Р е з н и к Владимир Хананович

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Специальность 05.13.18 -
"Теоретические основы математического моделирования,
численные методы и комплексы программ"

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Челябинск 1997

Работа выполнена в Челябинском государственном техническом университете.

Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор В.П.ТАНАНА.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор А.С.Барашков;

доктор физико-математических наук, профессор М.М.Кипнис.

Ведущая организация - Институт геофизики УрО РАН.

Защита состоится II июня 1997 г., в II часов, на заседании диссертационного совета Д 064.19.03 по присуждению ученой степени доктора физико-математических наук в Челябинском государственном университете по адресу: 454136, г.Челябинск, ул. Бр.Кашириных, 129.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Челябинского государственного университета.

Автореферат разослан "___"_____ 199_ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
профессор Г.А.СВИРИДЮК

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Задача параметрической идентификации при математическом моделировании распределенных физических процессов заключается, как известно, в установлении некоторых параметров среды, в которой протекает моделируемый процесс, а также некоторых параметров самого моделируемого процесса. Процесс нахождения этих параметров связан с решением соответствующей обратной задачи.

Как известно, задача параметрической идентификации решается на основе экспериментальных данных, при этом измерения могут осуществляться в течении одного эксперимента, тогда обратная задача сводится, как правило, к задаче решения операторного уравнения первого рода. Если же необходимо осуществить серию экспериментов, то задача идентификации среды становится обратной задачей типа томографии (первоначально обратной задачей томографии именовали конкретную обратную задачу, а не класс задач) и этот класс обратных задач сводится непосредственно к задаче решения соответствующего семейства операторных уравнений I рода.

Если параметрическая идентификация осуществляется в серии экспериментов, то возможны два направления исследования: или развивать методы, ориентированные непосредственно на решение семейств операторных уравнений первого рода, или, учитывая, что теория приближенного решения одного операторного уравнения первого рода достаточно разработана, на этапе структурной идентификации делать необходимые упрощения, позволяющие свести соответствующую обратную задачу типа томографии к задаче решения одного операторного уравнения, следуя работам Ю.Е.Аниконова, А.Л.Бухгейма, В.Г.Романова, R.K.Muller, M.Kaveh.

Автор диссертации, следуя работам Гласко В.Б., Гущина Г.В., Старостенко В.И., Васина В.В., Нетерера Ф., Youla D.C. и др., выбрал первый путь. При этом удалось обнаружить, что обратная задача типа томографии может быть сведена в общем случае к семейству операторных уравнений первого рода специального вида.

Актуальность темы определяется тем, что успех решения задачи параметрической идентификации, осуществляемой в серии экспериментов, определяется степенью разработанности методов решения соответствующих семейств операторных уравнений.

Цель диссертации состоит в разработке методов приближенного решения семейств операторных уравнений I-го рода.

Методика исследования. В основу исследования положены: методы функционального анализа, методы теории некорректных задач.

Научная новизна. В диссертации задача параметрической идентификации, осуществляемая в серии экспериментов, интерпретируется как задача решения семейства операторных уравнений I-го рода специального вида.

Для семейств операторных уравнений общего вида найдена новая схема метода последовательных проекций для решения задачи о поиске элемента, принадлежащего пересечению счетного числа замкнутых выпуклых множеств.

На основе новой схемы метода последовательных проекций предложен метод нахождения слабого решения счетной системы линейных операторных уравнений I-го рода.

Показано, что задача идентификации среды, осуществляемой в серии экспериментов с варьируемым положением источника и пробника, может быть интерпретирована как задача решения семейства операторных уравнений специального вида.

Предложен новый метод - метод последователных проекций на образ для решения задачи о нахождении элемента, принадлежащего пересечению конечного числа множеств, заданных специальным образом.

На основе метода последовательных проекций на образ предложен метод нахождения решения для системы операторных уравнений I-го рода специального вида.

Практическая и теоретическая ценность. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории некорректно поставленных задач, а также при разработке численных методов решения задачи идентификации среды, осуществляемой в серии экспериментов с варьируемым положением источника и пробника.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на:

- Всесоюзной конференции по асимптотическим методам теории сингулярно-возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач, Бишкек, 1991;
- XVI Всесоюзной школе по теории операторов в функциональных пространствах, Н.Новгород, 1991;

- Всероссийской научной конфереренции "Алгоритмический и численный анализ некорректных задач", Екатеринбург: УрГУ, 1995;
- GAMM-SIAM Conference on "Inverse Problems in Diffusion Processes", St.Wolfgang, Austria, 1994;
- The third International Congress on indastrial and Applied Mathematics, Hamburg, 1995;
- SPIE Conference "Mathematical Methods in Geophysical Imaging III", San Diego,CA, 1995.

