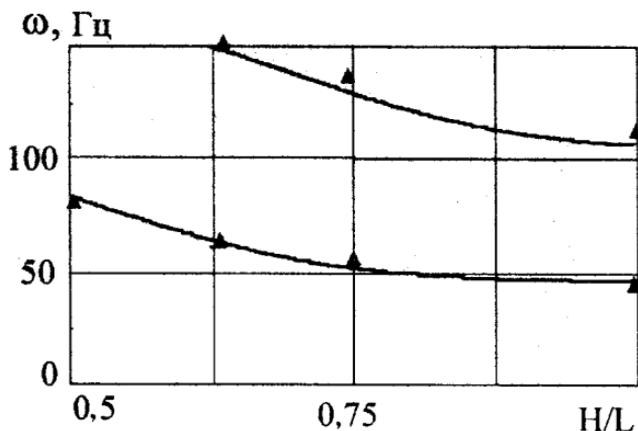


Рис. 11. Собственные частоты цилиндрического отсека в зависимости от уровня его заполнения

Проведен расчет установившихся колебаний РДТТ. В эксперименте возбуждение колебаний осуществляется электродинамическим стендом. РДТТ крепится к подвижной платформе стенда (3) за технологическое кольцо через переходник и датчик силы (2). Амплитудно-частотные характеристики измерялись в диапазоне $0 \text{ Гц} \dots 200 \text{ Гц}$. Испытания проведены для двух режимов нагружения: кинематического и силового. В первом случае контролировалось ускорение в районе нижнего шпангоута РДТТ. Во-втором случае контролировалась сила по датчику силы (2). Топливо представляется как изотропное, вязкоупругие свойства которого описываются одной функцией, соответствующей модулю упругости. На рис. 12 показаны АЧХ ускорений топливного заряда (сплошные линии) при кинематическом нагружении. На этом же рисунке представлены экспериментальные кривые (штриховые линии). Сравнение результатов показывает хорошее совпадение теоретических и экспериментальных решений.

На примерах расчета установившихся и неустановившихся колебаний РДТТ проведено сопоставление результатов, полученных методом обобщенных комплексных форм, методом комплексного модуля и методом энергии деформаций. Показано, что если конструкция является од-

