

5532

Челябинский государственный технический университет

На правах рукописи

БЕСКАЧКО Валерий Петрович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПО ИЗМЕРЕНИЮ
ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ
ЖИДКИХ МЕТАЛЛОВ

Специальность 02.00.04 - "Физическая химия"

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Челябинск - 1995

1117

Работа выполнена в Челябинском государственном техническом университете.

Научный консультант - член-корреспондент РАН Вяткин Г.Н.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Попель П.С.,

доктор физико-математических наук, профессор
Байдаков В.Г.,

доктор химических наук, профессор
Бухтояров О.И.

Ведущее предприятие: Институт металлургии УрО РАН
(г. Екатеринбург)

Защита состоится 1 апреля 1995 г. в 14.00 на заседании диссертационного совета Д 053.13.03 при Челябинском государственном техническом университете: 454080 г. Челябинск, проспект Ленина, 76, ЧГТУ, Ученый Совет, тел. 39-91-23

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЧГТУ.

Автореферат разослан марта 1995 г.

Зам. председателя
диссертационного совета
доктор хим. наук, профессор

Р.Г.
Рябухин А.Г.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность. Анализ экспериментальных данных, наколленных к настоящему времени в исследованиях металлических расплавов, позволил установить некоторые общие закономерности, которым подчиняются их свойства в зависимости от термодинамического состояния и характера внешних воздействий, создать на этой основе схемы классификации, выделяющие в группы металлические системы с близкими свойствами, понять физико-химические причины, отличающие эти группы друг от друга. В то же время такой анализ позволил выявить и ряд проблем, решение которых составляет в настоящее время предмет интенсивных дискуссий. К числу таких проблем, в частности, относятся следующие.

1. Экспериментальные данные по свойствам металлических расплавов, полученные разными исследователями, нередко отличаются друг от друга на величину, намного превосходящую экспериментальную погрешность, декларируемую авторами этих исследований. Такая ситуация имеет место не только в отношении результатов, полученных с помощью различных методик, но и для полученных в пределах одной и той же методики. Возникающая вследствие этого неопределенность в оценке абсолютных величин некоторых свойств может достигать сотен процентов. Характерным примером этому является вязкость.
2. В результате обобщения опытных данных сложились представления о том, какое поведение того или иного свойства в зависимости от изменения параметров состояния системы (например, температуры и состава) является типичным или "нормальным", а какое следует признать "аномальным" и поэтому требующим дополнительного истолкования. К настоящему времени накопилось немало свидетельств аномального поведения свойств, однако причины такого поведения остаются неясными несмотря на многолетнюю дискуссию. Разрешение этой дискуссии осложняется тем, что аномалии обнаруживаются в экспериментах одних авторов и не обнаруживаются у других. Следовательно, вопрос о природе аномалий может быть решен только после выяснения причин невоспроизводимости данных, для чего необходимо подвергнуть анализу всю методику выполнения экспериментов, включая и их теоретические основы.
3. Нередко предпринимаются попытки исследовать влияние на физико-химические свойства различного рода внешних воздействий, например, магнитного поля. Хотя такие попытки являются естественными, однако, интерпретация опытных данных в большинстве случаев вызывает сомнения, поскольку не принимается во внимание, что внешнее поле способно

влиять не только на величину изучаемого свойства, но и на характер движения образца. В случае магнитного поля, например, будут возникать магнитогидродинамические эффекты, которые способны маскировать изучаемые эффекты, если последние вообще наблюдаются. Поэтому сделанные в таких исследованиях выводы нельзя признать вполне обоснованными.

4. Существуют экспериментальные методики, не имеющие, на наш взгляд, достаточного теоретического обоснования. В качестве таковой упомянем методику измерения электросопротивления расплавов с помощью вращающегося магнитного поля. Теоретическую основу для нее в том виде, как она сейчас используется в экспериментальной практике, составляет полученное Герцем решение задачи о моменте сил, действующем на твердую сферу. Применимость этого решения к расплавам не очевидна. Ясно, например, что при фиксированной электропроводности жидкости момент (вязких) сил, приложенных к сосуду, будет стремиться к нулю в пределе исчезающей малой вязкости. Поэтому наблюдаемая в эксперименте величина - равновесный угол закрутки сосуда - должна кроме электросопротивления зависеть также и от вязкости расплава, что не принимается во внимание.

Таким образом, анализ экспериментальных данных приводит нас к альтернативе: либо наблюдаемые особенности являются атрибутом расплавов и связаны с неизвестными нам пока особенностями в их межчастичном взаимодействии, микроскопической структуре и динамике, либо эти особенности (все или часть из них) имеют методические причины и обусловлены факторами, присутствующими в экспериментах, но не учитывамыми должным образом в теоретических основах метода. Нельзя исключить, конечно, и возможности того, что существующее положение вещей обусловлено и теми и другими причинами одновременно.

Цель работы. Изложенное выше позволяет считать, что на данном этапе экспериментальных исследований свойств жидких металлов было бы целесообразно вернуться к теоретическим основам методик измерения с целью: 1) поиска источников противоречий в экспериментальных данных, 2) расширения возможностей известных методик за счет использования расчетных схем, ориентированных на применение ЭВМ, 3) развития теории измерений в направлении более реалистичного учета условий экспериментов, 4) создания теорий, позволяющих трактовать эксперименты, выполненные в новых условиях (например, в присутствии внешних полей), 5) создания теоретических основ новых методов исследования жидких металлов.

В настоящей работе эти цели конкретизированы следующим образом.

1. Проанализировать известные схемы расчета вязкости, выяснить условия, при которых обработка данных прямых измерений, выполняемая с помощью этих схем, может приводить к ненадежным результатам.
2. Разработать численные схемы расчета вязкости, свободные от приближений, применяемых при обработке данных "вручную".
3. Создать математическую модель экспериментов по измерению вязкости методом крутильных колебаний, способную предсказывать как наблюдаемые в эксперименте параметры колебаний (декремент затухания и период) при заданных параметрах экспериментальной установки и заданных свойствах жидкости (вязкости и плотности), так и восстанавливать последние по измеренным параметрам колебаний и установки.
4. Математическим моделированием вискозиметрических экспериментов оценить точность применяемых на практике расчетных схем и выявить ситуации, ведущие к ошибочной интерпретации данных.
5. Построить теорию крутильного вискозиметра, заполненного неоднородной жидкостью; рассмотреть случай, когда на поверхности присутствуют тонкие пленки посторонних фаз, указать способы их обнаружения и исключения связанных с ними эффектов.
6. Обобщить теорию крутильного вискозиметра на случай, когда эксперименты проводятся во внешнем магнитном поле. Оценить величину магнитогидродинамических эффектов. Проверить количественные возможности теории сравнением с экспериментом. Рассмотреть возможность определения в такого рода экспериментах электропроводности расплавов.
7. Разработать теорию конвективного массопереноса с поверхности вращающегося диска в присутствии внешнего магнитного поля. Выполнить численные эксперименты по оценке вызываемых полем эффектов.

Научная новизна.

1. Предложен метод математического моделирования экспериментов с крутильным вискозиметром Швидковского, основанный на точном решении полной вискозиметрической системы уравнений и способный решать как прямую, так и обратную задачи вискозиметрии, а также метод численного решения основного вискозиметрического уравнения, не использующий приближений, принятых в стандартных методиках обработки вискозиметрических данных.
2. Развита теория крутильного вискозиметра, заполненного стратифицированной жидкостью. Специально исследован случай, когда на поверхности однородной жидкости находится тонкая вязкая пленка.
3. Разработана теория крутильного вискозиметра, помещенного во внешнее

однородное магнитное поле осевого направления. Аналитическое решение получено как в безиндукционном приближении (обычно оправдывающемся на практике), так и с учетом индуцированного поля. Выполнены эксперименты, подтвердившие количественную справедливость предложенной теории и возможность измерения электропроводности.

4. Получено точное решение задачи о массообмене между проводящей жидкостью и поверхностью погруженного в нее вращающегося диска в присутствии осевого магнитного поля. Показано, что в этом случае сохраняется свойство поверхности диска быть равнодоступной в диффузионном отношении.
5. Показано, что момент сил, возбуждаемый вращающимся магнитным полем в цилиндре, заполненном проводящей жидкостью, не зависит от ее вязкости только в пределе исчезающие малых чисел Гартмана.

Научная и практическая значимость работы.

1. Решение прямой задачи вискозиметрии с помощью предложенного метода математического моделирования позволяет по измеряемым параметрам колебаний восстанавливать не только вязкость расплава, но и еще один дополнительный параметр теории, например, плотность жидкости. Поскольку последняя может быть достаточно точно измерена в независимых экспериментах, то это дает возможность проверки внутренней согласованности подлежащих обработке данных: расхождение между восстановленным значением плотности и известным из других источников будет указывать на присутствие в выполненных экспериментах методической ошибки, какую бы причину она не имела. Решение обратной задачи вискозиметрии дает возможность планирования экспериментов, например, с целью повышения чувствительности установки, надежности и точности получаемых результатов. Если указанные методические требования соблюdenы, тогда предложенный численный метод решения основного вискозиметрического уравнения позволяет определить вязкость расплава со значительно большей точностью, нежели применяемые иные на практике.
2. Теория крутильного вискозиметра, заполненного стратифицированной жидкостью, дает возможность: а) идентифицировать условия на границе раздела расплав-газ и должным образом учесть эффекты, связанные с существованием на поверхности вязких пленок произвольной природы, б) изучать механические характеристики поверхностных пленочных фаз, в) наблюдать процессы, ведущие к нарушению однородности жидкости (например, процессы расслоения) или напротив - к ее гомогенизации

(например, процессы седиментации включений).

3. Учет магнитогидродинамических эффектов в экспериментах с крутильным вискозиметром позволяет: а) дать адекватную интерпретацию экспериментов, выполненных с целью изучения влияния магнитного поля на вязкость расплава, и исключить, таким образом, иные толкования их результатов, б) оценить влияние паразитных магнитных полей (создаваемых, например, нагревательными элементами установки) на результаты экспериментов, в) предложить новый бесконтактный метод измерения электропроводности расплавов, совместимый с измерением их вязкости, а также и с измерением плотности.
4. Решение задачи о массопереносе с поверхности вращающегося диска в присутствии осевого магнитного поля позволяет расширить возможности известного метода "вращающегося диска", создав теоретические основы для изучения влияния магнитного поля на кинетику гетерогенных химических реакций твердое тело - проводящий расплав, для изучения закономерностей растворения в расплавах твердых тел, обладающих магнитным порядком.

Апробация работы. Основные материалы работы докладывались на VII Всесоюзной (Челябинск, 1990 г.) и VIII Всероссийской (Екатеринбург, 1994 г.) конференциях по строению и свойствам металлических и шлаковых расплавов, на совещании "Взаимосвязь жидкого и твердого металлических состояний" (Свердловск, 1987 г.), на I Украинской конференции "Структура и физические свойства неупорядоченных систем" (Львов, 1993 г.), на Республиканской научно-технической конференции "Физико-химия металлических и оксидных расплавов" (Екатеринбург, 1993 г.), на семинаре "Структура и свойства шлаковых расплавов" (Курган, 1984 г.), на семинаре "Компьютерное моделирование физико-химических свойств стекол и расплавов" (Курган, 1994 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 20 работ.

Объем работы. Диссертация состоит из введения и четырех разделов, заключения и трех приложений. Она изложена на 213 страницах, содержит 41 рисунок и 15 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Представленный во Введении к диссертации анализ экспериментальных данных показывает, что результаты измерения вязкости металлических расплавов являются, с одной стороны, наиболее противоречивыми, а с другой - чаще всего обнаруживают аномалии в зависимостях от температуры и состава. Большинство из имеющихся к настоящему времени данных по вяз-

кости жидких металлов получено с помощью кругильного вискозиметра Швидковского, имеющего очевидные преимущества перед другими вискозиметрическими методиками, если речь идет об изучении высокотемпературных и химически агрессивных жидкостей, подобных металлическим расплавам. Неоднократно выполнявшийся в литературе формальный анализ погрешностей эксперимента приводит при нынешних инструментальных возможностях к оценкам этих погрешностей, не превышающим нескольких процентов. Более того, применение метода к исследованию низкотемпературных и инертных жидкостей показывает, что можно достичь повышения его точности на два - три порядка, что и доказывает его потенциальные возможности как достаточно точного абсолютного метода и подтверждает справедливость лежащей в его основе вискозиметрической теории.