Результаты диссертации докладывались на семинаре лаборатории приближенных методов решения обратных задач института математики СО РАН (рук. проф. Бухгейм А.Л.), на семинаре по некорректным задачам Института математики и механики УрО РАН (рук. чл.-кор. РАН Васин В.В.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 работ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, изложена на 8I странице. Список литературы содержит I34 наименования.

2. СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит краткий обзор работ по теме исследования, обсуждение используемых методов и полученных результатов диссертации.

Задача параметрической идентификации среды, осуществляемая в серии экспериментов, формально может быть представлена как задача решения семейства операторных уравнений вида

$$M_i w = f_i, i \in I , \qquad (I)$$

где $w \in W$, $f_i \in F$; W, F - функциональные пространства; семейство операторов $\{M_i: W \to F\}_{i \in I}$, I - множество индексов. Требуется найти w, удовлетворяющее семейству операторных уравнений (I).

I. В главе I диссертации рассматриваются задачи об индентификации среды, осуществляемой в серии экспериментов с варьируемой схемой измерений.

В первом параграфе показано, что задача параметрической идентификации, осуществляемая в серии экспериментов с варьируемым положением источника и пробника, в частности, задача каротажа

скважин, может быть интерпретирована как задача решения соответствующих операторных уравнений специального вида

$$B \cdot A_i w = f_i, i \in I, \qquad (2)$$

где $w \in W$, $f \in \mathcal{F}$; W, U, $\mathcal{F}$ – функциональные пространства; $\{A_i: W \to U\}_{i \in I}$ – семейство непрерывных биективных операторов и оператор $B: U \to \mathcal{F}$ линейный.

Роль оператора A_i играет оператор, соответствующий исходной нетомографической постановке задачи с i-м положением источника и измерениями, обеспечивающими единственность решения обратной задачи, при этом операторы A_i, $i = I$ естественно будут биективны. Тогда роль оператора B играет оператор сужения величин, наблюдаемых в исходной нетомографической постановке (измерения на всей границе тела или на части некоторой внутренней поверхности), на величины, наблюдаемые при i-м положении источника в томографическом эксперименте (измерения на выделенной части границы или соответственно на части некоторой внутренней поверхности).

Во втором параграфе обсуждаются возможности использования методов решения операторных уравнений I-го рода применительно к семейству операторных уравнений I-го рода (I).

2. В главе 2, следуя Kaczmarz S., интерпретируется задача решения семейства операторных уравнений как задача нахождения точки пересечения множеств решений соответствующих операторных уравнений из семейства (I). Тогда для решения семейства операторных уравнений можно использовать метод поиска точки, принадлежащей пересечению множеств, – метод последовательных проекций.

В первом параграфе рассматривается метод последовательных проекций для решения задачи о нахождении элемента, принадлежащего пересечению конечного числа замкнутых выпуклых множеств. И конструируется новая схема метода последовательных проекций для решения задачи о нахождении элемента, принадлежащего пересечению счетного числа замкнутых выпуклых множеств.

Пусть имеются m множеств $Q_i \subset \mathcal{H}$, $i = I, \ldots, m$,

$$Q_0 \equiv \bigcap_{i=1}^{m} Q_i, \qquad (3)$$

Пусть P_i - метрический проектор на множество Q_i, а T_i - "релаксированный" метрический проектор, определяемый равенством

$$T_i \equiv I + \lambda_i(P_i - I), \tag{4}$$

где λ_i - константы, называемые параметрами релаксации, $0 < \lambda_i < 2$, $i = 1,\dots,m$. Заметим, что неподвижные точки проектора P_i являются также неподвижными точками оператора T_i.

Определим композиционный оператор-произведение H в виде

$$H \equiv T_m T_{m-1} \dots T_1. \tag{5}$$

Пусть множество Q_0 не пусто. Тогда для всякого $x \in \mathcal{H}$ и любого выбора констант $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, в интервале $0 < \lambda_i < 2$, $i = 1,\dots,m$ последовательность $\{H^n x\}$, где H определяется (5), сходится слабо к точке множества Q_0, как показал Л.М.Брегман. Л.Г.Гурин, Б.Т.Поляк, Е.В.Райк и Д.К.Юла установили ряд условий, при которых сходимость становится сильной.