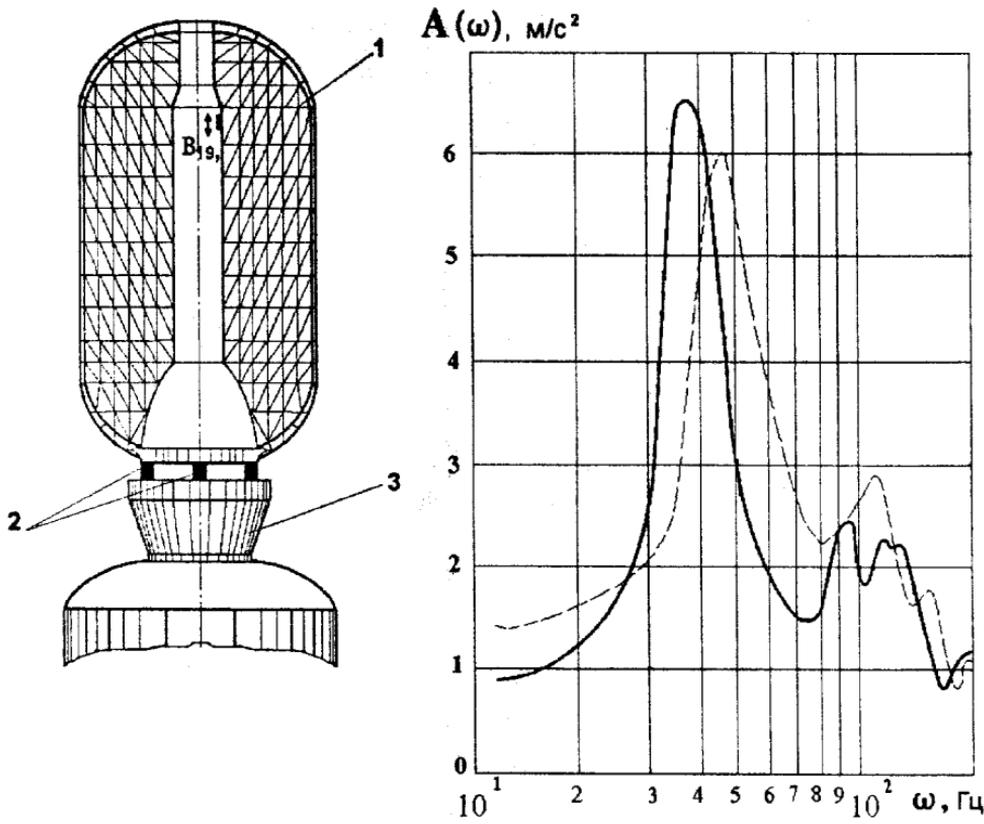


Рис. 12. Схема испытания и АЧХ ускорения при кинематическом нагружении

нородной и вязкоупругой, то результаты, вычисленные методом обобщенных комплексных форм и методом комплексного модуля, совпадают. Метод энергии деформации не учитывает изменение действительной части комплексного модуля вязкоупругого материала, поэтому амплитуды вынужденных колебаний РДТТ, найденные с его помощью, существенно отличаются от результатов, полученных методом обобщенных комплексных форм. Исследовано влияние на амплитуды вынужденных колебаний вязкоупругих свойств, которые описываются двумя функциями: комплексным модулем упругости и комплексным коэффициентом Пуассона. Рассмотрено три возможных случая изменения действительной части коэффициента Пуассона в частотной области (малое, среднее и сильное) при одном и том же комплексном модуле. Показано, что влияние на амплитуды вынужденных колебаний вязкоупругих свойств, связанных с изменением коэффициента Пуассона в частотной области, зависит от величины

изменения коэффициента Пуассона. Но даже при малом изменении в области высоких частот заметно отличие результатов расчета от амплитуд колебаний, полученных при постоянном коэффициенте Пуассона.

Проведено исследование колебаний конструкции с демпфирующим покрытием, которая представляет закрепленную на жестком основании алюминиевую оболочку. Подобная задача возникает, например, при исследовании динамики удлинителя выхлопной трубы двигателя вертолета, увеличение срока службы которой является важной задачей. Наиболее подходящим способом увеличения долговечности такой конструкции является уменьшение амплитуд резонансных колебаний за счет использования демпфирующих покрытий. В качестве демпфирующего используется многослойное покрытие с подкрепляющими слоями. Для исследования колебаний использовался метод обобщенных комплексных форм. Полученные результаты сравнивались с решением, найденным методом энергии деформаций, который традиционно используется для исследования колебаний многослойных демпфирующих покрытий. Сопоставление результатов показывает, что они хорошо совпадают в случае применения "мягких" демпфирующих материалов. Однако при использовании "жестких" демпфирующих материалов расхождение в амплитудно-частотных характеристиках может достигать 20%. Это связано с тем, что метод энергии деформации не учитывает изменение модуля накопления демпфирующего материала в частотной области.

Основные выводы

В работе решена крупная научная проблема, возникающая при создании образцов новой техники в аэрокосмической, авиационной, транспортной, нефтегазодобывающей промышленности, – создание высокоэффективных методов исследования динамического поведения конструкций, содержащих жидкие и вязкоупругие среды.

1. Разработан новый метод – метод частотной конденсации – для решения проблемы собственных значений больших матричных систем. Метод использует понижение порядка матриц и в отличие от известного метода статической конденсации определяет собственные значения в заданном интервале, а выбор основных и вспомогательных степеней свободы осуществляет на основе анализа матрицы погрешности аппроксимации. Показано, что метод частотной конденсации позволяет находить решения с точностью достаточной для научных и инженерных расчетов. По быстродействию разработанный метод не уступает наиболее эффективным сегодня итерационным методам, но в отличие от них не накладывает ограничений на матрицы, что позволяет использовать его для решения матричных уравнений, возникающих при конечно-элементной дискретизации конструкций с жидкими и вязкоупругими средами.

2. Создан новый метод – метод обобщенных комплексных форм – для решения задач динамики конструкций с вязкоупругими средами, бази-

рующийся на конечно-элементной дискретизации конструкций, описании вязкоупругих свойств дифференциальными операторами, представлении деформации вязкоупругих конечных элементов виде суммы элементарных составляющих, движение которых описывается системой дифференциальных матричных уравнений. Решение полученного уравнения движения вязкоупругой конструкции ищется с помощью разложения в ряд по комплексным собственным формам. Преимущество разработанного метода заключается в том, что он позволяет достаточно простым способом построить и решить матричные уравнения движения конструкции, деформируемые элементы которой обладают различными вязкоупругими свойствами.

3. Разработана экономичная схема метода обобщенных комплексных векторов, позволяющая существенно снизить трудоёмкость расчета собственных и вынужденных колебаний конструкций с вязкоупругими средами при некоторой потере точности. На примерах расчёта конкретных конструкций показано, что во многих случаях эта потеря точности является незначительной.