Таким образом, возможны следующие ситуации, ведущие к противоречивости результатов, получаемых этим методом при исследованиях жидких металлов:

1. Условия опытов удовлетворяют требованиям существующей методики. но свойства жидкых металлов таковы, что не удается добиться идентичности используемых в экспериментах образцов. Последнее может быть связано с недостаточно точным контролем состояния образцов - их температуры, химического состава, степени достижения равновесия. Если причиной противоречий являются различия в составе образцов, тогда мы имеем дело либо с физическим феноменом - катастрофическим влиянием примесей на вязкость жидких металлов, либо с существенным изменением состава образцов в ходе экспериментов, обусловленным взаимодействием расплава с материалом удерживающего его сосуда (тигеля) и атмосферой установки. Из материалов ведущихся дискуссий видно, однако, что в достаточно тщательно выполненных экспериментах состав образца если и изменяется, то незначительно, и поэтому вторая возможность может быть либо исключена, либо сведена к первой. Что касается контроля равновесности образца, то необходимо признать, что существуют ситуации, когда, несмотря на выполняемую в экспериментах "выдержку" в течение десятков минут или даже часов, образец не успевает достичь состояния равновесия. Это означает, что в жидких металлах существуют процессы релаксации с макроскопически большими временами. Из известных таковым может быть процесс взаимодействия расплава с тиглем или атмосферой, но в этом случае дело сводится опять к вопросу о влиянии примесей. В противном случае мы имеем дело еще с одним феноменом, поскольку обычно (не без оснований) полагают, что жидкие металлы относятся к классу простых жидкостей, где такие эффекты "памяти" отсутствуют.

2. Альтернативная возможность состоит в том, что в жидких металлах отмеченные выше феномены отсутствуют, а невоспроизводимость результатов имеет методическую природу. Это означает, что либо нарушаются некоторые требования вискозиметрической теории, либо необходимые для обработки экспериментальных данных параметры определены некорректно. В стандартных вискозиметрических методиках надежность результатов гарантируется при выполнении определенных условий, накладываемых на параметры экспериментальной установки и на свойства исследуемой жидкости - ее вязкость и плотность. Поэтому, вообще говоря, набор параметров установки, обеспечивающий и точное определение вязкости одной жидкости, может оказаться непригодным для исследования другой. Поскольку вязкость до опыта неизвестна, это создает объективные трудности для выполнения экспериментов в оптимальных условиях и служит источником методических погрешностей. В такой ситуации нам представляется полезным, во-первых, разработать схему расчета вязкости, позволяющую ослабить требования, предъявляемые стандартными методиками расчета, а во-вторых, найти способ предвидеть результаты экспериментов на установке с данными параметрами, когда известны примерные границы, в которых лежат свойства исследуемой жидкости. Первое сделать тем более необходимо, что некоторые из ограничений стандартных схем имеют не физическую, а математическую природу и связаны со стремлением иметь для расчета вязкости вместо громоздких уравнений точной теории (созданной в "докомпьютерную" эпоху) простые соотношения, пригодные для счета "вручную".

Далее, особенностью жидких металлов является их высокая реакционная способность. Поэтому естественно предположить, что нарушение методики выполнения экспериментов может происходить также из-за присутствия продуктов взаимодействия металла с его окружением в виде обособленных фаз, образовавшихся либо в жидком состоянии, либо унаследованных из твердого. Эти фазы могут быть диспергированы по объему образца (например, в виде неметаллических включений) или сосредотачиваться по его границам, в том числе и на границе с газом, образуя на ней пленки (например, окисные). Если "примесные" фазы диспергированы по объему, то наибольшее влияние на результаты экспериментов рассматриваемого типа они будут оказывать в случае, когда будут находиться в твердом состоянии. Тогда, как известно, эффективная вязкость такой суспензии будет превосходить вязкость самого расплава на величину, пропорциональную объемной доле диспергированной твердой фазы, которая в свою очередь должна быть пропорциональна концентрации примесей и поэтому мала в хорошо

поставленных экспериментах. С помощью такого механизма можно объяснить небольшие отклонения в экспериментальных данных, в том числе и некоторые аномалии. В последнем случае придется предположить, что существуют температуры, при которых происходит резкое изменение объемной доли твердой фазы, например, в результате ее интенсивного растворения, выпадения из раствора и т. п.. Более существенной представляется, однако, вторая возможность, когда "примесные" фазы образуют поверхностные пленки. Здесь, как известно, роль примесей в формировании свойств поверхностных фаз действительно является катастрофической. Состав и, следовательно, свойства образований на поверхности металла могут весьма сильно отличаться от таковых в его объеме. Нетрудно представить ситуацию, когда эти пленки, будучи весьма тонкими и поэтому трудно наблюдаемыми, окажутся существенно более вязкими, чем основной расплав, и поэтому будут в состоянии изменить картину течения расплава в своей окрестности. С точки зрения теории метода это означает изменение граничного условия на поверхности раздела расплав - газ. В стандартной теории рассматривается только два типа таких условий: условия, отвечающие свободной границе, и условия, описывающие контакт с твердой поверхностью - крышкой. Ясно, что они являются лишь предельными случаями из всего многообразия ситуаций, могущих возникнуть на поверхности металла в реальных экспериментах. Целесообразно обобщить теорию крутильного вискозиметра до возможности учета таких плеоночных эффектов. С другой стороны, это одновременно дало бы возможность изучать механические свойства таких пленок, о которых в настоящее время почти ничего не известно.

Высокие температуры в экспериментах с жидкими металлами достигаются обычно за счет пропускания больших ($\text{до } 10^3 \text{ A}$) токов через нагревательные элементы различной формы. В этих условиях трудно избежать появления в объеме образца паразитных магнитных полей. Учитывая высокую электропроводность расплавов, можно предположить, что создаваемые этими полями электромагнитные силы окажутся в состоянии повлиять на характер течения в вискозиметре и исказить результаты опытов. Поэтому представляется целесообразным оценить величину таких - магнитогидродинамических - эффектов. Это тем более необходимо сделать в связи с известными экспериментами, где магнитное поле создавалось специально с целью изучения его влияния на вязкость, и в особенности - с интерпретацией их результатов.

Вопрос о влиянии магнитного поля на свойства металлических расплавов ставится не только в связи с их вязкостью. Известны экспериментальные работы по электрическому сопротивлению, изучению особенностей

контактного плавления, характеристик массопереноса на границе твердое тело - жидкость. Истолкование этих данных часто нельзя признать убедительным. Например, в последнем случае экспериментальные данные, полученные методом врачающегося диска, объясняют сильной зависимостью коэффициентов диффузии и констант скорости растворения от индукции приложенного поля: они изменяются в несколько раз в полях, составляющих десятые доли Тесла. Столь сильная зависимость является неожиданной с точки зрения теории процессов переноса и поэтому прежде, чем делать из этих фактов далеко идущие выводы, естественно попытаться найти им другое объяснение. Первое, что здесь должно быть сделано, - это корректный учет магнитогидродинамических эффектов. Только после выделения их вклада в наблюдаемые на опыте величины можно будет судить о влиянии магнитного поля непосредственно на сами параметры жидкости или параметры ее взаимодействия с твердым телом.

Перечисленными здесь обстоятельствами объясняются сформулированные выше цели настоящего исследования.

Для их реализации обратимся прежде всего к анализу теории кругильного вискозиметра (глава I). Швидковским Е. Г. найдено решение следующей задачи, послужившее теоретической основой применяемых ныне методик измерения вязкости.

Пусть цилиндр высоты $2H$ и радиуса R , имеющий относительно собственной оси момента инерции K , подвешен вдоль этой оси на упругой нити, так что период и декремент его собственных установившихся затухающих колебаний оказываются равными соответственно τ_0 и δ_0 . Требуется предсказать период τ и декремент затухания δ колебаний, когда цилиндр будет заполнен вязкой несжимаемой жидкостью, имеющей кинематическую вязкость ν и плотность ρ . Решение находится для режима установившихся затухающих колебаний в предположении, что единственной существенной компонентой скорости жидкости является азимутальная. В результате вискозиметрическая система уравнений, связывающих параметры жидкости (вязкость и плотность) с наблюдаемыми параметрами колебаний (декрементом и периодом) и параметрами установки, имеет вид:

$$L' = K \cdot p \cdot \left(1 + \frac{p_0^2 + q_0^2}{p^2 + q^2} \right) - 2K \cdot p_0, \quad (1)$$

$$L'' = K \cdot q \cdot \left(1 - \frac{p_0^2 + q_0^2}{p^2 + q^2} \right), \quad (2)$$

где $q = 2\pi/\tau$, $p = \delta/\tau$ - соответственно, циклическая частота и коэффициент

затухания колебаний подвесной системы установки, заполненной расплавом, а те же величины, помеченные индексом "o", относятся к колебаниям системы пустой; L' и L'' - действительная и мнимая части так называемой функции трения, определяемой посредством соотношения

$$P = L \frac{d\alpha}{dt}, \quad (3)$$

в котором P - момент вязких сил, действующих на цилиндр со стороны жидкости, α - (комплексный) угол поворота цилиндра. В рассматриваемых условиях функция трения представляется как

$$L = L_1 + L_2, \quad (4)$$

где функции L_1 и L_2

$$L_1 = -2\nu M \beta \frac{J_2(\beta)}{J_1(\beta)}, \quad L_2 = 4 \frac{M k^2}{H} \nu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ih(\theta_n H)}{\mu_n^2 \theta_n^3} \quad (5)$$

описывают вклады от боковой поверхности цилиндра и его торцов соответственно (здесь мы считаем, что жидкость смачивает верхнюю крышку цилиндра); M - масса образца, $J_i(z)$ бесселева функция первого рода i -го порядка, $k = p + iq$ - комплексная частота колебаний,

$$\theta_n^2 = \mu_n^2 - \frac{k}{\nu}, \quad \beta = R \sqrt{\frac{k}{\nu}},$$

а величины μ_n есть положительные корни уравнения $J_1(xR) = 0$.

Соотношения (1-2) или им эквивалентные служат основой для создания конкретных методик обработки экспериментальных данных. В частности, если известны параметры установки и измерены параметры колебаний, тогда из системы (1-2) можно определить оба параметра жидкости - вязкость и плотность. Если же плотность известна из других экспериментов, то для отыскания вязкости достаточно только одного из этих уравнений.

Заметим, что величины q_o и p_o не могут быть измерены непосредственно, поскольку по определению они характеризуют колебания пустого цилиндра (точнее, всей подвесной системы), но при той же нагрузке на нить, которая создается цилиндром, заполненным жидкостью. Иначе говоря, упругость нити на кручение может зависеть от нагрузки (например, вследствие деформации нити). То же можно сказать и относительно вклада в δ_o процессов внутреннего трения в нити. Простейшее приближение заключается в пренебрежении этой зависимостью, однако справедливость такого (или иного) подхода требует обоснования. Чтобы частично обойти эту трудность, Швидковский исключает из системы (1 - 2) величину q_o , получая в результате уравнение

$$L_m \equiv L' + \frac{p}{q} L'' = 2K(p - p_o). \quad (6)$$

Проблемы, связанные с p_o , остаются, но они, по-видимому, не так серьезны, поскольку в эксперименте можно добиться, чтобы было $p_o \ll p$.

Решение уравнения (6) с функцией треня (4,5) представляет собой довольно громоздкую в вычислительном отношении задачу. Поэтому после того, как Швидковским было найдено решение (1, 2, 6) задачи о крутильном вискозиметре, значительные усилия были затрачены на поиск простых расчетных схем - "рабочих уравнений", пригодных для расчетов "вручную". В настоящее время наиболее распространены такие схемы, предложенные самим Е.Г. Швидковским, R.Roscoe, J.M. Gouvel, J. Kestin и некоторые другие. В широко использующихся в отечественной практике схемах Швидковского, например, возможность упрощения расчетов основана на использовании следующих допущений

1. Полагается, что $H/R \geq 1,85$ с тем, чтобы в выражении (5) можно было гиперболические тангенсы заменить единицей.

2. Параметр $\xi = R(2\pi/t\dot{\gamma})^{1/2}$ либо мал ($< 4,2$ - "сильновязкое" приближение), либо велик (> 10 - "слабовязкое" приближение), что позволяет использовать асимптотические представления для бесселевых функций.

3. В "слабовязком" приближении полагается, что параметр $x = p/q = \delta/2\pi$ мал и поэтому зависящие от него функции можно представить в виде ряда, ограничившись лишь линейными слагаемыми.

Аналогичные предположения положены в основу и других расчетных схем. Недостатки этих схем связаны с тем, что, во-первых, они накладывают некоторые условия на выбор параметров установки, которые не всегда легко выполнить в высокотемпературных экспериментах, во-вторых, выполнение условий 2 и 3 нельзя проверить до опыта, поскольку они зависят от вязкости расплава, наконец, перечисленные приближения являются источником систематических погрешностей, величину которых весьма трудно оценить по результатам обработки каких-либо экспериментальных данных.

Развитие вычислительной техники приводит к непрерывной девальвации того, что называется трудоемкостью расчетов, и позволяет теперь решать вискозиметрические уравнения без использования приближений математического характера. Это относится как к уравнению (6), так и к полной системе уравнений (1, 2). Для использования последней на практике нужно прежде решить вопрос о корректном определении величины t_0 .