Пусть $\mathcal{H}$ - гильбертово пространство, необходимо найти элемент, принадлежащий пересечению счетного числа замкнутых выпуклых множеств $Q_i \subset \mathcal{H}$, $i \in \mathcal{I}$, где $\mathcal{I}$ - множество натуральных чисел, т.е. требуется найти элемент из множества Q_0, где

$$Q_0 \equiv \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i. \tag{6}$$

Зададим итерационную последовательность

$$\begin{gathered}
T_1x,\ T_1T_1x,\ T_2T_1T_1x,\ T_1T_2T_1T_1x,\ T_2T_1T_2T_1T_1x,\ T_3T_2T_1T_2T_1T_1x, \\
\dots \\
T_{k-1}\dots T_3T_2T_1\dots T_3T_2T_1T_2T_1T_1x, \\
T_1T_{k-1}\dots T_3T_2T_1\dots T_3T_2T_1T_2T_1T_1x, \\
T_2T_1T_{k-1}\dots T_3T_2T_1\dots T_3T_2T_1T_2T_1T_1x, \\
T_3T_2T_1T_{k-1}\dots T_3T_2T_1\dots T_3T_2T_1T_2T_1T_1x, \\
\dots \\
T_k\dots T_3T_2T_1T_{k-1}\dots T_3T_2T_1\dots T_3T_2T_1T_2T_1T_1x, \\
\dots ,
\end{gathered} \tag{7}$$

где

$$T_i \equiv I + \lambda(P_i - I), \tag{8}$$

$0 < \lambda < 2$, $i \in \mathcal{I}$.

Обозначим m-й член последовательности (7) через $D_m x$, тем самым задаем оператор $D_m: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, а через $K_{m+1}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ оператор, задаваемый неявно операторным уравнением $D_{m+1}x = K_{m+1}D_m x$.

Выделим из последовательности $\{D_m\}$ подпоследовательность элементов, у которых в композиции операторов, задающей этот элемент, последний оператор T_i, и обозначим её через $\{D_{m(p,i)}x\}$, где $p = 1,2,\ldots$.

Теорема I. Пусть $Q_0 \neq \emptyset$. Для произвольного начального $x \in \mathcal{H}$ и всякого фиксированного значения i, $i = 1,2,\ldots$, последовательность $\{D_{m(p,i)}x\}$ сходится слабо к некоторому элементу множества Q_0 $(Q_0 \equiv \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i)$.

Отметим, что утверждение о слабой сходимости для классической схемы метода последовательных проекций для случая бесконечного числа замкнутых выпуклых множеств получено Брегманом Л.М. лишь в предположении, что существует $\max_{i \in I} \rho(x,Q_i)$ для произвольного $x \in \mathcal{H}$, где $\rho(x,Q_i)$ расстояние от элемента x до множества Q_i; при этом проектирование предполагается на каждом шаге итерации на множество максимально удаленное от элемента, полученнного на предыдущем шаге итерации.

Во втором параграфе новая схема метода последовательных проекций используется для нахождения слабого решения счетной системы линейных операторных уравнений I-го рода. Отметим, что В.В.Васин, Ф.Натерер используют классическую схему метода последовательных проекций лишь для решения конечной системы линейных операторных уравнений I-го рода.

Рассмотрим семейство операторных уравнений (I).

Пусть $\mathcal{W}$, $\mathcal{F}$ - гильбертовы пространства, пусть задано семейство линейных непрерывных операторов $\{M_i: \mathcal{W} \to \mathcal{F}\}$, $i \in \mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ - множество натуральных чисел.

Пусть Q_i - множество решений соответствующего операторного уравнения из (I), $Q_0 \equiv \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i$, пусть P_i - метричекий проектор на Q_i, $i \in \mathcal{I}$.

Тогда справедлива

Теорема 2. Пусть $Q_0 \neq \emptyset$. Тогда для произвольного $x \in W$, и произвольного фиксированного i, $i = 1,2,\ldots$, последовательность $\{D_{m(p,i)}x\}$ слабо сходится к некоторому элементу множества Q_0.

