УДК 517.9

ПРИМЕНЕНИЕ ДВАЖДЫ НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОГО S-СПЛАЙНА

Д.А. Силаев, Д.О. Коротаев, С.В. Капустин

Данная работа посвящена использованию сглаживающих S-сплайнов 5-й степени. Такие сплайны являются кусочно-полиномиальной функцией, причем первые три коэффициента каждого полинома, определяются условиями гладкой склейки до второй производной включительно, а остальные три - методом наименьших квадратов. С помощью таких сплайнов строятся квадратурные формулы 6-го порядка для вычисления одно- и двухмерных интегралов, а также решается задача Дирихле для уравнения Пуассона в односвязной области. Получены соответствующие оценки сходимости.

Ключевые слова: аппроксимация, сплайн, численные методы, квадратуры, математическая физика, метод конечных элементов

1. Дважды непрерывно дифференцируемый S-сплайн

Рассмотрим на отрезке [*a*, *b*] равномерную сетку $x_k = a + kh,\ k = 0,...,K$, $h = (b-a)/K$ – шаг сетки. Разобьем отрезок [*a*, *b*] на группы, для этого введем ещё одну равномерную сетку $\xi_l = a + lH$, $H = mh,\ m \in Z$. Таким образом, переходя из одной группы в другую, мы осуществляем сдвиг системы координат и рассматриваем каждый l-й полином на отрезке $[0,H]$. Пусть значения приближаемой функции на этой сетке $y = (y_0, y_1, \dots, y_K) \in \mathrm{R}^{K+1}$. Обозначим:

$$P_S^n \left\{ u : u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{i=3}^{n} a_i x^i \right\}$$

множество полиномов степени n с фиксированными коэффициентами a_0, a_1, a_2. Рассмотрим функционал:

$$\Phi^l(u) = \sum_{k=0}^{M} (u(\xi_l + kh) - y_{ml+k})^2 .$$

В классе P_S^n ищется такой полином g_l, который минимизирует функционал

$$\Phi^l(u) = \sum_{k=0}^{M} (u(\xi_l + kh) - y_{ml+k})^2 \to \min(a_3, a_4, \dots, a_n)$$

и удовлетворяет следующим условиям:

$$a_0^l = g_{l-1}(\xi_l - \xi_{l-1}) = g_{l-1}(H), \quad a_1^l = g'_{l-1}(H), \quad a_2^l = \frac{1}{2} g''_{l-1}(H), \text{ при } l = 0, \dots, L-1. \qquad (1)$$

Здесь при $l = 0$ $g_{l-1}(H) = g_{L-1}(H)$ есть условие периодичности *S*-сплайна. Так как $a_0^l = g_l(0), a_1^l = g'_l(0), a_2^l = g''_l(0)/2$, то условия (1) есть условия гладкой склейки двух последовательных полиномов. В непериодическом случае начальные коэффициенты a_0^0, a_1^0, a_2^0 задаются начальными условиями y_0, y'_0 , $y''_0/2$ [1]. Можно предполагать, что значения заданной функции y_k известны с некоторой точностью, например, они есть результаты каких-либо измерений. Будем предполагать тогда, что с уменьшением шага h будет увеличиваться точность измерения, а

[1] В случае если функция задана таблицей, то y'_0, y''_0 можно вычислить с помощью формул численного дифференцирования высокого порядка аппроксимации, например,

$$y'_0 = -\tfrac{1}{60}(147y_0 - 360y_1 + 450y_2 - 400y_3 + 225y_4 - 72y_5 + 10y_6)/h + O(h^5),$$

$$y''_0 = \tfrac{1}{180}(812y_0 - 3132y_1 + 5265y_2 - 5080y_3 + 2970y_4 - 972y_5 + 137y_6)/h^2 + O(h^4)$$

именно, будем предполагать, что если периодическая функция $f \in C^6[a,b]$ задана в узлах равномерной сетки $x_k = a + kh,\ k = 0,\ldots,K$ своими значениями y_k, то $|y_k - f(x_k)| \le Ch^{6+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Здесь L – число групп, на которые разбита исходная таблица значений приближаемой функции $C^6[a,b]$ или число полиномов, составляющих сплайн. Кроме того, здесь M+1 – количество точек осреднения, $m+1$ – количество точек, входящих в область определения l-го полинома g_l, ξ_l – точка привязки полинома g_l, $M - m + 1$ – число таких точек, значения которых участвуют при определении двух соседних полиномов, составляющих S-сплайн, $M \ge m+1$. В дальнейшем степень полинома $n = 5$.