В работе описаны численные процедуры решения обеих задач: уравнения (6) и системы (1, 2). Не останавливаясь на математических подробностях реализованных схем, скажем только, что уравнение (6) решается

итерационным методом Ньютона. Необходимая для этого функция трения (4, 5) рассчитывается с помощью прямого суммирования фигурирующих в ней рядов и аккуратного вычисления специальных функций, а задача (1, 2) сводится к эквивалентной экстремальной задаче, которая затем решается стандартными методами оптимизации (методом Хука-Дживса). В отношении системы (1, 2) возможны две различные постановки задачи:

Задача 1. Прямая задача: заданы параметры установки (ПУ), измерены параметры колебаний (ПК), требуется определить параметры жидкости (ПЖ).

Задача 2. Обратная задача - задача планирования эксперимента: заданы ПУ, известны оценки для ПЖ, требуется предсказать ПК.

Располагая этим комплексом расчетных инструментов, мы получаем следующие возможности.

Во-первых, решение обратной задачи вискозиметрии позволяет предсказывать ПК с весьма высокой точностью, ограниченной только погрешностью используемых численных методов. Поэтому сравнение результатов (достаточно тщательных) экспериментов и упомянутых предсказаний может служить тестом для проверки самой вискозиметрической теории. В самом простом случае можно, например, промоделировать встречающиеся на практике ситуации и оценить для них работоспособность стандартных методик расчета вязкости. Такую оценку можно сделать и для предлагаемого численного метода решения уравнения (6) и тем самым ответить на вопрос, насколько он расширяет возможности эксперимента в смысле свободы выбора параметров установки.

Во-вторых, решение задачи 1 позволяет реализовать возможность восстановления по опытным данным не одного, а двух параметров жидкости - вязкости и плотности. Если плотность известна заранее, тогда мы получаем тест для проверки того, насколько корректно и согласованно (с вискозиметрической теорией) определены все оставшиеся параметры задачи. Это весьма важно для суждения о причинах невоспроизведимости экспериментальных данных о вязкости жидких металлов. В частности, если нет сомнений в достаточно точном определении этих оставшихся параметров, тогда несоответствие в данных по плотности будет указывать на нарушение условий применимости самой вискозиметрической теории, как говорилось выше. Если же будет показано, что выполняемые эксперименты выдерживают такую проверку, но противоречия в результатах расчета вязкости остаются, тогда можно считать доказанным существование обсуждавшихся выше феноменов. С другой стороны, бывает так, что плотность расплава неизвестна (часто это случается при исследовании сплавов в широкой области температур). Тогда решение задачи 1 если и не приведет к пре-

циональному определению этой величины, то во всяком случае позволит избежать лишних ошибок в определении вязкости.

Приведенные рассуждения показывают, как должны быть выполнены эксперименты для выяснения причин противоречий в данных по вязкости. Пока такие опыты готовятся, обратимся к анализу существующих методик и существующих экспериментов с помощью предложенных средств.

В работе выполнен анализ точности предложенного численного метода решения уравнения (6) в сравнении с обычно применяемыми на практике расчетными схемами Швидковского, Роско и Гроувела-Кестина. В качестве "экспериментальных" использовались результаты моделирования параметров колебаний при различном выборе параметров установки и параметрах жидкости, изменяющихся в области, свойственной жидким металлам. Разница между "истинным" (известным заранее) и восстановленным с помощью упомянутых схем значением вязкости имеет смысл погрешности метода расчета как такового, поскольку не связана ни с ошибками эксперимента, ни с адекватностью условиям опыта самой вискозиметрической теории. Оказалось, что:

1. Если условия 1 и 2 применимости "слабовязкой" схемы Швидковского, сформулированные определенно, выполнены, тогда ее погрешность зависит от параметра $x = p/q = \delta/2\pi$, фигурирующего в условии 3, и составляет десятые доли процента, когда $x \leq 0,05$, достигая величины порядка процентов, когда $x \sim 0,1$. Это позволяет придать количественный смысл и условию 3, сформулированному Швидковским лишь как требование $x << 1$. При нарушении условия 2, которое нельзя проверить до опыта, погрешность обсуждаемой схемы быстро возрастает, достигая величин порядка десяти процентов.
2. Успех применения методик Роско и Гроувела-Кестина сильно зависит от того, насколько мало отношение δ_0/δ . Если оно меньше 10^{-4} , тогда точность этих схем не уступает точности схемы Швидковского. Однако при $\delta_0/\delta \sim 10^{-2}$ их погрешность составляет уже более 10%, что совершенно неудовлетворительно. При $\delta_0 = 0$ погрешность становится весьма малой - на два-три порядка меньше погрешности схемы Швидковского.
3. Точность численного метода решения уравнения (6) в том виде, как он реализован в работе, составляет $10^{-4} + 10^{-3}\%$ в тех областях, где пригодны и приближенные методики, однако он остается работоспособным и там, где эти методики непригодны - вплоть до малой окрестности точки v_m - точки, где декремент теряет чувствительность к изменению вязкости (см. ниже).

Таким образом, все рассмотренные приближенные методики расчета

вязкости имеют вполне удовлетворительную точность, если только соблюдаются некоторые условия (может быть и сформулированные неявно). При нарушении любого из них погрешность расчетной схемы резко возрастает безотносительно к качеству самих экспериментальных данных. Предлагаемый численный метод практически исключает погрешности, связанные с выбором расчетной схемы и не требует выполнения никаких дополнительных условий.

Поскольку некоторые из условий применимости приближенных расчетных схем зависят от (неизвестной до опыта) величины вязкости, всегда существует опасность их нарушения. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

На рис. 1 показаны качественно (в некоторых условных единицах) зависимости от вязкости действительной и мнимой частей функции трения и модифицированной функции трения L_m , определенной в (6).

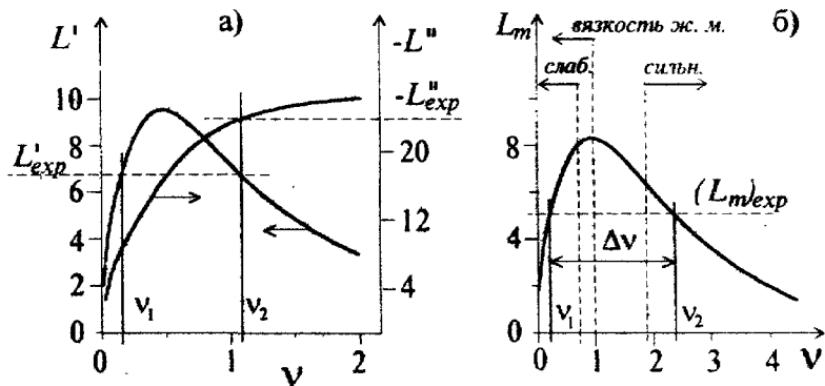


Рис. 1. Графическое решение системы уравнений (1, 2) (а) и уравнения (6) (б). Величины с индексом "exp" означают определяемые на опыте значения правых частей этих уравнений

Видно, что при заданной плотности уравнение (1) имеет два решения (v_1 и v_2), тогда как уравнение (2) - только одно, скажем v_3 . Если вискозиметрические данные согласованы, тогда это последнее должно совпадать с одним из значений v_1 или v_2 (на рисунке $v_3 = v_2$), что и позволяет выделить из v_1 и v_2 единственное решение системы (1, 2). Поведение функции L_m (рис. 1б) весьма похоже на поведение действительной части функции трения, что видно и из ее определения (6), поскольку параметр $p/q = \delta/2\pi$ мал. Поэтому уравнение (6) имеет два решения, v_1 - "слабовязкое" (по терминологии Швидковского), располагающееся левее максимума L_m , и v_2 - "сильновязкое", располагающееся правее. Приближенные схемы расчета вязкости, о

которых шла речь выше, позволяют найти решение этого уравнения, когда (при заданных ПУ) вязкость либо достаточно мала, либо велика. Границы применимости этих приближений показаны на рисунке вертикальными пунктирными линиями. Наконец, вертикальным же пунктиром показана условная верхняя граница вязкости жидких металлов. Заметим также, что, как видно из уравнений (1), (2) и (6), поведение функций $L'(v)$ и $L_m(v)$ подобно поведению декремента затухания $\delta(v)$, а поведение функции $-L''(v)$ - поведению периода колебаний $\tau(v)$. Поэтому определение вязкости на основе уравнений (1) или (6) будем называть определением "по декременту затухания", а на основе (2) - "по периоду". При изменении параметров установки происходит деформация функции трения, вследствие чего точка, отвечающая истинной вязкости расплава, может попасть из слабовязкой области в переходную, а затем в сильновязкую или наоборот.

Выполненный в работе анализ вискозиметрических уравнений показывает, что

1. При определении вязкости по декременту затухания возникает проблема выбора между "сильно"- и "слабовязким" решением: существует область параметров установки, где этот выбор нельзя сделать из соображений "порядка величины". Область параметров установки, встречающихся на практике, пересекается с упомянутой выше и поэтому в таких ситуациях нужны дополнительные обоснования выбранного решения.
2. В рамках самой теории крутильного вискозиметра можно сделать выбор между решениями. проверив, какое из них удовлетворяет также и второму уравнению (для периода). Однако, для этого потребуется корректно определить величину τ_o . Тогда можно будет одновременно рассматривать решения уравнений (1) и (2) с целью контроля корректности выполненных экспериментов.
3. При изменении термодинамического состояния расплава (например, вследствие изменения температуры или состава) его вязкость изменяется в некотором интервале шириной d_v . Положение этого интервала относительно максимума кривой $L_m(v)$ и показанных на рис. 1б областей зависит от выбора ПУ. Проблем с обработкой экспериментальных данных с помощью стандартных методик не возникает только в случае, когда этот интервал целиком лежит либо в "сильно-", либо в "слабовязкой" области. Во всех других ситуациях некритическое использование стандартных расчетных схем может быть причиной разнообразных "аномалий" на зависимостях вязкости от соответствующего термодинамического параметра. Предложенный в работе численный метод позволяет найти оба решения уравнения (6) "почти везде" - за исключением малой окрестности точки v_m .

где достигается максимум функции $L_m(\nu)$. В этой точке чувствительность декремента к изменению вязкости обращается в ноль и поэтому невозможность найти решение имеет физические, а не математические причины.

4. Анализ функций чувствительности C_δ и C_τ декремента и периода колебаний к изменению вязкости расплава показывает, что, во-первых, при фиксированных ПУ они существенно зависят от вязкости и поэтому, если интервал d_ν достаточно широк, тогда значения ν , определенные вблизи его краев, будут неравноточными, что может приводить к аномалиям типа "повышенного разброса данных"; во-вторых, два способа определения вязкости (по декременту и периоду) взаимно дополняют друг друга: там, где чувствительность декремента обращается в ноль, чувствительность периода достигает максимума. Это - еще один аргумент в пользу применения при обработке данных системы уравнений (1, 2):

Иллюстрацией к сказанному в пункте 3 служит рис. 2, где представлены результаты моделирования экспериментов по определению политеории вязкости расплава "железа", то есть, расплава, (динамическая) вязкость и плотность которого описываются соотношениями:

$$\lg \eta = 1,951/T - 2,327, \quad \rho = 9,306 - 1,234 \times 10^{-3}T, \quad (7)$$

где T - абсолютная температура.