3. В главе 3 для решения семейства операторных уравнений вида (2) предлагается метод, названный автором методом последовательных проекций на образ.

Отметим, что применимость метода последовательных проекций для нелинейной системы операторных уравнений ограничивается случаем, когда решение каждого из этих операторных уравнений - замкнутое выпуклое множество. В методе последовательных проекций на образ выпуклости непосредственно не требуется.

В параграфе I главы 3, в отличие от главы 2, множества $Q_i \in W$, $i = I,\ldots,m$, предполагаются прообразами исходного множества $Q \in \mathcal{V}$ под действием непрерывных биективных операторов U_i, $i = I,\ldots,m$, действующих из гильбертова пространства W в гильбертово пространство $\mathcal{F}$.

Рассмотрим следующую итерационную процедуру нахождения элемента w_0, принадлежащего Q_0.

Рассмотрим композицию операторов

$$H = T_m T_{m-1} \ldots T_1, \tag{9}$$

где $T_i \equiv U_i^{-1} \circ P \circ U_i$, $i = I,\ldots,m$; P - метрический проектор на Q, $Q \in \mathcal{V}$.

Пусть x_0 - любое начальное приближение, $x_0 \in U$.

Рассмотрим итерации вида

$$x_n = H_{\alpha_n} x_{n-1}, \tag{10}$$

где $H_{\alpha_n} x = \alpha_n(\lambda I x + (I - \lambda)Hx) + (I - \alpha_n)x_0$, $0 < \lambda < 1$, I - тождественный оператор, а $\{\alpha_n\}$ - числовая последовательность, являющаяся допустимой.

Числовую последовательность, следуя Б.Гальперину, называем допустимой, если выполнены условия:

I) $0 < \alpha_n < 1$, $n = 1,2,\ldots$;

2) $\alpha_n < \alpha_{n+1}$, $n = 1,2,\ldots$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 1$;

4) существует последовательность номеров $k(n)$ такая, что

$k(n+1) > k(n)$, $n = 1,2,\ldots$; $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_{n+k(n)}\cdot\varepsilon_n^{-1} = 1$;

$\lim\limits_{n\to\infty} k(n)\varepsilon_n = \infty$, где $\varepsilon_n = 1 - \alpha_n$.

Б.Гальперин для случая, когда $H: \mathcal{U} \to \mathcal{H}$ – нерасширяющий оператор с ограниченной замкнутой выпуклой областью опеределения $\mathcal{U}$, $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}$, доказал сходимость итераций вида (10) к некоторой неподвижной точке оператора H.

В.В.Васин распространил результат Б.Гальперина, относящийся к классу нерастягивающих операторов, на класс Q-квазинерастягивающих операторов, удовлетвряющих условию

$$x_k \xrightarrow{\text{сл}} x,\ H(x_k) - x_k \to 0 \Rightarrow H(x) = x. \qquad (11)$$

Определение 1. Пусть Q множество неподвижных точек оператора $T: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $Q \neq \emptyset$. Оператор T называется Q-квазинерастягивающим, если

$$\|T(x) - z\| \leqslant \|x - z\|$$

для любых $z \in Q$ и $x \in \mathcal{H}$, $x \notin Q$.

Определение 2. Пусть Q множество неподвижных точек оператора $T: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $Q \neq \emptyset$. Оператор T называется строго Q-квазинерастягивающим (или фейеровским), если

$$\|T(x) - z\| < \|x - z\|$$

для любых $z \in Q$ и $x \in \mathcal{H}$, $x \notin Q$.

Лемма 1. Пусть $\bigcap\limits_{i=1}^{m} Q_i = Q_0$, $Q_0 \neq \emptyset$. Пусть оператор H, задаваемый (9), такой, что для всякого i, $i = 1,\ldots,m$, оператор T_i из (9) является строго Q_i-квазинерастягивающим.

Тогда множество неподвижных точек оператора H совпадает с $Q_0 = \bigcap\limits_{i=1}^{m} Q_i$ и оператор H является Q_0-квазинерастягивающим.

Доказав лемму I, найдем условия на операторы U_i, $i = I,\dots,m$, при которых операторы T_i, $i = I,\dots,m$, из (9) являются строго Q_i-квазинерастягивающими и удовлетворяют соотношению (II), и получим, что оператор H будет Q_0-квазинерастягивающим оператором и удовлетворяющим условию (II).