Определение. S-сплайном назовем функцию $S^n_{m,M}(x)$, которая совпадает с полиномом $g_l(x)$ на отрезке $\xi_l \le x < \xi_{l+1}$.

2. Существование и единственность S-сплайна

Теорема 1. *Пусть числа m и $M \ge 3$ таковы, что собственные числа матрицы U не равны корню степени L из единицы (здесь L –число полиномов, составляющих сплайн). Тогда для любой периодической функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a,b]$ своими значениями y_k в точках $x_k = a + kh, h = (b-a)/K$, существует и единственен периодический сплайн $S_{m,M}[y](x)$.*

Для непериодического случая условия на собственные числа матрицы U не требуется.

3. Сходимость S-сплайна

Теорема 2. *Пусть периодическая функция $f(x) \in \mathbf{C}^6[a,b]$ и пусть выполнены предположения*

$$|f(x_k) - y_k| \le Ch^{6+\varepsilon},\ \varepsilon > 0\ . \tag{2}$$

Пусть, кроме того, собственные числа матрицы U по модулю меньше единицы. Тогда периодический сплайн $S^5_{m,M}(x)$ с узлами на равномерной сетке имеет дефект 3 (т.е. $S^5_{m,M}(x) \in \mathbf{C}^2[a,b]$) и для $x \in [a,b]$ справедливы следующие оценки:

$$\left| f^{(p)}(x) - \frac{d^p}{dx^p} S^5_{m,M}(x) \right| \le C_p h^{6-p},$$

$$p = 0,1,2,3,4,5;\ x \ne \xi_l \text{ при } p = 3,4,5\ .$$

Аналогичные оценки справедливы и для непериодического случая.

Теорема 3. *Пусть $\zeta = m/M < \zeta_*$. Тогда при достаточно малых m и больших M собственные числа матрицы устойчивости по модулю меньше единицы.*

Это условие устойчивости S-сплайнов аналогично условию устойчивости для кубического случая [1]. Для случая малых значений M (при $3 \le M \le 20$) в результате расчета были получены значения собственных чисел матрицы U. Оказалось, что при $m/M \le \zeta^* < 1$ все собственные числа матрицы U меньше единицы. Некоторые наиболее интересные полученные значения m и M, при которых достигаются наименьшие значения $\max|\lambda_i|$ и аппроксимация S-сплайнами устойчива, представлены в таблице.

4. Фундаментальный S-сплайн

Фундаментальный S-сплайн $B_j(x)$ – это периодический или непериодический S-сплайн, построенный по данным $y = (y_0, y_1, \ldots, y_K) \in \mathrm{R}^{K+1}$ и $y'_0 \in \mathrm{R}$, $y''_0 \in \mathbf{R}$ вида: $\{y_i = \delta_{ij}; i,j = 0,\ldots,K\}$. Легко видеть, что линейная комбинация $\sum_{j=0}^{K} y_j B_j(x) = S(x)$ является S-сплайном, приближающим начальные данные $\{y_i, i=0,...,K\}$. Заметим, что непериодические фундаментальные сплайны дополняются сплайнами с начальными условиями y_0' ,y_0'', принимающими значения 0 или 1.

Таблица

Собственные числа матрицы U

M	M	λ_1	λ_2	λ_3	max $\lvert\lambda_i\rvert$	m/M
4	2	–0,008	–0,231–0,131i	–0,231+0,131i	0,265	0,25
5	3	–0,005	0,0549–0,201i	0,0549+0,201i	0,207	0,60
6	2	0,0266	–0,285–0,129i	–0,285+0,129i	0,312	0,33
6	3	–0,008	–0,263–0,0463i	–0,263+0,0463i	0,266	0,50
7	2	0,0732	–0,167–0,305i	–0,167+0,305i	0,347	0,285
7	4	–0,0069	–0,0737–0,214i	–0,0737+0,214i	0,226	0,571
7	6	0,00218	0,116–0,207i	0,116+0,207i	0,237	0,857
8	4	–0,0079	–0,265–0,031i	–0,265+0,031i	0,266	0,50
8	5	–0,00403	0,101–0,178i	0,101+0,178i	0,204	0,625
8	7	0,00180	–0,0466–0,229i	–0,0466+0,229i	0,233	0,875
9	5	–0,00734	–0,124–0,201i	–0,124+0,201i	0,235	0,555
9	8	0,00134	–0,205–0,118i	–0,205+0,118i	0,236	0,888
10	5	–0,0078	–0,263–0,0407i	–0,263+0,0407i	0,266	0,50
10	6	–0,0055	0,0182–0,213i	0,0182+0,213i	0,213	0,60
11	7	–0,00322	0,141–0,147i	0,141+0,147i	0,203	0,636