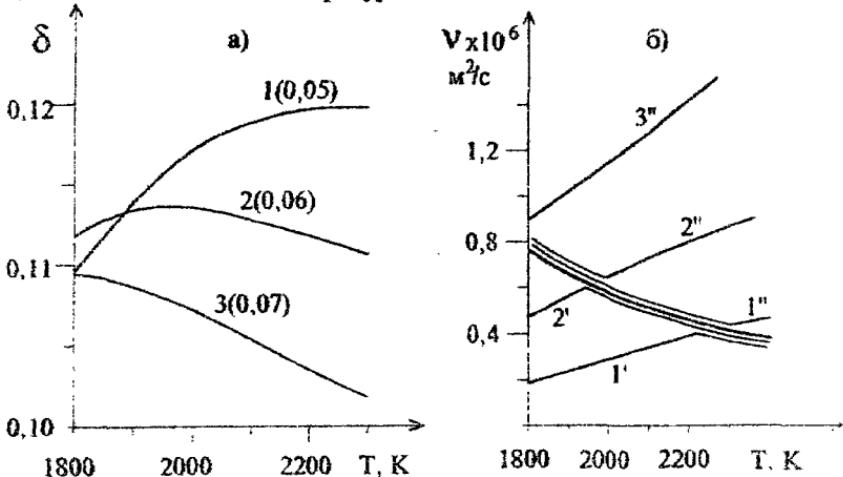


Рис.2. Зависимость от температуры а) декремента, б) слабовязкого (один штрих у номера кривой) и сильновязкого (два штриха) решений уравнения (6) при различном выборе диаметра нити подвеса (указан в мм на рис. 2а рядом с номером кривой)

Здесь показано, как небольшое варьирование одного из параметров установки (в данном случае - диаметра нити подвеса) при фиксированных ос-

тальных параметрах ведет к изменению самого характера зависимости $\nu(T)$: от монотонно возрастающего (кривая 1) к "аномальному" (кривая 2), а затем к "нормальному" (кривая 3). Результаты обработки "экспериментальных" данных рисунка 2а предложенным численным методом наглядно демонстрируют (рис. 2б), как происходит сопряжение "сильно-" и "слабовязкого" решений и какие "аномалии" в поведении вязкости могут появиться, если слишком доверять какому-либо одному из них. Наиболее проста ситуация для кривой 3. Здесь "слабовязкое" решение совпадает с истинным во всем рассматриваемом интервале температур, тогда как "сильновязкое" приближение является целиком аномальным в том смысле, что $\nu(T)$ здесь монотонно растущая функция. Поучителен результат обработки кривой 2. Здесь примерно до 1970 К истинная зависимость совпадает с "сильновязким" решением, а выше этой температуры - со "слабовязким". Для удобства кривые 2' и 2" на этих участках показаны рядом с истинной кривой $\nu(T)$, хотя на самом деле они с ней неразличимы. Наконец, в случае кривой 1 переход сильновязкого решения в слабовязкое происходит вблизи края изучаемого температурного интервала, и обсужденные выше эффекты не так ярко выражены. На практике, однако, ситуация более сложная, поскольку используемые в экспериментальных работах приближенные методы расчета вязкости имеют достаточную точность лишь во вполне определенных и непересекающихся для данного набора ПУ областях изменения вязкости, вследствие чего сшивание решений приведет к специфической аномалии, связанной с невозможностью гладкого сопряжения "сильно-" и "слабовязких" асимптотик.

Предлагаемое в данной работе решение прямой задачи вискозиметрии на основе системы уравнений (1-2) автоматически приводит к единственному решению и избавляет нас от использования каких-либо апрорных предположений относительно вида зависимости $\nu(T)$, которые необходимо делать, если решается уравнение (6) каким угодно методом - точным или приближенным. Для применения этого подхода на практике нужно учесть зависимость крутильной жесткости подвеса от натяжения нити. Эту зависимость можно установить экспериментально, используя предложенный в работе метод "двух дисков", являющийся некоторым обобщением метода "дополнительного диска", применяемого для определения момента инерции подвесной системы. Пусть τ_0 , χ_0 , K_0 , T_0 соответственно период колебаний, крутильная жесткость, момент инерции и нагрузка на нить, отвечающие пустому подвесу; пусть K_i и T_i ($i=1,2$) - момент инерции и нагрузка на нить, созданная i -м из имеющихся в нашем распоряжении двух дисков, а τ_i и χ_i соответственно период колебаний и крутильная жесткость

подвеса, когда этот (i -й) дополнительный диск закреплен на оси подвесной системы. Тогда справедливы уравнения:

$$\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{K_0}{\chi_0}}, \quad \tau_i = 2\pi \sqrt{\frac{K_0 + K_i}{\chi_i}}, \quad (i=1,2). \quad (8)$$

В них неизвестными являются четыре величины K_0 , χ_0 и χ_i . Для замыкания системы (8) предположим, что в области интересующих нас нагрузок T зависимость $\chi(T)$ является линейной и поэтому можно записать:

$$\chi_i = \chi(T_0 + T_i) = \chi(T_0) + \left. \frac{\partial \chi}{\partial T} \right|_{T=T_0} T_i, \quad T_i = \chi_0 + \alpha T_i. \quad (9)$$

Величины T_i ($i=1, 2$) достаточно точно могут быть измерены простым взвешиванием дисков. Тогда система (8) оказывается замкнутой относительно трех неизвестных: K_0 , χ_0 и α . Если предположение о линейности зависимости $\chi(T)$ окажется недостаточным, в (9) можно учесть квадратичные по напряжениям T_i слагаемые и ввести еще один дополнительный коэффициент, для определения которого потребуются эксперименты с третьим дополнительным диском. В результате получим метод "трех дисков" и т.д.. Если параметры K_0 , χ_0 и α определены, тогда интересующий нас период колебаний t_0^* может быть вычислен по формуле

$$t_0^* = 2\pi \sqrt{\frac{K_0}{\chi_0 + \alpha T}}$$

где T - напряжение нити, создаваемое образцом.

Предлагаемый метод позволяет определять также момент инерции K_0 пустого подвеса более корректно, чем упоминавшийся метод дополнительного диска, поскольку в последнем также пренебрегается изменением крутильной жесткости подвеса от дополнительного напряжения, созданного этим диском. В работе приводятся экспериментальные данные, показывающие, что аттестация упругих свойств нити с помощью метода "двух дисков" является необходимой.

Обратимся теперь к рассмотрению факторов, не учитываемых в стандартных вискозиметрических теориях, но часто присутствующих в экспериментах над жидкими металлами.

В связи с возможностью образования на поверхности металлического расплава посторонних ("шлаковых") фаз, попытаемся учесть их влияние на результаты вискозиметрических экспериментов (глава 2). Для этого рассмотрим вначале задачу о вискозиметре, заполненном двумя несмешивающимися жидкостями. Пусть их кинематические вязкости равны ν_1 и ν_2 , а плотности - ρ_1 и ρ_2 ; толщина слоя первой жидкости равна h_1 , а второй - h_2 . При решении будем использовать те же приближения, что и Швидков-

ский. Тогда, переходя к безразмерным переменным и параметрам

$$\begin{aligned} r &= r^*/R, \quad z = z^*/h_i, \quad t = t^*/\tau = \omega^*/2\pi, \\ \varepsilon &= h_i/R, \quad V_i = V_i^*/(\Omega_0 R), \quad \gamma = h_i/R \end{aligned} \quad (10)$$

и замечая, что азимутальную скорость жидкости в i -ом слое можно представить как $V_i(r, z, t) = v_i(r, z)e^{-\alpha t}$, получаем, что уравнения движения жидкостей (уравнения Навье-Стокса) примут вид

$$-\alpha v_i = \frac{1}{Re_i} \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_i}{\partial r} - \frac{v_i}{r^2} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial z^2} \right), \quad (i = 1, 2). \quad (11)$$

Здесь Ω_0 - вещественная начальная амплитуда угловой скорости цилиндра (величина несущественная для дальнейшего); $\alpha = \delta + 2\pi i$ - комплексная частота колебаний; $Re_i = R^2/\tau v_i$ - число Рейнольдса течения i -ой жидкости. Границные условия для уравнения (11) в обозначениях (10) есть

$$v_i(l, z) = 1, \quad v_i(r, 0) = r, \quad v_1(r, l) = v_2(r, l),$$

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial z} \right|_{z=l} = \kappa \left. \frac{\partial v_2}{\partial z} \right|_{z=l}, \quad \left. \frac{\partial v_2}{\partial z} \right|_{z=l+\epsilon} = 0.$$

Они имеют обычный (в гидродинамике) смысл (здесь $\kappa = (\rho_2 v_2)/(\rho_1 v_1) = \eta_2/\eta_1$ - отношение динамических вязкостей). Найденное в работе решение сформулированной граничной задачи для поля скорости позволяет рассчитать действующий на цилиндр со стороны жидкости момент вязких сил и, пользуясь определением (3), вычислить функцию трения L . Результат имеет вид

$$L = 2\pi\eta_i R^3 \cdot \gamma \cdot [P_1 + P_2 + P_3]. \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} P_1 &= -k_1 \frac{J_2(k_1)}{J_1(k_1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n J_0(\gamma_n) \left[a_m \frac{ch(\lambda_m) - 1}{\lambda_m} + b_m \frac{sh(\lambda_m)}{\lambda_m} \right], \\ P_2 &= \kappa \left[-k_2 \frac{J_2(k_2)}{J_1(k_2)} \epsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n J_0(\gamma_n) a_{n2} \frac{sh(\epsilon\lambda_{n2})}{\lambda_{n2}} \right], \\ P_3 &= \frac{1}{\gamma^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\gamma_n)\lambda_m}{\gamma_n} [a_m ch(\lambda_m) + b_m sh(\lambda_m)]. \end{aligned}$$

В этих соотношениях

$$k_i^2 = \alpha Re_i, \quad \lambda_m^2 = \gamma^2 (\gamma_m^2 - \alpha Re_i).$$

а γ_n - корни уравнения $J_1(x)=0$. Начиная с этого момента, все оставшиеся рассуждения совпадают с выполненными Швидковским и приводят к тем же вискозиметрическим уравнениям (1, 2) (но с функцией трения (12)).

Исходя из только что полученного решения, рассмотрим важный час-

тный случай, когда на поверхности расплава находится тонкая (и поэтому трудно наблюдаемая), но вязкая (и поэтому "механически существенная") пленка шлаковой фазы. В этом случае $\varepsilon \ll 1, k > 1$. Тогда, пренебрегая в (12) слагаемыми, пропорциональными ε или $1/k$, но удерживая слагаемые, пропорциональные произведению $k\varepsilon$ (назовем эту величину динамической толщиной пленки) можно получить следующее выражение для L :

$$L = 2\pi\eta_r R^3 \gamma \left\{ -k_i \frac{J_1(k_i)}{J_1(k_r)} + 2k_i^4 \gamma^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(k\varepsilon) \gamma^2 r^2 (ch(\lambda_m) - 1) + \lambda_m sh(\lambda_m)}{\gamma_n^2 \lambda_m^3 ((k\varepsilon) \gamma_n^2 \gamma^2 sh(\lambda_m) + \lambda_m ch(\lambda_m))} \right\}. \quad (13)$$

В предельных случаях динамически тонкой ($(k\varepsilon) \rightarrow 0$) и толстой ($(k\varepsilon) \rightarrow \infty$) пленок из (13) следуют соотношения, совпадающие с найденными Швайдковским для случаев свободной поверхности расплава и расплава, контактирующего с твердой крышкой, соответственно.

Решение задачи о двуслойной жидкости может быть непосредственно обобщено также и на случай, когда число (N) разнородных слоев жидкости произвольно. Уравнения движения жидкости в каждом слое имеют по-прежнему вид (11) (удобнее только определить бесразмерную координату z как $z=z^*/R$, вследствие чего в уравнениях движения следует положить $\gamma=1$). Сохраняются и граничные условия с той только разницей, что они должны выполняться для каждой границы раздела между двумя соседними жидкостями. Тогда рассуждения, подобные выполненным в случае двуслойной жидкости, позволяют найти решение и этой задачи. Мы, однако, рассмотрим другую возможность. При $N \gg 1$ обсуждаемая задача может рассматриваться как дискретная аппроксимация задачи, в которой параметры жидкости v и ρ непрерывно распределены по высоте, являясь некоторыми заданными функциями z (задача о вискозиметре, заполненном стратифицированной жидкостью). Если в гидродинамической части решения для многослойного случая выполнить предельный переход $N \rightarrow \infty, h_i \rightarrow 0$ (h_i - бесразмерная толщина i -го слоя), тогда решение для поля скорости будет иметь вид

$$v(r, z) = \frac{J_1[k(z)r]}{J_1[k(z)]} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z) J_1(\gamma_n r), \quad (14)$$

где $k(z)$ определяется с помощью соотношения, подобного приведенному выше в связи с формулой (12), а коэффициенты $b_n(z)$ являются решениями следующего уравнения

$$\eta(z) \frac{d^2 b_n(z)}{dz^2} + \frac{d\eta}{dz} \frac{db_n(z)}{dz} - b_n(z) \eta(z) \lambda_n^2(z) = \frac{d}{dz} \left[\frac{2\alpha R^2 \gamma_n \frac{dv}{dz} \rho(z)}{J_2(\gamma_n) (\gamma_n^2 - k^2(z))^2 \tau v(z)} \right] \quad (15)$$

с граничными условиями

$$b_n(0) = \frac{2}{\gamma_n J_2(\gamma_n)} \frac{k^2(0)}{\left(k^2(0) - \gamma_n^2\right)}, \quad \left. \frac{db_n}{dz} \right|_{z=H} = \frac{2\alpha R^2 \gamma_n \frac{dv}{dz} \Big|_{z=H}}{J_2(\gamma_n) (\gamma_n^2 - k^2(H))^2 \tau v^2(H)}$$

Можно показать, что в частных случаях однородной и двуслойной жидкости использование (14, 15) приводит известному результату Швидковского и результату, полученному выше, соответственно.

При наличии тонкой пленки граничные условия на поверхности расплава изменяются в зависимости от ее динамической толщины. Поэтому в отсутствие данных о величине (κe), реализующейся в эксперименте, расчетное значение вязкости будет содержать некоторую погрешность. Оценим ее количественно с помощью моделирования вискозиметрических экспериментов. Для этого будет достаточно при моделировании заменить функцию трения (5) на функцию (13).