4. Получена эффективная и надежная схема метода исследования динамики конструкций с жидкостью, который использует конечно-элементное моделирование жидкости по Эйлеру, а упругой конструкции – по Лагранжу и симметричную форму матричных уравнений движения. Эффективность и надежность полученной схемы обусловлены тем, что для вычисления собственных значений и векторов используется метод частотной конденсации, который позволяет наиболее просто учитывать особенности матричных уравнений, описывающих колебания упругой конструкции с жидкими средами.

4. Разработана схема приближенного учёта сжимаемости жидкости для исследования собственных и вынужденных колебаний конструкций, содержащих сжимаемую жидкость. Показано, что с помощью этой схемы можно довольно точно определять собственные частоты, лежащие ниже акустического спектра частот, при существенном снижении трудоёмкости расчётов. Предложена простая формула для вычисления акустической частоты, определяющей верхнюю границу области применения схемы приближенного учёта сжимаемости жидкости. Исследование точности решения задач вынужденных колебаний показали, что разработанная схема позволяет достаточно точно определять амплитуды вынужденных колебаний, если их частоты лежат ниже акустической частоты.

5. Разработано программное обеспечение, реализующее разработанные методы в программном комплексе ДИАС. По своим функциональным возможностям данный комплекс не уступает, а по некоторым из них превосходит зарубежные аналоги. Программный комплекс использовался в ГРЦ им. академика Макеева В.П. (г. Миасс) при создании морских баллистических ракет, в ВФ НПО "Энергия" (г. Самара) при проектировании топливных баков ракето-носителя "Энергия", в КБ ПО "Полет" (г. Омск), КБ "Арсенал" (Санкт-Петербург) и других предприятиях при

13. *Мокеев В.В.* О задаче нахождения собственных значений и векторов больших матричных систем // Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики. – 1992. – 32. – N 10. – С. 1652-1657.
14. *Мокеев В.В., Павлюк Ю.С.* Эффективная процедура решения задач о собственных значениях при исследованиях взаимодействия конструкция - жидкость на основе конечноэлементных моделей // Механика твёрдого тела. – 1992. – N 4. – С. 178-182.
15. *Гриненко Н.И., Мокеев В.В.* Анализ динамики неоднородных вязкоупругих конструкций методом конечных элементов // Механика композиционных материалов. – 1989. – N 3. – С. 475-481.
16. *Гриненко Н.И., Мокеев В.В.* Анализ вынужденных колебаний неоднородных вязкоупругих конструкций методом конечных элементов // Вопросы прочности и долговечности элементов конструкций летательных аппаратов. Куйбышев: КуАИ, 1988. – С. 50-56.
17. *Гриненко Н.И., Мокеев В.В.* О задачах исследований колебаний конструкций методом конечных элементов // Прикладная механика. – 1985. – Т. 21. – N 3. – С. 25-30.
18. *Гриненко Н.И., Мокеев В.В.* Использование частотодинамической конденсации при исследовании колебаний сложных конструкций методом конечных элементов // Колебания упругих конструкций с жидкостью: Сб. науч. докладов 5 симпозиума. – М., ЦНТИ "Волна", 1984. – С. 100-102.
19. *Мокеев В.В.* Исследование установившихся колебаний неоднородных вязкоупругих конструкций с помощью метода конечных элементов // Вопросы динамики и прочности механических систем: Тематич. сб. науч. тр. – Челябинск: ЧПИ, 1984. – С. 13-24.
20. *Мокеев В.В.* Применение теории нормальных форм для анализа вынужденных колебаний неоднородных вязкоупругих конструкций // Динамика машин и рабочих процессов: Тематич. сб. науч. тр. – Челябинск: ЧПИ, 1983. – С. 87-92.
21. *Мокеев В.В.* О решении задач динамики вязкоупругих тел с использованием метода конечных элементов // Динамика и прочность конструкций: Тематич. сб. науч. тр. – Челябинск: ЧПИ, 1982. – С. 47-52.

Мокеев Владимир Викторович

**ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОЛЕБАНИЙ
ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ЖИДКИЕ
И ВЯЗКОУПРУГИЕ СРЕДЫ**

Специальность 01.02.06 – "Динамика, прочность машин,
приборов и аппаратуры"

Автореферат
диссертаций на соискание ученой степени
доктора технических наук

Издательство Южно-Уральского государственного
университета

ЛР N 020364 от 10.04.97 Подписано в печать 05.04.99. Формат
60*84 1/16. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,09. Уч.-изд. л. 2.
Тираж 100 экз. Заказ 86/135.

УОП Издательства. 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.