Тогда, используя упомянутый результат В.В.Васина, получаем следующую теорему.

Теорема 3. Для всякого $x \in W$ и любой допустимой последовательности $\{\alpha_n\}$, последовательность $\{H_{\alpha_n}^n x\}$, где $H_{\alpha_n} x = \alpha_n(\lambda x + (I - \lambda)Hx) + (I - \alpha_n)x_0$, $0 < \lambda < 1$, $H = T_m \circ \dots \circ T_1$, а T_i определяется композицией операторов $T_i = U_i^{-1} \circ P \circ U_i$, где оператор U_i для всякого $u \in R(U_i)$ и $w \in Q$ удовлетворяет условию

$$|U_i^{-1}u - U_i^{-1}w| > |U_i^{-1} \circ Pu - U_i^{-1} \circ Pw| \qquad (I2)$$

и условию

$$x_k \xrightarrow{сл} x,\ U_i^{-1} \circ P \circ U_i x_k - x_k \to 0 \quad \Rightarrow \quad U_i^{-1} \circ P \circ U_i x = x \qquad (I3)$$

для всякого i, $i = I,\dots,m$, сходится сильно к некоторому элементу $w_0 \in Q_0$.

Очевидно, что условие (I3) можно заменить более сильным условием, потребовавав, чтобы операторы U_i и U_i^{-1} были непрерывны на области определения и Q соответственно, $i = I,\dots,m$.

В параграфе 2 главы 3 метод последовательных проекций на образ применяется для решения системы операторных уравнений вида (2).

Пусть W, U, $\mathcal{F}$ - гильбертовы пространства, пусть задано семейство биективных операторов $\{A_i : W \to U\}$, $i = I,\dots,m$.

Пусть операторы A_i удовлетворяют условию (I3) и для всякого $x \in W$, $x \notin Q_i$ и любого $y \in Q_0$, $\bigcap_{i=1}^{m} Q_i = Q_0$, справедливо неравенство

$$|x - y| > |A_i^{-1} \circ P \circ A_i x - y|, \qquad (I4)$$

где P - оператор метрического проектирования на Q, $Q \in \mathcal{V}$, $i = I,\dots,m$ и оператор B: $U \to \mathcal{F}$ линейный. Пусть Q_0 - множество решений семейства уравнений (2).

Пусть G_i, где $i = 1,\dots,m$, - оператор сдвига в пространстве $\mathcal{U}$ на элемент $-g_i$, где g_i является произвольным фиксированным решением операторного уравнения

$$B\circ u = f_i. \tag{15}$$

И пусть P - оператор метрического проектирования на $\mathrm{Ker}(B)$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Для всякого $x \in \mathcal{W}$ и любой допустимой последовательности $\{\alpha_n\}$, последовательность $\{H^n_{\alpha_n} x\}$, где $H_{\alpha_n} x = \alpha_n(\lambda x + (1-\lambda)Hx) + (1-\alpha_n)x_0$, $0 < \lambda < 1$, $H = T_m\circ\dots\circ T_1$, а T_i определяется

$$T_i = A_i^{-1}\circ G_i^{-1}\circ P\circ G_i\circ A_i,$$

$i = 1,\dots,m$, сходится сильно к некоторому решению $w_0 \in Q_0$ семейства операторных уравнений (2).

Метод последовательных проекций на образ является неустойчивым при возмущении операторов и правых частей системы линейных операторных уравнений (2). В параграфе предложен регуляризованный вариант (итеративная регуляризация) метода последовательных проекций на образ для системы операторных уравнений (2), при этом предполагается, что решение семейства операторных уравнений существует, единственность решения не предполагается.

В параграфе 3 главы 3 на основе интерпретации задачи решения семейства операторных уравнений как задачи пересечения множеств решений каждого из этих уравнений сформулированы общие критерии как существования, так и единственности решения семейства операторных уравнений.

Исследование единственности решения задачи пересечения множеств становится содержательным, если учитывать информацию о происхождении множеств.

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{W}$ - линейные нормированные пространства.

Пусть в пространстве $\mathcal{U}$ задано подмножество $\mathcal{V}$ и семейство операторов $\{A_t\colon \mathcal{W} \to \mathcal{U}\}_{t\in\mathcal{I}}$, где I - множество индексов, пусть множества Q_t - прообразы множества $\mathcal{V}$ для соответствующих операторов A_t, $t \in \mathcal{I}$.