Результаты моделирования экспериментов по измерению полимеры вязкости "жидкого железа" (7) показаны на рис. 3. Параметры установки при моделировании были выбраны так, чтобы обеспечить справедливость "слабовязкого" приближения. Из рисунка 3а видно, что коэффициент зату-

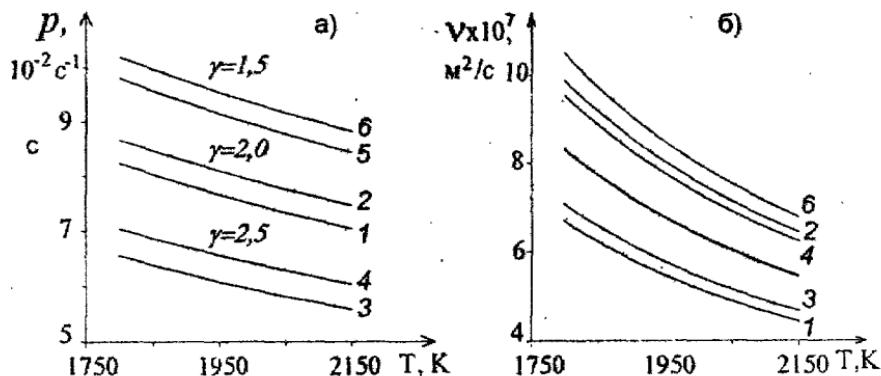


Рис. 3. а) Зависимость от температуры коэффициента затухания при различном выборе параметра $\gamma = H/R$. Кривым с нечетными номерами отвечает $(\kappa e) = 10^{-2}$, а с четными - $(\kappa e) = 10^2$.

б) Полимеры вязкости, рассчитанные по данным рис. 3а
хания существенно зависит от динамической толщины пленки (κe).
На рис. 3б мы промоделировали ситуацию, когда экспериментатор оши-

бается в выборе граничного условия на поверхности расплава. Кривые 2,4,6 (отвечающие $(\kappa\varepsilon)=10^2$, то есть почти "твердой границе") были обработаны в предположении, что граница свободна. Неудивительно, что из-за неучета вязкой диссипации энергии на верхней границе "эффективная" вязкость расплава оказалась существенно выше истинной. Здесь же ясно виден "эффект выбора γ ": уклонение эффективной вязкости от истинной достигает 20-25 % при $\gamma=1.5$ и примерно 12-15 % при $\gamma=2.5$. Кривые 1 и 3 иллюстрируют противоположную ситуацию. На рис. 3 им соответствует $(\kappa\varepsilon)=10^{-2}$ (то есть, почти свободная граница), тогда как мы их обработали, полагая, что граница твердая. Такая ситуация может возникнуть, когда против желания экспериментатора между крышкой тигля и поверхностью металла образуется по каким-либо причинам газовая прослойка. Наблюдаемый в этом случае эффект противоположен рассмотренному выше. Как показывают расчеты, переход от условия типа "свободная" граница к условию типа "твердая граница" совершается в довольно узком интервале изменения динамической толщины пленки: когда $(\kappa\varepsilon)$ изменяется примерно на порядок - два в ту и другую сторону от единицы.

Из приведенных данных ясно, что "пленочными" эффектами можно объяснить расхождения в данных по вязкости в пределах десятков процентов. В зависимости от условий опыта (температуры, парциального давления кислорода и состава атмосферы вообще, концентрации и вида примесей, материала тигля и пр.) свойства поверхностных пленок могут оказаться весьма разнообразными. При изменении температуры может изменяться их состав и агрегатное состояние. В последнем случае экспериментатор будет регистрировать это как скачкообразное изменение вязкости - аномалию. К этому следует добавить, что толщина пленки ε - параметр кинетический. Ее поведение во времени $\varepsilon(t)$ определяется многими причинами: предысторией образца (наличием унаследованной из твердого состояния "шлаковой" фазы), температурой и парциальным давлением кислорода (определенными скоростью окисления), скоростью взаимодействия расплава с материалом тигля и т.д. Нетрудно представить себе ситуацию, когда по этим (или подобным) причинам стационарное значение ε будет устанавливаться за время порядка нескольких часов и более. Это будет приводить к необратимости поведения "эффективной" вязкости в процессах нагрева - охлаждения, сказывающейся сильно или слабо в зависимости от того, где располагаются "текущие" значения динамической толщины пленки $(\kappa\varepsilon)$ по отношению к переходной области $(\kappa\varepsilon) \sim 1$.

В настоящее время мало что известно о свойствах пленок в интересующем нас отношении. Однако, оставляя на будущее инструментальные ме-

тогда решения этого вопроса, покажем, как можно установить присутствие пленок в рамках самого вискозиметрического эксперимента, используя возможность восстановления одновременно с вязкостью также и плотности расплава. Это иллюстрирует следующий численный пример. Возьмем в качестве "экспериментальных" данные для "жидкого железа", представленные на рис. За для $\gamma = 2$ и пополним их данными, отвечающими более широкой области изменения динамической толщины пленки (κ). Затем рассчитаем v и ρ , решая систему вискозиметрических уравнений (1, 2) предложенным нами методом, в предположении, что граница свободная. Как это происходит, иллюстрирует таблица 1.

Таблица 1

В ней I_{\min} есть достигнутое в результате вычислений значение функционала ошибки, а $t_{\text{отн}}$ - относительное время счета данного варианта по сравнению с первым из рассмотренных. "Истинные" значения вязкости и плотности составляют $\rho = 6.96 \text{ г}/\text{см}^3$ и $v = 6.86 \times 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$. Видно, что вплоть до (κ) порядка 10^{-2} получаемые в результате полной минимизации данные практически не отличаются от истинных. Однако, при дальнейшем увеличении (κ) расчетная плотность сильно уклоняется от истинной и сильно увеличивается время счета. Это достаточно ясно свидетельствует об ошибочном определении параметров вискозиметрических уравнений, в данном случае - о неверном выборе граничного условия. Понятно также, что, если в такого рода расчетах зафиксировать плотность (равной истинному значению), тогда вискозиметрическую систему уравнений можно разрешить относительно величин v и (κ). Это дает возможность экспериментального изучения механических свойств поверхностных пленок.

Рассмотрим теперь вопрос о вискозиметрических экспериментах, выполненных в присутствии внешнего магнитного поля (глава 3). Рассмотрим простейший случай, когда вдоль оси вискозиметра приложено статическое однородное магнитное поле с индукцией B_0 . Оценивая с целью упрощения возникающей магнитогидродинамической (МГД) задачи так называемое магнитное число Рейнольдса

$$Re_m = \mu_0 \sigma U L \sim \mu_0 \sigma \frac{R^2}{\tau},$$

κ	$v \times 10^7 \text{ м}^2/\text{с}$	$\rho, \text{г}/\text{см}^3$	I_{\min}	$t_{\text{отн}}$
10 ⁻⁴	6,86	6,99	5,60x10 ⁻⁵	1,00
10 ⁻³	6,86	6,96	3,21x10 ⁻⁵	0,47
10 ⁻²	6,88	6,95	9,20x10 ⁻⁵	0,70
10 ⁻¹	7,51	5,52	8,89x10 ⁻⁴	7,7
10 ⁰	8,97	3,03	2,97x10 ⁻⁴	19,40
10 ¹	7,66	9,82	1,04x10 ⁻⁴	27,50

получаем, что для жидких металлов (когда $\sigma \sim (1 + 10) \times 10^6$ (Ом·м) $^{-1}$) и типичных условий вискозиметрических экспериментов ($R \sim 10^{-2}$ м, $t \sim 5$ с) оно имеет порядок $10^{-4} + 10^{-5}$. Малость Re_m означает, что можно пренебречь индуцированным магнитным полем в сравнении с внешним. Считая, как и раньше, что при малой амплитуде колебаний единственной существенной компонентой скорости является азимутальная $V_\varphi^*(r^*, z^*, t^*)$, вводя безразмерные переменные и параметры

$$t = t^*/\tau, \quad V_\varphi = V_\varphi^*/(\Omega_0 R), \quad r = r^*/R, \quad z = z^*/H, \quad \gamma = H/R,$$

$$\Phi = \Phi^*/(\dot{B}_0 R^2 \Omega_0), \quad Re = R^2/(t\gamma), \quad Ha = B_0 R \sqrt{\sigma I(\rho v)}$$

(Φ^* - электрический потенциал) и учитывая, что в режиме установившихся затухающих колебаний должно быть

$$V_\varphi = v(r, z)e^{-\alpha t}, \quad \Omega(t) = \Omega_0 e^{-\alpha t}, \quad \Phi(r, z, t) = \psi(r, z)e^{-\alpha t},$$

для величин v и ψ получаем следующую систему уравнений МГД:

$$-\alpha v' = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \right] - \frac{Ha^2}{Re} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{Ha^2}{Re} v,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv).$$

Для гидродинамических переменных используем обычные граничные условия, а для электромагнитных возьмем условия непротекания электрического тока через (изолирующие) границы расплава. В терминах функции ψ это означает, что

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_{r=1} = 1, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{z=H} = 0.$$

Найденное в работе решение поставленной краевой задачи приводит к функции трения вида (для свободной поверхности расплава)

$$L = 2\pi\eta R^3 y \left\{ -\beta \frac{J_2(\beta)}{J_1(\beta)} + \right. \\ \left. + 2\beta^4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda_{1n} \left(\varepsilon_n - \frac{\lambda_{2n}^2}{\gamma^2} \right) h(\lambda_{1n}) - \lambda_{1n} \left(\varepsilon_n - \frac{\lambda_{1n}^2}{\gamma^2} \right) h(\lambda_{1n}) \right] (\beta^2 - \gamma_n^2) \lambda_{1n} \lambda_{2n} \right\}, \quad (16)$$

где

$$\beta^2 = \alpha Re - 2 \frac{Ha^2}{Re}, \quad \lambda_{(1,2)n} = +\sqrt{-\frac{\kappa_n}{2} \pm \sqrt{\frac{\kappa_n^2}{4} - \Delta_n}}, \quad \epsilon_n = Ha^2 + \gamma_n^2 - \alpha Re,$$

$$\kappa_n = \gamma_n^2 [\alpha Re - Ha^2 - 2\gamma_n^2], \quad \Delta_n = \gamma_n^4 [2Ha^2 + \gamma_n^2 - \alpha Re].$$

Вискозиметрические уравнения останутся прежними (см. (1, 2)). Можно показать, что при $B_r \rightarrow 0$ (или при $\sigma \rightarrow 0$) функция (16) совпадает с найденной Швидковским. Нетрудно получить решение и для случая, когда на верхней границе осуществляется контакт с твердой поверхностью.

В работе найдено решение рассматриваемой задачи и за пределами безиндукционного приближения. Мы не будем, однако, останавливаться на его обсуждении, поскольку в существующих экспериментах $Re_m \sim 0$.

Оценим количественно величину МГД-эффектов с помощью метода моделирования вискозиметрических экспериментов. Заметим вначале, что априори роль магнитного поля становится существенной, начиная с чисел Гартмана порядка единицы. Величина B_o , при которой достигается заданное значение Ha , определяется как $B_o = Ha / (R\sqrt{\sigma/(\rho\mu)})$. Если в этом соотношении положить $Ha = 1$ и $R = 1$ см, то получаемое таким образом "критическое" значение B_o^* может рассматриваться как мера чувствительности расплава к действию магнитного поля. Оказывается, что наименьшими значениями B_o^* ($\sim 10^{-3}$ Тл) обладают щелочные металлы, наибольшими ($\sim 10^{-2}$ Тл) — переходные. Для большинства металлических расплавов $B_o^* = 2 \div 4 \times 10^{-3}$ Тл. Небольшая величина B_o^* для жидких металлов означает, что МГД-эффекты в них должны хорошо наблюдаться.

На рис. 4 (а) на примере жидкого K показаны зависимости декремента затухания колебаний от величины B_o при различных выборах параметров установки, перечисленных в таблице 2.

Таблица 2

№ варианта	M, г	R, мм	K, г см ²	τ_o , с
1	5,21	10	71,7	1,4
2	5,21	10	71,7	6,1
3	5,21	10	22,3	2,2
4	5,21	10	22,3	4,9
5	17,57	15	82,9	4,2

В вариантах 1-5 массы образцов выбраны таким образом, чтобы (при заданном R) обеспечить для жидкого калия выполнение условия $\gamma = H/R = 2$. Во всех расчетах предполагалось, что поверхность расплава свободна.

Видно, что поведение $\delta(B_o)$ существенно зависит от параметров установки и возможен такой выбор, когда δ возрастает на сотни процентов уже в сравнительно слабых полях порядка 0,1 Тл. На рис. 4(б) представлено пове-

дение "эффективной" вязкости жидкого K , т.е. вязкости, рассчитанной с использованием обычной "бесполевой" функции трения (5). В качестве исходных брались "экспериментальные" данные, приведенные на рис. 4(а).