5. Одномерные квадратурные формулы 6-го порядка

Рассмотрим интеграл $\int_A^B f(x)dx$. Аппроксимируем подынтегральную функцию S-сплайном $f(x)=\sum_{j=0}^{K} y_j B_j(x)+O(h^6)$, где $y_j = f(A+jh)$. Подставим его выражение через фундаментальные сплайны в интеграл:

$$\int_A^B S(x)dx = \int_A^B \sum_{k=0}^{K} y_k B_k(x)dx = \sum_{k=0}^{K} y_k \int_A^B B_k(x)dx = \sum_{k=0}^{K} y_k c_k,$$

где $c_k = \int_A^B B_k(x)dx = \sum_{n=0}^{L-1}\sum_{i=0}^{5} \frac{a_i^{nk}}{i+1} H^{i+1}$ – искомые коэффициенты квадратуры. Здесь a_i^{nk} – i-й коэффициент n-го полинома в k-м фундаментальном сплайне. Данные формулы имеют 6-й порядок аппроксимации.

6. Двумерные квадратурные формулы 6-го порядка для односвязных областей

На плоскости рассматривается область Ω с границей γ, где γ задана параметрически. В области рассматривается гладкая функция $f(r,\varphi)$. Поместим область в круг радиуса R и введём полярную сетку. Рассмотрим интеграл:

$$\iint_\Omega f(r,\varphi) r dr d\varphi .$$

Представим подынтегральную функцию в виде разложения по фундаментальным S-сплайнам 5-й степени:

$$f(r,\varphi) = \sum_{i=0...K_1-1} \sum_{j=0...K_2} y_{ij} C_i(\varphi) D_j(r) + O(h^6) = S(r,\varphi) + O(h^6) .$$

Подставив $S(r,\varphi)$ в искомый интеграл, получим квадратурные формулы:

$$\iint_\Omega S(r,\varphi) r dr d\varphi = \sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=0}^{K_2} c^{ij} y_{ij} \text{, где } c^{ij} = \iint_\Omega C_i(\varphi) D_j(r) r dr d\varphi . \qquad (3)$$

Для вычисления коэффициентов c^{ij} воспользуемся формулой Грина в полярной системе координат:

$$\oint_\gamma P_r dr + rQ_\varphi d\varphi = \iint_\Omega \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rQ_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial P_r}{\partial \varphi}\right) r dr d\varphi.$$

Для нашего случая положим $P_r(r,\varphi) \equiv 0$, $Q_\varphi(r,\varphi) = \frac{1}{r} C_i(\varphi) \int_0^r t D_j(t)dt$, тогда $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rQ_\varphi) = C_i(\varphi) D_j(r)$ и для квадратурных коэффициентов мы получаем формулы:

$$c^{ij} = \oint_\gamma C_i(\varphi)\left(\int_0^r t D_j(t)dt\right)d\varphi. \tag{4}$$

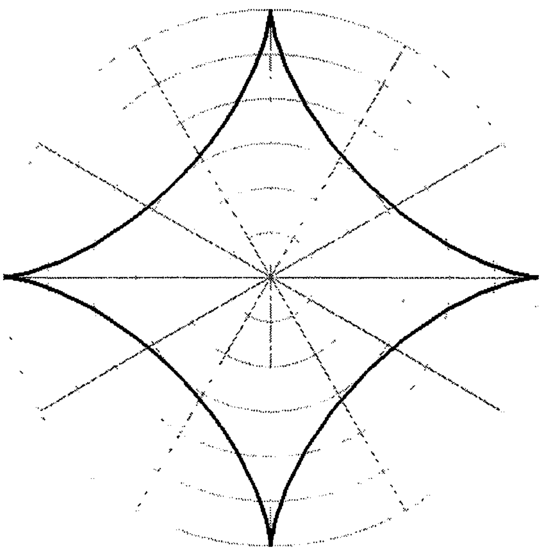

Рис. 1. Астроида

Точность приближения квадратурных формул для круга

Кол-во полиномов	Точность полученной формулы	Коэфф-т улучшения
5	$6{,}47\times10^{-7}$	
10	$1{,}198\times10^{-8}$	54,3
20	$2{,}033\times10^{-10}$	59
40	$4{,}26\times10^{-12}$	48