Будем искать условия на $\mathcal{V}$ и семейство операторов $\{A_t: \mathcal{W} \to \mathcal{U}\}_{t\in I}$, при которых пересечение прообразов $\bigcap_{t\in I} Q_t$ состоит из единственного элемента.

В случае, когда $\mathcal{V}$ - линейное подпространство, а операторы семейства $\{A_t: \mathcal{W} \to \mathcal{U}\}_{t\in I}$ линейны, естественно искать условия на $\mathcal{V}$ и семейство операторов $\{A_t: \mathcal{W} \to \mathcal{U}\}_{t \in I}$, при которых пересечение прообразов $\bigcap_{t\in I} Q_t$ тривиально.

Введем следующее определение.

<u>Определение 3</u>. Пусть $\mathcal{U}$ - линейное нормированное пространство, пусть $\mathcal{D} \subset \mathcal{U}$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$, $\{J_t: \mathcal{U} \to \mathcal{U}\}_{t \in I}$ - семейство биективных операторов. Если для всякого $x \in \mathcal{B}$ существует $t \in I$ такое, что $J_t(x) \notin \mathcal{D}$, то назовем $\{J_t: \mathcal{U} \to \mathcal{U}\}_{t\in I}$ семейством операторов, выталкивающим $\mathcal{B}$ из $\mathcal{D}$.

Выберем некоторый произвольный фиксированный индекс j, принадлежащий I, и рассмотрим семейство композиций операторов $\{A_i \circ A_j^{-1}: \mathcal{U} \to \mathcal{U}\}_{i\in I}$. Тогда справедлива следующая теорема.

<u>Теорема 5</u>. Для того, чтобы пересечение множеств $\bigcap_{t\in I} Q_t$ было пусто, необходимо и достаточно существование индекса j, принадлежащего I, такого, что семейство операторов $\{A_i \circ A_j^{-1}: \mathcal{U} \to \mathcal{U}\}_{i\in I}$ выталкивает множество $\mathcal{V}$ из $\mathcal{V}$.

<u>Следствие</u>. Если $\mathcal{V}$ - линейное подпространство, а операторы семейства $\{A_t: \mathcal{W} \to \mathcal{U}\}_{t \in I}$ линейны, то пересечение $\bigcap_{t\in I} Q_t$ тривиально тогда и только тогда, когда существует индекс j, принадлежащий I такой, что семейство операторов $\{A_i \circ A_j^{-1}: \mathcal{U} \to \mathcal{U}\}_{i\in I}$ выталкивает $\mathcal{V}\setminus O$ из $\mathcal{V}$, где O - нуль линейного нормированного пространства $\mathcal{U}$.

Легко показать, что выполнение условий теоремы для некоторого индекса j, принадлежащего I, влечет выполнение условий предложения для всякого индекса из I.

Можно требовать биективность лишь одного оператора из семейства и рассматривать композиции с соответствующим индексом.

Применим предложенный критерий отсутствия нетривиальных пересечений к семействам операторных уравнений.

Теорема 6. Пусть операторы семейства $\{A_t: W \to U\}_{t\in T}$ биективны и линейны, а оператор $B: U \to \mathcal{F}$ - линеен, но не биективен, $D = \mathrm{Ker}B\setminus O$, $D \subset U$, тогда для того, чтобы семейство операторных уравнений (2) имело не более одного решения, необходимо и достаточно, чтобы существовало $\tau \in T$ такое, что семейство операторов $\{A_{t,\tau}: A_{t,\tau} = A_t \circ A_\tau^{-1}\}_{t\in T}$ выталкивало D из D.

Применение критерия, предложенного в теореме, и следствия из него опосредовано необходимостью находить образ линейного подпространства, а затем проверять, содержит ли этот образ подпространства, инвариантные относительно соответствующих семейств операторов. В приложениях для соответствующих коэффициентных обратных задач математической физики первая задача является нетривиальной, а следовательно, и вторая задача нетривиальна.

Предложенный критарий отсутствия решения задачи пересечения так заданных подмножеств на языке выталкивающих операторов позволяет предложить путь исследования вопросов единственности конкретных задач пересечения множеств, заданных описанным выше способом.

Перейдем к вопросу о существовании решения семейства операторных уравнений вида (2).