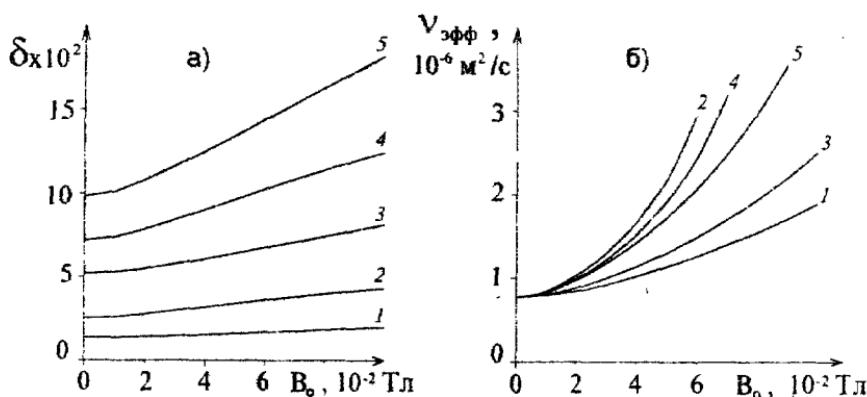


Рис. 4. Зависимость от индукции магнитного поля декремента затухания (а) и эффективной вязкости расплава (б) при различных выборах параметров установки. Номера кривых соответствуют номерам вариантов в таблице 2.

Видно, что эффективная вязкость зависит не только от величины приложенного поля, но также и от параметров установки.

Для проверки представленной теории выполнены эксперименты с жидким галлием, низкая температура плавления и высокая электропроводность которого дает возможность избежать применения мощных нагревателей и, следовательно, появления создаваемых ими плохо контролируемых магнитных полей, а также позволяет надеяться на заметные МГД-эффекты уже в относительно слабых полях. Магнитное поле создавалось цилиндрическим соленоидом, внутрь которого помещался тигель с исследуемым расплавом. Параметры установки были следующими: $R = 13.0$ мм, $K = 77.0$ Гц·см 2 , $\tau_0 = 5.60729 \pm 5 \times 10^{-5}$ с, $\delta_0 = 0.0093 \pm 3 \times 10^{-4}$. Для демонстрации зависимости величины МГД-эффектов от выбора ПУ мы выбрали самый простой путь - изменение массы M образца. На рис. 5(а) приведены данные о поведении $\delta(B_0)$ для $M_1 = 39.686$ г и $M_2 = 80.870$ г. Данных о зависимости $\tau(B_0)$ мы не приводим, поскольку при выбранных нами параметрах установки она оказалась слабой. На рис. 5(б) представлены зависимости эффективной вязкости $\nu_{\text{эфф}}$ от индукции магнитного поля. Кривые 1 и 2 получены в предположении, что поверхность расплава свободна, а при расчете 3 и 4 считалось, что поверхность покрыта окисной пленкой, по

механическим свойствам не уступающей твердой поверхности. Видно, что эффективные вязкости в нулевом поле совпадают для кривых 3 и 4 и не совпадают для кривых 1 и 2. Это означает, что в последнем случае расчет содержит методическую ошибку, а именно - неверно определено граничное условие на поверхности расплава. Таким образом, в выполненных экспериментах более правильно считать, что верхняя граница расплава является "твёрдоподобной", ижели свободной. Присутствие пленки подтверждается и визуальными наблюдениями.

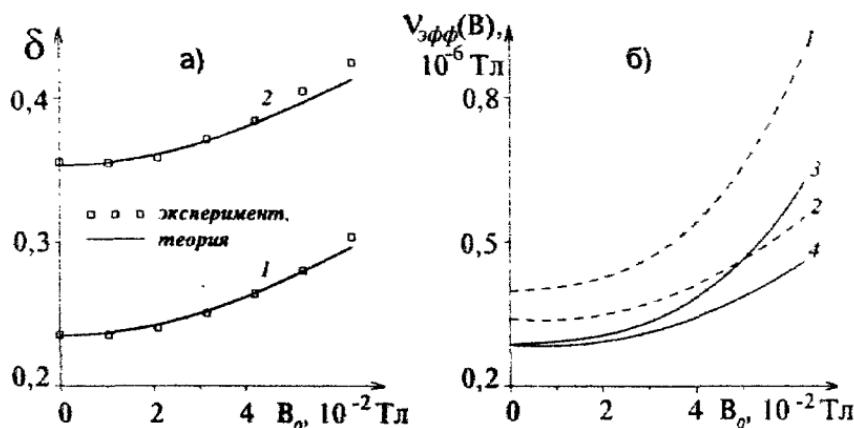


Рис. 5. Зависимость от магнитного поля декремента затухания (а) и эффективной вязкости расплава (б). Кривая I на рис. 5а и кривые 2 и 4 на рис. 5б относятся к образцу массой M_1 , остальные - к образцу массой M_2

На рис. 5(а) также приведены результаты расчета зависимости декремента затухания δ от индукции магнитного поля по изложенной выше теории в безиндукционном приближении (оправдываемом в рассматриваемой ситуации). В расчетах использовалось значение вязкости, найденное выше при $B_0 = 0$, а величина электропроводности галлия была взята равной $3,82 \times 10^6$ (Ом \cdot м) $^{-1}$. Из рисунка видно, что расчетные кривые $\delta(B_0)$ хорошо согласуются с экспериментальными данными в обоих рассмотренных случаях. Некоторое систематическое расхождение намечается, может быть, лишь в случае больших полей ($B_0 \sim 6 \times 10^{-2}$ Тл). Его причиной может быть недостаточно точное определение постоянной соленоида C , которая нами определялась расчетным путем и оказалась равной $2,11 \times 10^{-2}$ Тл/А. Небольшое увеличение C (до $2,20 \times 10^{-2}$ Тл/А) заметно улучшает согласие с экспериментом и в больших полях. Непосредственных измерений C мы, однако, не производили.

Таким образом, изложенная теория количественно верно описывает эффекты, возникающие в экспериментах с крутильным вискозиметром в присутствии осевого магнитного поля. Тем самым иная интерпретация результатов подобных экспериментов, встречающаяся в литературе, представляется сомнительной.

Из приведенных выше расчетов и экспериментов видно, что параметры установки всегда могут быть подобраны так, чтобы параметры колебаний существенно зависели от индукции приложенного поля и были бы поэтому легко регистрируемы как функции этого поля. Следовательно, эксперименты с крутильным вискозиметром во внешнем магнитном поле могут быть использованы для определения электропроводности расплавов. В частности, при обработке описанных выше экспериментов, мы, взяв расчетное значение постоянной соленоида и варьируя величиной σ , получили, что наилучшее (в смысле метода наименьших квадратов) совпадение расчетной и экспериментальной зависимостей декремента затухания от поля достигается при $\sigma = 3.96 \times 10^6$ (Омх) $^{-1}$, что достаточно хорошо согласуется с приведенным выше значением, взятым из литературных источников. Таким образом, предлагаемый способ может рассматриваться как альтернативный по отношению к другому, широко распространенному на практике бесконтактному методу измерения электропроводности - методу вращающегося поля. Его главное преимущество по сравнению с последним заключается по нашему мнению в том, что он базируется на "метрологически" более строгой теории, корректно учитывающей все процессы, происходящие в измерительной установке. Этого, к сожалению, нельзя сказать о методе вращающегося поля (см. пункт 4 в разделе Актуальность реферата). Продемонстрируем суть проблем, возникающих в теории последнего метода при попытке учесть то обстоятельство, что образец находится в жидком, а не твердом состоянии.

Главная трудность в этой задаче связана с потерей цилиндрической симметрии ввиду того, что магнитное поле является поперечным (по отношению к оси цилиндра), а не продольным. Это означает, что в цилиндре будет реализоваться более сложное МГД-течение, достаточно точное описание которого аналитическими средствами может оказаться весьма проблематичным. Посмотрим, можно ли упростить задачу за счет пренебрежения (или приближенного учета) некоторыми из МГД-эффектов. Оценим с этой целью магнитное число Рейнольдса $Re_m = U\sigma\mu_0$ для типичных условий экспериментов над жидкими металлами, взяв $U = \omega R$, $I = R$, $\omega = 314 \text{ c}^{-1}$, $R = 1 \text{ см}$. Тогда получим, что для жидких металлов Re_m лежит в пределах от 0,03 ("высокоомные" металлы типа переходных) до 0,4 (щелочные металлы).

лы). Поскольку $Re_m \sim \omega R^2$, то всегда есть возможность существенно уменьшить Re_m для данного расплава, уменьшая частоту ω вращения поля и/или радиус цилиндра. Таким образом, эксперименты над жидкими металлами выполняются в условиях, когда требование $Re_m \ll 1$ (справедливости безиндукционного приближения) может быть сравнительно легко удовлетворено и также легко нарушено. Ниже будем считать его выполненным.

Рассмотрим эквивалентную задачу, когда однородное магнитное поле является статическим, а с угловой скоростью ω вращается сам сосуд - замкнутый цилиндр радиуса R и высоты $2H$, полностью заполненный проводящей жидкостью. Требуется определить момент вязких сил, действующий на цилиндр со стороны жидкости. Будем считать, что в стационарном состоянии наиболее существенной компонентой скорости жидкости является азимутальная $V_\phi(r, \phi, z)$ (заметим, что только она и важна для расчета момента относительно оси цилиндра). При $V_z = V_r = 0$ для V_ϕ и электрического потенциала Φ справедливы уравнения (в цилиндрической системе координат)

$$-\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{V_\phi}{r^2} + \frac{\partial^2 V_\phi}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} \sigma B_0 \cos \phi \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \sigma B_0^2 \cos^2 \phi V_\phi = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -B_0 \cos \phi \frac{\partial V_\phi}{\partial z}. \quad (18)$$

Границные условия записываются как обычно:

$$V_\phi(R, z) = \omega R, \quad V_\phi(r, \pm H) = \omega r. \quad (19)$$

$$j_r(R, z) = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=R} = 0; \quad j_z(r, \pm H) = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=\pm H} = -B_0 \omega r \cos \phi. \quad (20)$$

Учитывая вид уравнения (18) и граничного условия (20), представим $\Phi(r, \phi, z)$ в виде: $\Phi(r, \phi, z) = \psi(r, z) \cos \phi$. Тогда вместо (18) получим:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -B_0 \frac{\partial V_\phi}{\partial z}, \quad (21)$$

а в качестве граничных условий для функции ψ будем иметь:

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{z=\pm H} = -B_0 \omega r, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_{r=R} = 0.$$

Уравнение же (17) примет вид:

$$-\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{V_\phi}{r^2} + \frac{\partial^2 V_\phi}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} \sigma B_0 \cos^2 \phi \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \sigma B_0^2 V_\phi \cos^2 \phi = 0.$$

На жидкую частицу, совершающую круговое движение вокруг оси цилиндра

ра, действует электромагнитная сила, описываемая двумя последними слагаемыми в этом уравнении и периодически изменяющаяся в зависимости от углового положения частицы. При быстром вращении действие этой пульсирующей силы можно усреднить по периоду вращения, после чего уравнение для азимутальной компоненты скорости запишется как:

$$\nu \left(\frac{\partial^2 V_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{V_\phi}{r^2} + \frac{\partial^2 V_\phi}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{2\rho} \sigma B_o \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1}{2\rho} \sigma B_o^2 V_\phi = 0. \quad (22)$$

В безразмерных переменных

$$\hat{z} = \frac{z}{R}; \quad \hat{r} = \frac{r}{R}; \quad \hat{y} = \frac{H}{R}; \quad \hat{V} = \frac{V_\phi}{\omega R}; \quad \hat{\psi} = \frac{\psi}{B_o H R \omega},$$

где "крышкой" отмечены использовавшиеся выше размерные величины, из (21), (22) и соответствующих граничных условий получим окончательную формулировку краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \gamma H a_e^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} - H a_e^2 V = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial V}{\partial z},$$

$$V(1, z) = 1, \quad V(r, \pm y) = r, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_{r=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{z=\pm y} = -\frac{r}{\gamma},$$

где $H a_e^2 = 0,5 \sigma B_o^2 R^2 / (\rho \nu)$ - "действующее" (эффективное) значение числа Гартмана. Достаточно простое и удобное для анализа решение этой краевой задачи удается найти только для случая "длинного" цилиндра, когда параметр γ велик. В этом случае можно показать, что поле скорости имеет вид (в размерных переменных):

$$V_\phi(r) = \omega R \frac{I_1 \left(\frac{H a_e}{R} r \right)}{I_1(H a_e)}, \quad (23)$$

($I_1(x)$ - модифицированная функция Бесселя I-го порядка) и, следовательно, момент m сил трения, приложенных со стороны жидкости к единице длины цилиндра, есть

$$m = 2\pi R^2 \eta \omega \left\{ H a_e \frac{I_0(H a_e)}{I_1(H a_e)} - 2 \right\}.$$

В пределе "сильного" поля, когда $H a_e \gg 1$ отсюда получаем

$$m = 2\pi R^2 \eta \omega H a_e = 2\pi R^3 \omega B_o \sqrt{\frac{\sigma \eta}{2}},$$

а для "слабого" поля ($Ha_e \ll 1$) будем иметь:

$$m = \frac{\pi}{4} R^4 \omega \sigma B_o^2.$$

Можно показать, что последнее соотношение справедливо и для (электромагнитного) момента, приложенного со стороны вращающегося поля к твердому цилиндру. Таким образом, величина закручивающего момента для жидкого образца зависит от его вязкости, и только в пределе малых чисел Гартмана эта зависимость исчезает, а формулы для подсчета момента, действующего на твердый и жидкий образец, становятся идентичными.