Точность приближения квадратурных формул для астроиды

Кол-во полиномов	Точность полученной формулы	Коэфф-т улучшения
5	$1{,}28\times10^{-2}$	
10	$2{,}69\times10^{-4}$	47,5
20	$4{,}77\times10^{-6}$	56,4
40	$1{,}03\times10^{-7}$	46,3

Пусть выполнены условия устойчивости матрицы *U*, т.е. $m_1 < M_1\varsigma_*$, $m_2 < M_2\varsigma_*$ и пусть $f \in C^6(\Omega_\delta)$, где $\Omega_\delta \supset \Omega$, т.е. предполагается, что функция *f* непрерывна и шесть раз дифференцируема в несколько большей области. Пусть также $h = \max(h_1, h_2)$. Поместим область Ω_δ в круг *K* радиуса *R*. Введём полярную систему координат, взяв за начало координат центр круга *K*. Продолжим функцию f в $K \setminus \Omega_\delta$ тождественным нулём. Обозначим $S(\varphi, r)$ – $\varphi - r$ – сплайн, приближающий таким образом продолженную функцию f на круге *K*. Доказана следующая теорема.

Теорема 4. Пусть $S(\varphi, r)$ – $\varphi - r$ – сплайн, приближающий функцию *f*, пусть $(M-m)h \le \rho(\gamma_\delta, \gamma)$. Здесь $\rho(\gamma_\delta, \gamma)$ – расстояние между границами областей Ω_δ и Ω соответственно. Тогда справедлива оценка:

$$\left|\iint_{\Omega} f(\varphi,r)d\Omega - \sum_{i=0}^{K_1-1}\sum_{j=0}^{K_2-1} c^{ij} y_{ij}\right| \le Ch^6 .$$

Здесь $y_{ij} = f(\varphi,r)$ – значения функции f в узлах сетки, весовые коэффициенты c^{ij} определены формулой (4), суммирование производится лишь по тем индексам, для которых $(\varphi_i, r_j) \in \Omega_\delta$.

7. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в односвязной области

Рассмотрим уравнение Пуассона в области D:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -p(r,\varphi), \quad (r,\varphi) \in D . \tag{5}$$

С граничными условиями:

$$u(r,\varphi)\big|_{\partial D} = f(r,\varphi), \tag{6}$$

где граница области D задана параметрически:

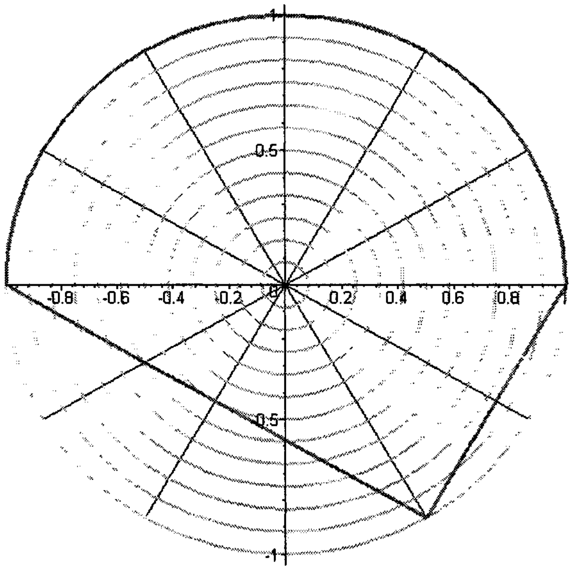

Рис. 2. Область D, погруженная в круг радиуса 1

$$r(\varphi) = \begin{cases} 1, & \varphi \in [0,\pi] \\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}\sin(\varphi) + \cos(\varphi)}, & \varphi \in [\pi, 5\pi/3] \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{\sin(\varphi) - \sqrt{3}\cos(\varphi)}, & \varphi \in [5\pi/3, 2\pi] \end{cases}$$

Поместим D в круг радиуса 1. Далее, будем рассматривать полярную систему координат с центром в центре круга. Построим полярную сетку по r и по φ.