Определение 4. Пусть U - линейное нормированное пространство, пусть $D \subset U$, $x \in D$; $\{J_t: U \to U\}_{t\in T}$ - семейство биективных операторов. Семейство операторов $\{J_t: U \to U\}_{t\in T}$ называем оставляющим x в D, если $J_t x \in D$ для всякого $t \in T$.

Тогда мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 7. Пусть операторы семейства $\{A_t: W \to U\}_{t\in T}$ биективны и линейны, оператор $B: U \to \mathcal{F}$ линеен, но не биективен, $D = \mathrm{Ker}B$, $D \subset U$, тогда, для того, чтобы существовало решение семейства операторных уравнений (2), необходимо и достаточно, чтобы существовало $\tau \in T$ и такое $x \in D$, что семейство операторов $\{Y_{t,\tau}: Y_{t,\tau} = G_t \circ A_t \circ A_\tau^{-1} \circ G_\tau^{-1}\}_{t\in T}$, оставляющее x в D, где G_t сдвиг в простран-

стве U на элемент g_i, а g_i является произвольным фиксированным решением операторного уравнения (15).

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Найдена новая схема метода последовательных проекций для решения задачи о поиске элемента, принадлежащего пересечению счетного числа замкнутых выпуклых множеств.

2. На основе новой схемы метода последовательных проекций предложен метод нахождения слабого решения счетной системы операорных уравнений I-го рода.

3. Показано, что задача идентификации среды, осуществляемая в серии экспериментов с варьируемым положением источника и пробника, может быть интерпретирована как задача решения семейства операторных уравнений специального вида.

4. Предложен новый метод - метод последователных проекций на образ для решения задачи о нахождении элемента, принадлежащего пересечению конечного числа множеств, заданных специальным образом.

5. На основе метода последовательных проекций на образ предложен метод нахождения решения для системы операторных уравнений I-го рода специального вида.

6. Предложены общие критерии для исследования задачи о единственности и существовании решения семейства операторных уравнений I-го рода специального вида.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Резник В.Х. Об одной новой схеме метода последовательных проекций //Чел.гос.тех.ун-т. - Челябинск, 1995. - 11 с. - Деп. в ВИНИТИ 14.06.95, № 1767 - В95.

2. Резник В.Х. Метод последовательных проекций на образ //Чел.гос.тех.ун-т. - Челябинск, 1995. - 14 с. - Деп. в ВИНИТИ 14.06.95, № 1768 - В95.

3. Резник В.Х. Теорема единственности для одного семейства операторных уравнений //Чел.гос.тех.ун-т. - Челябинск, 1991. - 44 с. - Деп. в ВИНИТИ 20.09.91, № 2564 - В91.

4. Резник В.Х. Об одном семействе неявных операторных уравнений /XVI Всесоюзная школа по теории операторов в функциональных пространствах: Тез.докл. - Н.Новгород, I99I. - С.I88.

5. Резник В.Х. Регуляризующий алгоритм для обратной задачи с параметром /Всесоюзная конференция "Асимптотические методы теории сингулярно-возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач": Тез.докл. - Бишкек, I99I. - С. 89.

6. Резник В.Х. Метод последовательных проекций на образ /Алгоритмический и численный анализ некорректных задач: Тез.докл.Всеросс.науч.конфер., 27 февраля - 3 марта I995 г. - Екатеринбург: УрГУ, I995. - С. I04-I05.

7. Reznik V.H. The Problem of Concordance Between the Information of ICP Soluion Boundary Behavior and Variation of the Source Parameters //The Third International Congress on industrial and Applied Mathematics, Book of Abstracts, Hamburg, 1995. - P. 415.

8. Reznik V.H. The Method of Sequential Projection on Image and the Problem of Concordance Between the Information of ICP Solution Boundory Behavior and Variation of the Source Parameters //Mathematical Methods in Geophysical Imaging III, SPIE Proceed. 2571- 06, 1995. - P. 78-86.

Издательство Челябинского
государственного технического университета

ЛР № 020364 от 10.04.97. Подписано в печать 21.04.97. Формат 60×84 1/16. Печать офсетная. Усл.печ.л. 0,93. Уч.-изд. л. 0,98. Тираж 100 экз. Заказ 126/171.

УОП издательства. 454080, г.Челябинск, пр. им.В.И.Ленина, 76.