На рис. 6а показано, как деформируется профиль (23) азимутальной скорости расплава под действием приложенного магнитного поля. Применение теории, справедливой для твердых образцов, к образцам жидким оправдывается тем, что распределение скорости в жидком образце мало отличается от такового в твердом. Из рис. 6а ясно, что это утверждение справедливо только для $Ha \ll 1$. Рис. 6б показывает, как быстро с ростом числа Гартмана изменяется отношение закручивающих моментов, создаваемых жидким и твердым образцом и как быстро возрастает относительная ошибка в определении электропроводности, если при обработке данных для жидких образцов использовать теорию, справедливую для твердых (полученная таким путем электропроводность имеет смысл эффективной - $\sigma_{\text{эфф}}$).

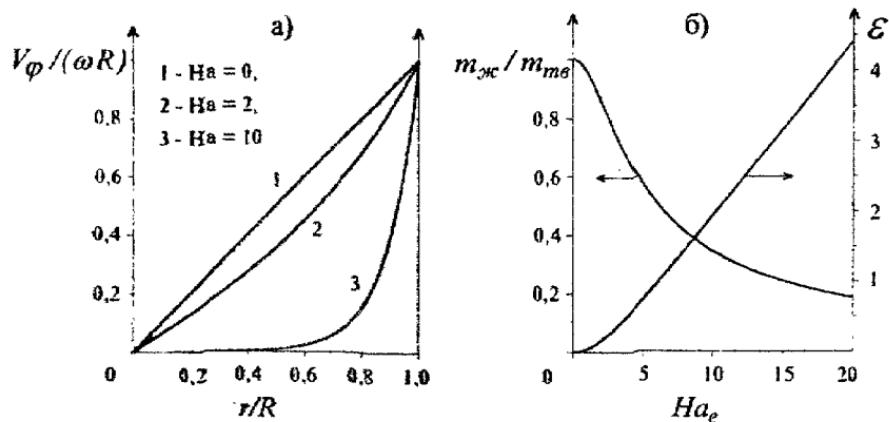


Рис. 6. а) профили азимутальной скорости при разных значениях эффективного числа Гартмана,

б) момент сил, действующий на цилиндр, заполненный жидкостью, по отношению к таковому для твердого образца, и относительная ошибка определения электропроводности $\varepsilon = (\sigma - \sigma_{\text{эфф}})/\sigma_{\text{эфф}}$

Из последнего рисунка также ясно, что при переходе образца из твердого состояния в жидкое (при плавлении) всегда будет регистрироваться скачкообразное уменьшение эффективной проводимости независимо от того, изменяется ли в таком переходе ее истинное значение. Величина скачка сильно зависит от реализующегося в опытах числа Гартмана.

Полученные только что результаты имеют в лучшем случае полукачественный характер и не претендуют на роль "кондуктометрической" теории ввиду использованных выше приближений. Не свободно от таких приближений и найденное в работе решение для широкого цилиндра (у которого $H/R \ll 1$). Эти соображения должны побудить исследователей обратить внимание на другие возможности бесконтактного измерения электропроводности расплавов - например, на предлагаемый в настоящей работе.

Выше мы получили ясные свидетельства того, что присутствие в физико-химических экспериментах над металлическими расплавами даже небольшого магнитного поля способно существенно влиять на их механическое состояние, либо изменяя характеристики "бесполевого" течения, либо возбуждая течение, если его в отсутствие поля не было. Рассмотрим последний пример такого рода, а именно - влияние магнитного поля на характеристики массообмена между твердым телом и проводящим расплавом, измеряемые с помощью широко распространенного метода вращающегося диска (глава 4). "Бесполевая" теория для таких экспериментов была разработана Левицем В.Г. Способность этой теории к количественной интерпретации экспериментальных данных базируется на том (счастливом для гидродинамики) обстоятельстве, что существует точное решение соответствующей гидродинамической задачи (найденное Карманом Т.) Термин "точное решение" здесь означает, что исходная краевая задача для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (уравнений Навье-Стокса) с помощью некоторой замены зависимых и независимых переменных (преобразований Кармана) может быть сведена (редуцирована) к краевой задаче для системы уравнений в обыкновенных производных, решение которой неизмеримо легче, хотя и возможно лишь численными или приближенными аналитическими методами. Сычевым (Sychev V.V.) было обнаружено, что точное (в том же смысле) решение существует и в МГД -аналоге задачи Кармана, когда однородное магнитное поле приложено вдоль оси вращающегося диска. Возникающее в этом случае течение было подробно исследовано Бентоном (Benton E.R.) в связи с задачами астрофизики. В настоящей работе возможность редукции МГД уравнений используется для описания процессов массопереноса в рамках метода вращающегося диска, имея ввиду, что экспериментальные исследо-

вания в этом направлении уже появились.

Итак, пусть твердый непроводящий диск бесконечно большого радиуса вращается с постоянной угловой скоростью Ω_0 в вязкой несжимаемой проводящей жидкости при наличии внешнего магнитного поля, которое в отсутствие вращения является однородным, статическим, направлено вдоль оси диска и имеет индукцию B . Сама жидкость вдали от поверхности диска вращается с угловой скоростью Ω_1 . Обозначая через Ω большую из этих скоростей, положим $\varepsilon = (\Omega_0 - \Omega_1)/\Omega$, где ε - так называемое число Россби. Считая каждую из угловых скоростей Ω_0 и Ω_1 неотрицательной, получаем, что ε заключено в пределах от -1 до +1, причем значению $\varepsilon = 1$ соответствует МГД-аналог задачи Кармана, а $\varepsilon = -1$ - МГД-аналог т. н. задачи Бёдевадта. Линеаризация задачи возможна, когда $|\varepsilon| \ll 1$. Разыскивая (в цилиндрической системе координат) решения уравнений МГД, описывающие осесимметричные и стационарные движения жидкости, сделяем замену переменных, аналогичную таковой в классической, немагнитной задаче Кармана

$$V_r = r\Omega F(z_1); \quad V_\phi = r\Omega G(z_1); \quad V_z = \sqrt{\nu\Omega}H(z_1);$$

$$B_r = rCK(z_1); \quad B_\phi = rCL(z_1); \quad B_z = B_0M(z_1);$$

$$P = \rho\Omega^2r^2p(z_1) + \rho\nu\Omega q(z_1),$$

где

$$C = B_0\mu_0\sigma(\nu\Omega)^{1/2}, \quad z_1 = z\left(\frac{\Omega}{\nu}\right)^{1/2} = \frac{z}{z_E},$$

($z_E = (\nu/\Omega)^{1/2}$ - толщина экмановского пограничного слоя) и исключим из получившейся системы обыкновенных дифференциальных уравнений функции p и q , описывающие распределение давления. Тогда система МГД-уравнений для оставшихся функций F , G , H , K , L и M примет вид

$$F''' - HF'' + 2GG' = -2\alpha^2MK'' + 4\alpha^2\delta LL'',$$

$$2FG + HG' - G'' = 4\alpha^2\delta KL + 2\alpha^2ML',$$

$$2F + H' = 0, \quad MF' + K'' = \delta HK', \quad MG' + L'' = \delta HL',$$

$$M'' = \delta(HM' - MH'), \quad M' + 2\delta K = 0,$$

где

$$\alpha^2 = \frac{\sigma B_0^2}{2\rho\Omega}, \quad \delta = \sigma\mu_0\nu.$$

Границные условия для этой системы уравнений можно записать как

$$F(0) = 0, \quad G(0) = \frac{\Omega_0}{\Omega}, \quad H(0) = 0;$$

$$\begin{aligned} F(\infty) &= 0, \quad G(\infty) = \frac{\Omega_1}{\Omega}; \quad H(\infty) = \text{const}, \\ L(0) &= 0, \quad M'(0) = 0, \quad K'(0) = 0, \\ M(\infty) &= 1, \quad L(\infty) = 0, \quad K(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Несмотря на использованную нами возможность редукции, математические проблемы остаются. Они связаны с нелинейностью получившейся системы уравнений, что создает известные трудности при решении краевых задач, усугубляющиеся тем, что часть краевых условий ставится лишь асимптотически (при $z \rightarrow \infty$). Все это делает численные расчеты весьма громоздкими, даже с применением современных ЭВМ. Поэтому важно найти способы для упрощения задачи. С этой целью оценим фигурирующие в уравнениях параметры α и δ для жидкых металлов. Оказывается, что $\delta \sim 10^{-7} \div 10^{-5}$, а параметр α в типичных условиях экспериментов может изменяться в широких пределах: от нуля до 10^3 . Следовательно, в уравнениях движения можно пренебречь слагаемыми, пропорциональными δ , что дает возможность после некоторых дополнительных рассуждений представить эти уравнения в виде

$$F^2 - G^2 + HF' - F'' = -2\alpha^2 F - \left(\frac{\Omega_1}{\Omega}\right)^2. \quad (25)$$

$$2FG + HG' - G'' = 2\alpha^2 \left(\frac{\Omega_1}{\Omega}\right)^2, \quad (26)$$

$$2F + H' = 0, \quad L' + G = \Omega_1 / \Omega, \quad K' + F = 0. \quad (27, 28, 29)$$

Важным достоинством этой системы является то, что для гидродинамических переменных получается замкнутая система, состоящая из первых трех уравнений, и отличающаяся от таковой для немагнитного случая только слагаемыми, пропорциональными α^2 . После ее решения функции K и L , описывающие магнитное поле, могут быть рассчитаны из последних двух уравнений, не связанных друг с другом. Решение краевой задачи для системы (25-27) мы находили, сводя ее к задаче об отыскании минимума функции F вида

$$F[u, v] = F^2(Z_m) + \left(G(Z_m) - \frac{\Omega_1}{\Omega}\right)^2 + H'^2(Z_m)$$

где Z_m такая величина z , что в ее окрестности и для всех $z > Z_m$ можно считать, что разыскиваемые функции уже имеют асимптотическое поведение, подчиненное заданным выше граничным условиям при $z \rightarrow \infty$: выражаемые параметры u и v имеют смысл оценок для незаданных в (24) граничных значений $F'(0)$ и $G'(0)$, необходимых для старта процесса численного интегрирования системы (25-27) из точки $z = 0$, в результате которого

и появляются значения $F(Z_m)$, $G(Z_m)$ и $H'(Z_m)$, фигурирующие в определении F . Эффективность процесса минимизации в значительной степени зависит от удачного выбора начальных значений $F(0)$ и $G(0)$. В работе удалось показать, что при достаточно больших α справедливы соотношения

$$F'(0) \approx F'_0(\varepsilon, \alpha) = \frac{\varepsilon}{\alpha\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2\varepsilon}{3}\right), \quad G'(0) \approx G'_0(\varepsilon, \alpha) = -\sqrt{2}\alpha\varepsilon. \quad (30, 31)$$

О качестве этих оценок можно судить по рис. 7. Видно, что они оказываются вполне приемлемыми уже при $\alpha \geq 1$. Здесь же пунктиром показаны несколько улучшенные оценки, которые можно получить, согласовав (30, 31) с известными точными значениями, полученными для линеаризованной по ε задачи (справедливыми при $\varepsilon \ll 1$).