Представим решение уравнения в виде:

$$u(r,\varphi) = \sum_{i=0}^{K_1-1}\sum_{j=1}^{K_2-1} u_{ij} C_i(\varphi) D_j(r), \tag{7}$$

где $C_i(\varphi)$ и $D_j(r)$ – периодический и непериодический фундаментальные одномерные сплайны на отрезках $[0, 2\pi]$ и $[0, 1]$ соответственно. Домножим исходное уравнение на r. Теперь будем домножать полученное уравнение скалярно на $C_l(\varphi)D_k(r)$, где пары индексов l, k пробегают все значения $l = 0,\ldots,K_1$, $k = 1,\ldots,K_2-1$, но такие, что $(h_1 k, h_2 l) \in D$ (т.е. только для внутренних точек области D). Получим уравнение:

$$\iint_D \left\{ r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right\} C_l(\varphi) D_k(r) r dr d\varphi = -\iint_D p(r,\varphi) C_l(\varphi) D_k(r) r^2 dr d\varphi.$$

Подставим в левую часть выражение (7):

$$\sum_{i,j} u_{ij}\left(\iint_D \left(C_i(\varphi)D_j''(r)r^2 + C_i(\varphi)D_j'(r)r + C_i''(\varphi)D_j(r)\right)C_l(\varphi)D_k(r)drd\varphi\right) = -\iint_D p(r,\varphi)C_l(\varphi)D_k(r)r^2 drd\varphi. \quad (8)$$

Здесь существенно, что выражения, стоящие под знаком интеграла в левой части является произведением функции от переменной r на функцию от переменной φ, поэтому, применяя формулу интегрирования по частям, можно избавиться от производных высоких порядков (например, при решении уравнения $\Delta^2 u(r,\varphi) = f(r,\varphi)$, под знаком интеграла появятся производные 3-го и 4-го порядка от фундаментальных сплайнов, в то время как существует лишь непрерывная производная 2-го порядка, но интегрируя по частям, можно свести подынтегральное выражение к такому, в котором будут лишь производные 1 и 2 порядка).

Последнее уравнение ввиду произвольности выбора l и k представляет собой систему для определения коэффициентов u_{ij}. Чтобы сделать систему полной, необходимо учесть граничные условия, которые дадут недостающее число уравнений:

$$\left.\sum_{i,j} u_{ij} C_i(\varphi) D_j(r)\right|_{\partial D} = f(\varphi, r). \quad (9)$$

Интегралы в (8) вычисляются при помощи квадратурных формул для области D коэффициенты которых находятся по формулам:

$$c^{ij} = \int_0^{\pi} C_i(\varphi)\left(\int_0^1 rD_j(r)dr\right)d\varphi + \int_{\pi}^{5\pi/3} C_i(\varphi)\left(\int_0^{r_1(\varphi)} rD_j(r)dr\right)d\varphi + \int_{5\pi/3}^{2\pi} C_i(\varphi)\left(\int_0^{r_2(\varphi)} rD_j(r)dr\right)d\varphi,$$

где $r_1(\varphi) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}\sin(\varphi) + \cos(\varphi)}$, $r_2(\varphi) = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sin(\varphi) - \sqrt{3}\cos(\varphi)}$.

Из системы уравнений (8) и (9) получаем коэффициенты u_{ij} разложения решения (7) по фундаментальным сплайнам, т.е. искомое приближенное решение.

Вышеописанным методом решалась задача:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 1, & (r,\varphi) \in D \\ u(r,\varphi)|_{\partial D} = r^2 \sin^2(\varphi) - (r^2 - 1)/4 \end{cases}.$$

При $K_1 = 12$, $K_2 = 6$ точность решения составила $0,7927 \times 10^{-4}$. График решения представлен на рис. 3.