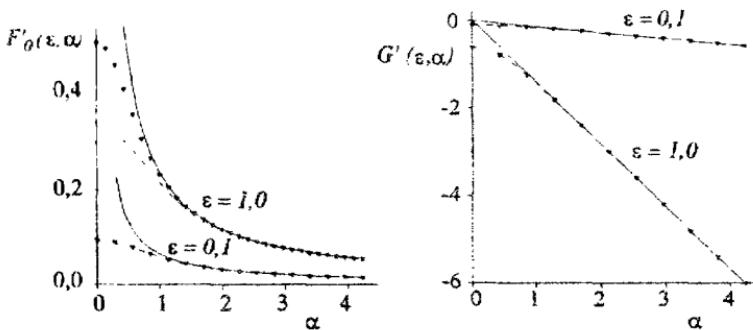


Рис. 7. Зависимость граничных условий от параметра α :

- численный расчет,
- асимптотика (30, 31),
- - - асимптотика, согласованная по ε

Как видно из предыдущих рассуждений, характерный масштаб изменения профилей скорости около диска оказывается, как и в отсутствие магнитного поля, независящим от координаты r . Это означает постоянство толщины пограничного слоя на всей поверхности диска, откуда в свою очередь следует, что свойство поверхности диска быть равнодоступной в отношении процессов массообмена сохраняется и при наличии магнитного поля. Поэтому остаются справедливыми рассуждения, выполненные Левичем В.Г. и касающиеся расчетов полей концентрации и массовых потоков, порождаемых химическим взаимодействием между жидкостью и материалом диска. Именно, достаточно предположить, что профиль концентрации c зависит лишь от расстояния z до поверхности диска, и тогда решение урав-

нення конвективной диффузии будет иметь вид:

$$c(z) = a_1 \int_0^z \exp \left[\frac{1}{D} \int_0^t V_z(y) dy \right] dt + a_2.$$

где D - коэффициент диффузии, а константы a_1 и a_2 определяются граничными условиями, накладываемыми на поле концентраций. В частности, в случае быстрой реакции на поверхности диска, когда массообмен контролируется диффузией, будем иметь для плотности потока частиц на диск:

$$j = \frac{D c_0}{z_e} \frac{1}{\int_0^\infty \exp \left\{ \text{Pr} \int_0^\tau H(z_1) dz_1 \right\} d\tau},$$

где Pr и c_0 - число Прандтля и концентрация реагента на бесконечности соответственно. Для изучения влияния магнитного поля удобно рассмотреть безразмерную плотность потока j и нормированную безразмерную плотность j_N , определенные соотношениями:

$$j = \frac{z_e}{D c_0} j, \quad j_N = j(\alpha) / j(0).$$

Как видно из этого определения, j зависит явно от числа Прандтля и неявно от параметров α и ε , определяющих поведение функции $H(z)$. Для металлических расплавов справедливо: $\text{Pr} \sim 10^2 \div 10^3$, а диапазон изменения остальных параметров для них обсуждался выше.

На рис. 8 показана зависимость от α безразмерного потока и нормированного потока, соответственно, при некоторых фиксированных значениях остальных параметров из указанных диапазонов.

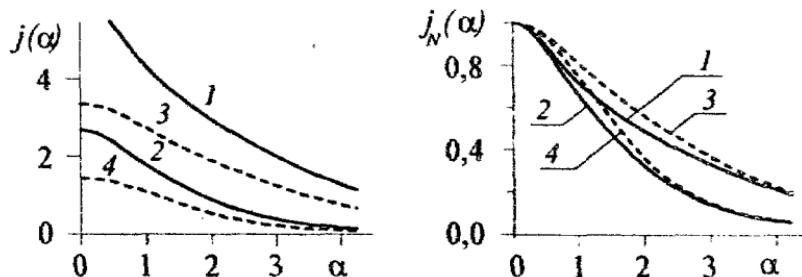


Рис. 8. Влияние магнитного поля на плотность массового потока к поверхности диска:

$$\begin{array}{ll} 1 - \varepsilon = 1,0; \text{Pr} = 10^3, & 2 - \varepsilon = 1,0; \text{Pr} = 10^2, \\ 3 - \varepsilon = 0,1; \text{Pr} = 10^3, & 4 - \varepsilon = 0,1; \text{Pr} = 10^2 \end{array}$$

Видно, что с ростом параметра α происходит монотонное уменьшение интенсивности массообмена между жидкостью и диском, обусловленное подавлением конвективной составляющей массового потока. Скорость уменьшения потока массы с ростом α зависит, в основном, от числа Прандтля и увеличивается с уменьшением последнего, в то время как величина числа Россби существенна лишь, когда параметр α не слишком велик ($\alpha \leq 2 \div 3$).

Эти результаты показывают, что существенное уменьшение плотности массового потока (например, в два раза) происходит, когда параметр α достигает значений порядка единицы. Оценим возможность наблюдения таких изменений в экспериментах с металлическими расплавами. Представим выражение для α в виде

$$\alpha^2 = \left(\frac{\sigma}{\rho} \right)^{1/2} \frac{B_0}{\sqrt{2\Omega}} \equiv C \frac{B_0}{\sqrt{2\Omega}},$$

где коэффициент C зависит только от отношения электропроводности к плотности жидкости. Его величина для большинства жидких металлов заключена в пределах $10 - 20$ ($\text{Tl}^{-1}\text{c}^{-1/2}$) и только для легких щелочных металлов достигает величин порядка 100. Поэтому, если максимальное поле в эксперименте имеет величину порядка 0,1 Тл (что вполне достижимо даже в соленоидах без сердечников), то значения α порядка единицы можно получить, если угловая скорость диска не превышает $0,5 \div 2,0$ рад/с для металлов, у которых $C \sim 10 \div 20$, и 50 рад/с для легких щелочных металлов.

Таким образом, в жидких металлах МГД-эффекты сильно влияют на результаты экспериментов с вращающимся диском, что необходимо иметь ввиду при интерпретации опытных данных. Представленная выше теория дает достаточно точное описание этих эффектов и поэтому открывает возможности для создания экспериментальных методов изучения влияния магнитного поля на параметры взаимодействие твердого тела с проводящим расплавом.

Заключение

Итак, анализ опытных данных о физико-химических свойствах металлических расплавов выявляет несколько проблем, четыре из которых сформулированы в разделе Актуальность автореферата. Их разрешение невозможно без критического анализа и развития теоретических основ экспериментальных методик. В настоящей работе установлены следующие факты, которые необходимо принимать во внимание при обработке и интерпретации опытных данных.

1. В экспериментах с крутильным вискозиметром Швидковского су-

ществуют факторы, неучет или неверная оценка которых приводит к погрешности в оценке вязкости, намного превышающей ту, которая следует из формального анализа ошибок измерений. В работе, в частности, изучены последствия:

- некорректного использования результатов стандартных вискозиметрических теорий и вытекающих из них приближенных расчетных схем ("рабочих уравнений"),
- неверной оценки условий, реализующихся на верхней границе образца,
- присутствия в объеме образца внешних полей, например, нескомпенсированного магнитного поля нагревателя.

Показано, что действием этих факторов можно объяснить большую часть противоречий в данных по вязкости, включая как разброс абсолютных величин вязкости в десятки и сотни процентов, так и те особенности в зависимости вязкости от температуры (состава), которые рассматриваются как аномалии. Развитая в работе теория учитывает поверхностные и магнитогидродинамические эффекты, что позволяет, в принципе, либо исключить их при расчете вязкости, либо оценить величину связанный с ними погрешности. Фактически, однако, для исключения поверхностных эффектов необходимо знание механических параметров поверхностных фаз, которые, как правило, неизвестны. К счастью, в наиболее интересном случае, когда поверхностная фаза представляет собой тонкую вязкую пленку, ее единственный существенный параметр - динамическая толщина - может быть идентифицирован в рамках самого вискозиметрического эксперимента.

2. Изложенное выше отнюдь не исключает, конечно, того, что причинами несоответствия в данных по вязкости могут быть феномены катастрофически сильного влияния примесей, макроскопически больших времен релаксации, структурных переходов и пр. Поэтому чрезвычайно важно найти способ, как отличить эти феномены от действия перечисленных в пункте 1 факторов. Такой способ предложен в работе и заключается в предоставляемой вискозиметрической теорией возможности проверки внутренней согласованности экспериментальных данных. Для реализации этого способа на практике предложены необходимые расчетные и экспериментальные средства. Представляется, что с использованием этих средств могут быть сделаны дальнейшие конструктивные шаги в дискуссиях об упомянутых феноменах.

3. Физические свойства металлических расплавов таковы, что присутствие в объеме образца магнитного поля, созданного специально или паразитного, легко приводит к возбуждению магнитогидродинамических эффектов, которые часто оказываются способными существенно исказить результаты

наблюдения "основного" эффекта и привести тем самым к их неверной интерпретации. В работе это продемонстрировано на примерах экспериментов по определению вязкости методом крутильных колебаний, измерения электропроводности методом врачающегося магнитного поля и определения характеристик взаимодействия расплав - твердое тело методом врачающегося диска. С другой стороны, тот факт, что эти эффекты легко наблюдаются, дает возможность использовать их как для создания новых методик экспериментального изучения расплавов, так и для изучения новых явлений. В частности, метод крутильных колебаний в осевом магнитном поле может быть предложен для определения электропроводности, а в методе врачающегося диска становится возможным изучать закономерности взаимодействия с расплавом магнитоупорядоченных тел или влияние магнитного поля на скорость гетерогенных химических реакций.

Основные результаты автора по теме диссертации отражены в следующих публикациях.

1. Бескачко В.П., Вяткин Г.П., Щека А.И. Численный метод расчета вязкости жидкостей по данным о крутильных колебаниях цилиндра. - Структура и физико-химические свойства металлических и оксидных расплавов. - Свердловск, УНЦ АН СССР, 1986. - С. 27-37.
2. Бескачко В.П., Вяткин Г.П., Уткин Е.А., Щека А.И.. Моделирование экспериментов по измерению вязкости методом Швидковского - Расплавы, 1990. - N2. -C. 57-64.
3. Бескачко В.П., Вяткин Г.П., Писарев Н.М., Щека А.И.. Влияние поверхностных плёнок на результаты измерения вязкости по методу Швидковского. 1. Теория - Расплавы, 1990. - N6. - С. 3-8.
4. Бескачко В.П., Вяткин Г.П., Писарев Н.М., Щека А.И.. Влияние поверхностных плёнок на результаты измерения вязкости по методу Швидковского. 2. Численные эксперименты - Расплавы, 1990. - N6. - С. 9-16.
5. Бескачко В.П., Вяткин Г.П., Писарев Н.М., Хисматулин М.Б.. Крутильные колебания цилиндра, заполненного проводящей жидкостью в осевом магнитном поле. - Расплавы, 1991. - NS. - С. 31-38.
6. Бескачко В.П., Вяткин Г.П., Писарев Н.М., Хисматулин М.Б.. Теория крутильного вискозиметра, помещенного в осевое магнитное поле . - Магнитная гидродинамика, 1992. - N2. - С. 65-70.
7. Бескачко В.П., Хисматулин М.Б.. Крутильный вискозиметр в осевом магнитном поле: эксперимент - Магнитная гидродинамика, 1993. - N1. - С. 117-122.
8. Бескачко В.П., Хисматулин М.Б., Щека А.И. Теория крутильного вискозиметра, заполненного стратифицированной жидкостью. - "Физико-

- химические основы металлургических процессов". - Челябинск, ЧГТУ, 1992. - С. 47-52.
9. Beskatchko V.P., Vjatkin G.P., Pisarev N.M., Khismatulin M.B. Some tasks of the theory of oscillating-cup viscometer. - VIII Int. Conf. on liquid and amorphous metals, Wien, Austria, Aug.31-Sep.4, 1992. Sci. program. Abstracts, P.11, PB-036.
10. Бескачко В.П., Вяткин Г.П., Писарев Н.М., Щека А.И. Теория крутильного вискозиметра: о чём бы надо помнить при анализе экспериментальных данных. - "Строение и свойства металлических и шлаковых расплавов", Научные сообщения VII Всесоюзной конференции. - Челябинск, 1990. - т.II. - ч.1. - С. 7-12.
11. Бескачко В.П., Писарев Н.М., Хисматулин М.Б.. Крутильный вискозиметр в осевом магнитном поле: теория и численные эксперименты. - "Строение и свойства металлических и шлаковых расплавов". Научные сообщения VII Всесоюзной конференции. - Челябинск, 1990. - т.II. - ч.1. - С. 12-15.
12. Бескачко В.П. Масоперенос із поверхні диску, який обертається при наявності осьового магнітного поля. - "Структура і фізичні властивості невпорядкованих систем", Тез. доп. I Української конференції. - Львів, 1993. - ч. II. - С. 48.
13. Бескачко В.П., Хисматулин М.Б.. Крутильный вискозиметр Швидковского: совершенствование методики и техники экспериментов.- "Физико-химия металлических и оксидных расплавов", тезисы докладов Республиканской научно-технической конференции. - Екатеринбург, 1993. - С. 63-64.
14. Бескачко В.П., Болотникова Н.А., Писарев Н.М. Некоторые задачи механики, возникающие в физико-химических экспериментах над жидкими металлами. - "Строение и свойства металлических и шлаковых расплавов", Тезисы докладов VIII Всероссийской конференции. - Екатеринбург, 1994. -т. 2. - С.3.
15. Бескачко В.П., Болотникова Н.А., Вяткин Г.П. Массоперенос с поверхности вращающегося диска в присутствии осевого магнитного поля. - Препринт ЧГТУ, 1994. - 26 с.

Техн. редактор А.В. Миних

Издательство Челябинского
государственного технического университета

ЛР № 020364. 20.01.92. Подписано в печать 17.03.95. Формат бум.
60x84 1/16. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,32. Уч. - изд. л. 2,35. Тираж
100 экз. Заказ 88/125 .

УОП Издательства. 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76