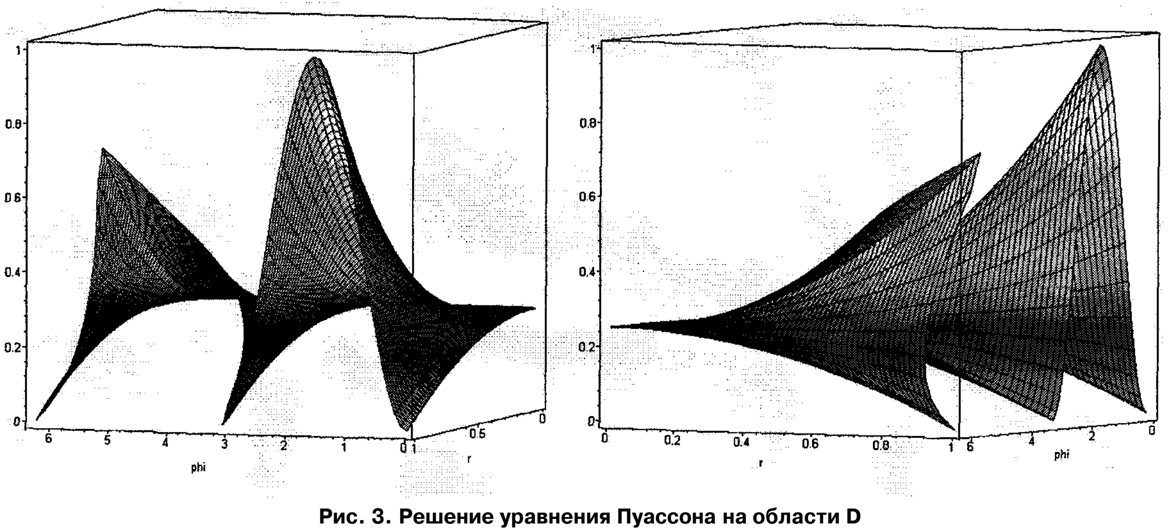

Рис. 3. Решение уравнения Пуассона на области D

Литература

1. Силаев, Д.А. Приближение S-сплайнами гладких функций / Д.А. Силаев, Г.И. Якушина // Труды семинара имени И.Г. Петровского. - М.: Изд-во МГУ, 1984. - Вып. 10. - С. 197-206.
2. Силаев, Д.А. Дважды непрерывно дифференцируемые S-сплайны / Д.А. Силаев // Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1. Математика, механика. - 2007. - № 2. - С. 12-17.
3. Силаев, Д.А. Решение краевых задач с помощью S-сплайна / Д.А. Силаев, Д.О. Коротаев // Математика. Компьютер. Образование: сб. научн. трудов. Под ред. Г.Ю. Ризниченко. - М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. - Т. 2. - С. 85-104.
4. Полулокальные сглаживающие сплайны класса C^1 / Д.А. Силаев, А.В. Амилющенко, А.И. Лукьянов, Д.О. Коротаев // Труды семинара имени И.Г. Петровского. - 2007. - Вып. 26. - С. 347-367.
5. Semilocal smoothing spline of class C^1 / D.A. Silaev, A.V. Amiliyushenko, A.I. Luk'janov, D.O. Korotaev // Journal of Mathematical Sciences. - 2007. -V. 143, № 4. - P. 3401-3414.
6. Силаев, Д.А. О квадратурных формулах высокого порядка аппроксимации для произвольных областей / Д.А. Силаев // Современная математика и математическое образование, проблемы истории и философии математики: Международная научная конференция, Тамбов, 22-25 апреля 2008 г. / отв. ред. А.А. Артёмов. - Тамбов: Изд-во Першина Р.В., 2008. - С. 65-70.

APPLICATION OF TWICE CONTINUOUSLY DIFFERENTIABLE S-SPLINE

This article is dedicated to an application of 5^{th} order smoothing S-splines. Such splines are piecewise polynomial functions. First three coefficients are defined by condition of smoothing of 2^{nd} order, while another three coefficients - by method of minimal quads. These splines are used for building of a 6^{th} order quadrature formulas. Also, here is presented a method and example of solving of Puasson's equation for simply connected domain by using these splines. Corresponding estimations are also given.

Keywords: approximation, spline, numerical methods, quadratures, the mathematical physics, Method of finite elements.

Silaev Dmitry Alexeevich - Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department «General problems of management», Mechanical-mathematical faculty, Moscow State University.

Силаев Дмитрий Алексеевич - кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра Общих проблем управления, Механико-математический факультет, Московский государственный университет.

e-mail: dasilaev@mail.ru

Korotaev Dmitry Olegovich - Post-Graduate Student, Institute of Automation of Production, Russian Academy of Sciences.

Коротаев Дмитрий Олегович - аспирант, Институт Автоматизации Производства Российской Академии Наук.

e-mail: dok-home@mail.ru

Kapustin S.V. - Post-Graduate Student, Department of Algebra and Geometry, Elabuga State Pedagogical University.

Капустин С.В. - аспирант, кафедра алгебры и геометрии, Елабужский Государственный Педагогический Университет.

e-mail: srg_kapst@mail.ru